Groupe de travail «Poids et motifs»

Université Paris 13, 2007-2008

———————————

Complexe des poids I

par

F. Déglise

————-

On présente ici la construction du complexe des poids de Gillet-Soulé, dans la catégorie des motifs purs en caractéristique 0. Ce complexe de motifs purs se relève en un complexe de motifs de Chow.

On fixe un corps k de caractéristique 0. Tous les schémas sont des k-schémas de type fini.

Par convention, tous les schémas simpliciaux sont des objets simpliciaux dont les morphismes de transitions sont propres.

Table des matières

1. Enveloppes

Remarquons le lemme évident suivant :

Lemma 1.1. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout corps L, le morphisme induit $Y(L) \to X(L)$ est surjectif.*
(ii) *Pour tout fermé $Z \subset X$, il existe un fermé $T \subset Y$ tel que $f(T) \subset Z$ et le morphisme $f|_T^Z$ est birationnel.*

Definition 1.2. — Un morphisme $f : Y \to X$ est appelé une enveloppe(1) si il est propre et satisfait l'une des conditions équivalentes du lemme précédent.

Les enveloppes sont stables par composition et changement de base – c'est évident en considérant la propriété (i) du lemme précédent. Remarquons aussi que pour des morphismes de schémas $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$, si $g \circ f$ est une enveloppe, alors f est une enveloppe.

(1) On dit encore suggestivement que Y est une enveloppe de X.

1.3. — Les enveloppes forment donc les recouvrements d'une topologie de Grothendieck t_{env} sur la catégorie $\mathcal{S}ch$. On appelle *hyper-enveloppe* tout hyper-recouvrement pour cette topologie.

Plus précisément, rappelons les définitions suivantes :
Soit Δ la catégorie simplicale standard et Δ_n la sous-catégorie pleine dont les objets sont les entiers plus petit que n. Un schéma simplicial (resp. schéma simplicial n-tronqué) est un foncteur $\mathcal{X} : \Delta^{op} \to \mathcal{S}ch$ (resp. $\mathcal{X} : \Delta_n^{op} \to \mathcal{S}ch$).

On note $\mathrm{sq}_n : \mathcal{S}ch^{\Delta^{op}} \to \mathcal{S}ch^{\Delta_n^{op}}$ le foncteur de restriction canonique, appelé n-squelette, et cosq_n son adjoint à droite, appelé n-cosquelette.

Si $\mathcal{X}$ est un schéma simplicial, on note $\mathrm{cosq}_n^{\mathcal{X}}$ le foncteur adjoint à droite du foncteur

$$\mathcal{S}ch^{\Delta^{op}}/\mathcal{X} \to \mathcal{S}ch^{\Delta_n^{op}}/\,\mathrm{sq}_n(\mathcal{X})$$

induit par sq_n. Rappelons que pour tout $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{S}ch^{\Delta_n^{op}}/\,\mathrm{sq}_n(\mathcal{X})$,

$$cosq_n^{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = cosq_n(\mathcal{Y}) \times_{\mathrm{cosq}_n \mathrm{sq}_n(\mathcal{X})} \mathcal{X}.$$

Definition 1.4. — On dit qu'un morphisme $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ est une hyperenveloppe si pour tout entier $n \geq 0$, f_n est propre et le morphisme canonique

$$\mathcal{Y}_{n+1} \to \left(\mathrm{cosq}_n^{\mathcal{X}}\,\mathrm{sq}_n(\mathcal{Y})\right)_{n+1}$$

est une enveloppe.

Nous aurons besoin de la construction classique suivante :

Lemma 1.5. — *Soit $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un morphisme de schémas simpliciaux.*
Alors, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{\mathcal{X}} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{f} & \mathcal{X} \end{array}$$

tel que p et q sont des hyperenveloppes et pour tout entier $n \geq 0$, $\tilde{\mathcal{Y}}_n$ et $\tilde{\mathcal{X}}_n$ sont lisses.

Démonstration. — Premier cas : $\mathcal{X}$ est constant de valeur un schéma X et $f = 1_X$. On démontre par induction noethérienne sur X qu'il existe une enveloppe $Y \to X$ tel que Y est lisse.

D'après le théorème d'Hironaka de résolution des singularités, il existe un morphisme $f : X' \to X$ propre birationnel tel que X' est lisse. Soit U l'ouvert de X au-dessus duquel f est un isomorphisme, et V une enveloppe lisse de U. Alors, $X' \sqcup V$ est une enveloppe lisse de X.
Deuxième cas : $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, $f = 1_{\mathcal{X}}$.

On construit par récurrence sur n le terme $\tilde{\mathcal{X}}_n$ du schéma simplicial $\tilde{\mathcal{X}}$ et le morphisme $f_n : \tilde{X}_n \to \mathcal{X}_n$ tel que $\mathrm{sq}_n(f) : \mathrm{sq}_n(\tilde{\mathcal{X}}) \to \mathrm{sq}_n(\mathcal{X})$ qui est une hyperenveloppe n-tronquée.

Si la construction est effectuée pour $n-1$, on considère grâce au premier cas une enveloppe $\pi : Z_n \to \big(\operatorname{cosq}^{\mathcal{X}}_{n-1} \operatorname{sq}_{n-1}(\tilde{\mathcal{X}})\big)_n$ tel que Z_n est lisse et on pose :

$$\tilde{\mathcal{X}}_n = Z_n \sqcup \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \tilde{X}_{n-1}.$$

Pour tout entier $i \in [0, n-1]$, on définit le morphisme de dégénérescence $s_i : \tilde{X}_{n-1} \to \tilde{X}_n$ comme l'inclusion canonique correspondant au i-ème facteur dans la somme ci-dessus.

Pour tout entier $i \in [0, n]$, on définit le morphisme face $d_i : \tilde{X}_n \to \tilde{X}_{n-1}$ de manière unique tel qu'il soit égal à π sur le facteur Z_n et qu'il vérifie les relations simpliciales

$$d_i s_j = \begin{cases} s'_{j-1} d'_i & \text{si } i < j \\ 1_{Y_n} & \text{si } i = j, j+1 \\ s'_j d'_{i-1} & \text{si } i > j \end{cases}$$

le prime indiquant un morphisme du schéma simplicial $\tilde{X}$ déjà construit.

On construit enfin le morphisme $f_n : \tilde{X}_n \to \mathcal{X}_n$. Sur Z_n, il est égal au composé

$$Z_n \xrightarrow{\pi} \big(\operatorname{cosq}^{\mathcal{X}}_{n-1} \operatorname{sq}_{n-1}(\tilde{\mathcal{X}})\big)_n \to \mathcal{X}_n$$

où le morphisme de droite est le morphisme évident. Ceci garantit que $\operatorname{sq}_n(f)$ est une hyperenveloppe. Sur le i-ème facteur dans la somme ci-dessus, il est égal à $s_i f_{n-1}$.
Cas général : On commence par choisir une hyperenveloppe lisse $\tilde{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$. Puis on choisit une hyperenveloppe lisse $\tilde{\mathcal{Y}}$ de $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \tilde{\mathcal{X}}$. Les flèches évidentes conviennent. □

Remark 1.6. — Dans le deuxième cas, la construction est très formelle. Intuitivement, l'étape d'induction se fait en recollant la n-cellule Z_n au schéma simplicial $\mathcal{X}^{(n-1)}$ (engendré par les $n-1$ premières cellules) le long du morphisme π.

2. Complexe de Gersten

2.0.1. Définition. — Si E est un corps, on considère la K-théorie de Milnor de E,

$$K^M_*(E) = T(E^\times)/\{x \otimes (1-x), x \neq 0, 1\}.$$

On considèrera la fonctorialité suivante :

1. Pour $\varphi : L \to E$ une extension de corps, un morphisme $\varphi_* : K^M_n(L) \to K^M_n(E)$ (évident).
2. Pour $\varphi : K \to L$ une extension finie, $\varphi^* : K^M_n(E) \to K^M_n(L)$ qui en degré $n = 1$ coincide avec la norme de L/E. Ce morphisme est le point le plus difficile de la théorie, résolu uniquement dans la thèse de Kato. Remarquons que sans l'existence de ce morphisme, on ne peut pas montrer que $K^M_n(E) = H^n(E, \mathbb{Z}(n))$.
3. Pour (E, v) un corps valué de cors résiduel k, v étant discrète, un morphisme $\partial_v : K^M_n(E) \to K_{n-1}(k)$ qui en degré $n = 1$ est égal à v.

On introduit les notations suivantes :

Definition 2.1. — Soit X un schéma.

1. Pour tout $x \in X$, on pose $K_*^M(x) = K_*^M(\kappa(x))$.
2. Supposons que X est normal connexe. Soit η son point generique et $z \in X$ de codimension 1. Alors, z correspond à une valuation discrète v_z sur le corps des fonctions de X, $\kappa(\eta)$. Grâce au point 3 ci-dessus, on lui associe donc un morphisme :
$$\partial_z^X = \partial_{v_z} : K_*^M(\eta) \to K_*^M(z).$$
3. Soit $x, y \in X$. On note Z l'adhérence réduite de x dans X, et $\tilde{Z}$ la normalisation de Z ; le morphisme canonique $f : \tilde{Z} \to Z$ est fini.

   Supposons que $y \in Z^{(1)}$. Soit $\tilde{Z}_y$ la fibre de f au-dessus de y. Alors, tout point $z \in \tilde{Z}_y$ est de codimension 1 dans $\tilde{Z}$. Pour un tel point z, on note $\varphi_z : \kappa(y) \to \kappa(z)$ le morphisme fini induit par f.

   On pose dans tous les cas :
$$\partial_y^x = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{z \in \tilde{Z}_y} \varphi_z^* \circ \partial_z^{\tilde{Z}} & \text{si } y \in Z^{(1)} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\} : K_*^M(x) \to K_*^M(y).$$

2.2. — Considérons X un schéma de type fini X.

Pour tout entier $p \geq 0$, on pose :
$$C_p(X; K_*^M) = \bigoplus_{x \in X_{(p)}} K_*^M(x).$$

On dispose de la proposition classique suivante :

Proposition 2.3. — *Soit $p \in \mathbb{N}$ un entier.*

Avec les notations introduites ci-dessus, le morphisme
$$d_X^p = \sum_{(x,y) \in X_{(p)} \times X_{(p-1)}} \partial_y^x : C^p(X; K_*^M) \to C^{p+1}(X; K_*^M).$$
est bien définit.

De plus, $d_{p-1}^X \circ d_p^X = 0$.

Le premier à avoir démontré cela est K. Kato, en utilisant la loi de réciprocité généralisée pour les courbes (cf [**Kat86**]). On obtient une autre démonstration en identifiant les différentielles de la suite spectrale du coniveau en cohomologie motivique avec les différentielles introduites ici. Il faut pour cela plonger X dans un schéma lisse Ω (ce que l'on peut faire car l'assertion est locale en X).

Ainsi, on obtient un complexe $C_*(X; K_*^M)$ de groupes abéliens gradués. On note $A_p(X; K_*^M)$ son p-ième groupe d'homologie – suivant la notation de Rost.

Example 2.4. — En degré 0, on obtient $C_p(X; K_*^M)_0 = Z_p(X)$ groupe des cycles dont le support est de dimension p dans X. Si X est de dimension pure p, par définition, l'image de $d_p^X)_0$ est égale aux cycles associés à des diviseurs principaux, soit les diviseurs rationellement équivalents à 0. Ainsi, $A_p(X; K_*^M)_0$ est le groupe de Chow des cycles p-dimensionnels.

2.0.2. Fonctorialité. —

2.5. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme plat, de dimension relative n.

On définit un morphisme

$$f^* : C_p(X; K_*^M) \to C_{p+n}(Y; K_*^M).$$

Soit x un point de X de dimension p d'adhérence Z dans X. Pour tout point $y \in f^{-1}(x)$, on considère le morphisme $\varphi_x^y : \kappa(x) \to \kappa(y)$ induit par f. On définit $f^*)_x^y : K_*M(x) \to K_*^M(y)$ en posant $f^*)_x^y = n.(\varphi_x^y)_*$ où n est la longueur de l'anneau local $\mathcal{O}_{Z \times_X Y, y}$.

On démontre facilement que f^* est compatible aux différentielles d^X et d^Y. De plus, sa fonctorialité résulte de la démonstration classique pour les cycles.

2.6. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme propre.

On définit un morphisme

$$f_* : C_p(Y; K_*^M) \to C_p(X; K_*^M).$$

Soit y un point de Y de dimension p, $x = f(y)$. Si $\varphi_x^y : \kappa(x) \to \kappa(x)$ est finie, on pose $f_*)_x^y = \varphi_x^y)^*$. Les autres composantes sont nulles.

Le fait que f_* est fonctoriel est immédiat. Le fait qu'il forme un morphisme de complexes est le point difficile de cette théorie. Il repose sur la loi de réciprocité (généralisée) pour les courbes, qui en est un cas particulier :

***Theorem 2.7* (Kato).** — *Soit C/k une courbe propre de morphisme structurel p et de corps des fonctions E. Alors la suite*

$$K_*^M(E) \xrightarrow{d_0^C} \bigoplus_{x \in X_{(0)}} K_*^M(\kappa(x)) \xrightarrow{p_*} K_*^M(k)$$

est un complexe.

Remark 2.8. — Ce théorème est évidemment une généralisation de la loi de réciprocité classique qui concerne la partie graduée $E^\times \to Z_0(C) \to \mathbb{Z}$. Comme k est parfait, on peut obtenir une démonstration de ce théorème à partir de l'invariance par homotopie de la cohomologie motivique grâce à un calcul dû à Rost.

Signalons pour terminer que l'on obtient suivant la même démonstration que pour les cycles une formule de changement de base entre pushouts propres et pullback plats.

2.9. — Soit X un schéma et $Z \subset X$ un fermé. On pose $U = X - Z$ et on note $i : Z \to X$, $j : U \to X$ les immersions évidentes. Remarquons que formellement,

$$C_p(X; K_*^M) = C_p(U; K_*^M) \oplus C_p(Z; K_*^M).$$

De plus, on obtient une suite exacte courte de complexes

$$0 \to C_*(Z; K_*^M) \xrightarrow{i_*} C_*(X; K_*^M) \xrightarrow{j^*} C_*(U; K_*^M) \to 0.$$

On peut remarquer suivant Rost que dans la suite longue d'homologie associée, le bord est induit par le morphisme de complexes

$$\partial_Z^U : C_p(U; K_*^M) \to C_{p-1}(Z; K_*^M)$$

qui est égal à la somme des ∂_z^x, définit dans 2.1 pour X, où $(x,z) \in U \times Z$.

2.10. — Soit X un schéma, $Z, T \subset X$ des parties fermées telles que $X = Z \cup T$.
Considérons les immersions fermées évidentes :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & Z \arrow[dr, "i"] & \\ Z \cap T \arrow[ur, "k"] \arrow[dr, "l"'] & & X. \\ & T \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

On obtient formellement une suite exacte courte de complexes

$$0 \to C_*(Z \cap T; K_*^M) \xrightarrow{k_* - l_*} C_*(Z; K_*^M) \oplus C_*(T; K_*^M) \xrightarrow{i_* + j_*} C_*(X; K_*^M) \to 0$$

qui induit donc une suite exacte longue en homologie, "suite de Mayer-Vietoris" associée au recouvrement fermé $X = Z \cup T$.

2.0.3. Descente par rapport aux enveloppes. —

2.11. — Soit $\mathcal{X}$ un schéma simplicial (dont les faces sont des morphismes propres). On en déduit un bicomplexe

$$\ldots \to C_*(\mathcal{X}_{n+1}; K_*^M) \xrightarrow{\sum_i (-1)^i \delta_{i*}} C_*(\mathcal{X}_n; K_*^M) \ldots \to C_*(\mathcal{X}_0; K_*^M).$$

Pour abréger, on notera $C_*(\mathcal{X}; K_*^M)$ le complexe total associé à ce bicomplexe.
Le résultat suivant est essentiellement dû à Gillet (cf [**Gil84**, th. 4.3]) – bien que celui-ci l'ai démontré pour la K-théorie à la place de la K-théorie de Milnor.

Theorem 2.12. — *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des schémas simpliciaux et $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ une hyper-enveloppe.*
Alors, le morphisme induit

$$C_*(\mathcal{Y}; K_*^M) \xrightarrow{\pi_*} C_*(\mathcal{X}; K_*^M)$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — *Premier cas* : On considère une enveloppe $p : Y \to X$ et on suppose que $\mathcal{Y} = \mathrm{cosq}_0^X(Y)$, $\mathcal{X} = X$ et $\pi = \mathrm{cosq}_0(p)$.
Commençons par rappeler le lemme suivant, obtenu grâce à un petit calcul bien connu :

Lemma 2.13. — *Supposons que le morphisme $p : Y \to X$ admet une section $s : X \to Y$. Posons $\sigma = \mathrm{cosq}_0^X(s) : X \to \mathcal{Y}$.*
Alors, le morphisme

$$\pi_* : C_*(\mathcal{Y}; K_*^M) \to C_*(X; K_*^M)$$

est une équivalence d'homotopie avec quasi-inverse

$$\sigma_* : C_*(X; K_*^M) \to C_*(\mathcal{Y}; K_*^M).$$

Remarquons déjà que $\pi \circ \sigma = 1$. Le calcul bien connu mentionné ci-dessus donne une équivalence d'homotopie entre $\sigma \circ \pi$ est l'identité. La remarque est que l'on peut étendre cette équivalence d'homotopie aux complexes totaux associés au bicomplexe $C^*(\mathcal{Y}; K_*^M)$ – en faisant attention aux signes.
On peut alors démontrer notre premier cas par induction noethérienne sur X.

Lorsque X est réduit à un point, le morphisme p admet une section puisque c'est une enveloppe. Le lemme précédent permet de conclure.

Supposons que X est non réduit à un point. Si X n'est pas irréductible, on peut l'écrire $X = Z \cup T$. Le résultat est vrai pour $Y_T \to T$, $Y_Z \to Z$ et $Y_{Z\cap T} \to Z \cap T$. La suite exacte de complexes

$$0 \to C_*(Z \cap T; K_*^M) \to C_*(Z; K_*^M) \oplus C_*(T; K_*^M) \to C_*(X; K_*^M) \to 0$$

nous permet donc de conclure puisqu'elle est compatible aux pushouts propres.

On est donc ramené au cas où X est irréductible. On peut le supposer réduit, donc intègre, par définition du complexe de Gersten. Il existe alors un ouvert dense U de X tel que le morphisme $p' : V = p^{-1}(U) \to U$ induit par p admet une section. Le lemme précédent montre que le résultat est vrai pour p'. Par induction noethérienne, il est vrai pour $Y_Z \to Z$. La suite exacte de complexes

$$0 \to C_*(Z; K_*^M) \xrightarrow{i_*} C_*(X; K_*^M) \xrightarrow{j^*} C_*(U; K_*^M) \to 0$$

permet à nouveau de conclure puisqu'elle est compatible aux pushouts propres.

Cas général : Posons $\mathcal{Y}[i] = \operatorname{cosq}_i^{\mathcal{X}} \operatorname{sq}_i(\mathcal{Y})$ pour $i \geq 0$ de manière à obtenir une tour

$$\mathcal{Y} \to \dots \mathcal{Y}[i] \xrightarrow{\tau_i} \mathcal{Y}[i-1] \to \dots \mathcal{Y}[0] \xrightarrow{\tau_0} \mathcal{X}$$

de factorisations de π.

D'après le premier cas, le morphisme

$$\tau_{0*} : A_p(\mathcal{Y}[0]; K_*^M) \to A_p(\mathcal{X}; K_*^M)$$

est un isomorphisme pour tout $p \geq 0$.

Par ailleurs, pour tout $j \geq i$, $(\mathcal{Y}[i])_j = \mathcal{Y}_j$. De la suite spectrale d'un complexe double (convergente car le complexe de Gersten est borné par la dimension de X), on déduit que le morphisme canonique

$$A_p(\mathcal{Y}; K_*^M) \to A_p(\mathcal{Y}[i]; K_*^M)$$

est un isomorphisme si $p < i$. Il suffit donc de démontrer que pour tout $i > 0$, et pour tout $p \geq 0$,

$$\tau_{i*} : A_p(\mathcal{Y}[i]; K_*^M) \to A_p(\mathcal{Y}[i-1]; K_*^M)$$

est un isomorphisme. Pour conclure, on applique le lemme suivant qui est l'annalogue du lemme 3.3.3.2 de [**SGA4**, Vbis] :

Lemma 2.14. — *Considérons un entier $n \geq 0$. Soit $f : \mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas simpliciaux sur $\mathcal{X}$ tel que :*

(i) *Le morphisme $\mathcal{Y} \to \operatorname{cosq}_n^{\mathcal{X}} \operatorname{sq}_n \mathcal{Y}$ est un isomorphisme.*
(ii) *Le morphisme $\mathcal{Y}' \to \operatorname{cosq}_n^{\mathcal{X}} \operatorname{sq}_n \mathcal{Y}'$ est un isomorphisme.*
(iii) *Pour tout entier $i \leq n$, $f_i : \mathcal{Y}'_i \to \mathcal{Y}_i$ est un isomorphisme.*
(iv) *Le morphisme f_{n+1} est une enveloppe.*

Alors, le morphisme induit

$$f_* : A_*(\mathcal{Y}'; K_*^M) \to A_*(\mathcal{Y}; K_*^M)$$

est un isomorphisme.

On commence par montrer que pour tout $p > n+1$, f_p est une enveloppe (notamment grâce à (i) et (ii)). On en déduit qu'il suffit de montrer le résultat après le changement de base suivant $(\mathcal{Y}'/\mathcal{Y})^p \to \mathcal{Y}$ où $(\mathcal{Y}'/\mathcal{Y})^p$ désigne le produit fibré p-uple de $\mathcal{Y}'$ sur $\mathcal{Y}$. Dans ce cas, le morphisme f_{n+1} admet une section et on peut conclure par le même genre de calcul que celui évoqué dans le lemme 2.13. □

3. Théorème principal: descente motivique

Soit $\mathcal{V}$ la catégorie des schémas propres et lisses (ou projectifs lisses). Soit $\mathcal{C}'$ la catégorie des schémas propres et lisses avec pour morphismes les correspondances modulo équivalence rationelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = CH^{d_Y}(X \times Y)$$

pour Y connexe de dimension d_Y. Notons qu'on utilise ici des conventions homologiques. On dispose donc du foncteur covariant $\gamma : \mathcal{V} \to \mathcal{C}'$ qui à un morphisme $f : X \to Y$ associe son graphe vu comme un cycle modulo équivalence rationelle. Rappelons le lemme évident suivant :

Lemma 3.1. — *Soit $f : X \to Y$ et $\alpha \in CH^{d_X}(Z \times X)$ une correspondance.*
Alors $f \circ \alpha = (1_Z \times f)_*(\alpha)$.

Enfin, si $\mathcal{X}$ est un schéma simplicial $\mathcal{X}$ de $\mathcal{V}$, on notera $\gamma(\mathcal{X})$ le complexe de $\mathcal{C}'$ associé à l'objet simplicial évident. Le résultat de [**GS96**] le plus intéressant – qui préfigure ceux de Voevodsky – est le théorème suivant :

Theorem 3.2. — *Soit $\mathcal{X}$ un objet simplicial de $\mathcal{V}$.*
Supposons que pour tout $V \in \mathcal{V}$, $C_*(V \times \mathcal{X}; K_*^M)$ est acyclique.
Alors, le complexe $\gamma(\mathcal{X})$ est contractile.

Démonstration. — Notons $d_n : X_n \to X_{n-1}$ les différentielles du complexe $\gamma(\mathcal{X})$. On procède par induction sur l'entier $n \geq 0$ pour construire des correspondances (de degré homologique 0)

$$h_n : X_n \to X_{n+1}$$

telles que $h_{n-1}d_n + d_{n+1}h_n = 1_{X_n}$. □

4. Appendice: Filtration par coniveau

Definition 4.1. — Soit X un schéma. Un drapeau sur X est une suite décroissante $(Z^p)^{p \in \mathbb{N}}$ de fermés de X tels que pour tout entier p, Z^p est de codimension supérieure à p dans X. On note $\mathcal{D}_X$ l'ensemble des drapeaux de X, ordonné par inclusion termes à termes.

Il est immédiat que $\mathcal{D}_X$ est filtrant.

Definition 4.2. — Soit X un schéma lisse. On définit une filtration croissante de $M(X)$ dans la catégorie des pro-objets de $DM_{gm}(k)$ dont le p-ième cran est

$$M^{(p)}(X) = \tilde{\varprojlim_{p\in\mathbb{N}}} M(X - Z^p).$$

4.3. — Dans $DM_{gm}(k)$, si U est un ouvert d'un schéma lisse, on note $M(X/U)$ le cone du morphisme canonique $M(U) \to M(X)$.

Considérons un schéma lisse X est lisse. On pose :

$$M^{(p+1/p)}(X) = \tilde{\varprojlim_{p\in\mathbb{N}}} M(X - Z^{p+1}/X - Z^p).$$

On en déduit des pro-triangles distingués :

$$\begin{tikzcd} M(F^pX) \arrow[r, "\alpha_p"] & M(F^{p+1}X) \arrow[r, "\beta_p"] & M^{(p+1/p)}(X) \arrow[r, "\gamma_p"] \arrow[drr, "\delta_p"] & M(F^pX)[1] \arrow[d, equal] & \\ & & M(F^{p-1}X) \arrow[r] & M(F^pX)[1] \arrow[r] & M^{(p/p-1)}(X) \end{tikzcd}$$

Si l'on considère les pro-motifs bigradués D et E tels que :

$$D_{p,q} = M^{(p)}(X)[-p-q]$$
$$E_{p,q} = M^{(p+1/p)}(X)[-p-q]$$

on déduit des triangles distingués ci-dessus un couple exact (conventions "homologiques")

$$D \xrightarrow[(1,-1)]{\alpha} D \xrightarrow[(-1,1)]{\beta} E \xrightarrow[(0,-1)]{\gamma} D$$

Le bord associé à ce couple exact est le morphisme $d = \beta \circ \gamma$ de bidegré $(-1, 0)$. On associe à ce couple exact un complexe de la catégorie additive $pro - DM_{gm}(k)$:

$$\dots E_{p,q} \xrightarrow{d_{p,q}} E_{p-1,q} \dots$$

4.4. — Soit E/k une extension de corps, de degré de transceandance fini. Le motif générique associé à E est le pro-objet de $DM_{gm}(k)$ suivant:

$$M(E) = \tilde{\varprojlim_{A\subset E}} M(\mathrm{Spec}(A))$$

où A parcout l'ensemble ordonné filtrant des sous-k-algèbres de E telle que $\mathrm{Spec}(A)$ est lisse.

Le point clé concernant la filtration par coniveau est le réseultat suivant, qui ne repose que sur le théorème de pureté et un raisonnement facile sur la lissité générique :

Lemma 4.5. — *Pour tout schéma lisse X,*

$$M^{(p+1/p)}(X) = \tilde{\prod_{x\in X^{(p)}}} M(\kappa(x))(p)[2p]$$

où $X^{(p)}$ désigne l'ensemble des points de codimension p de X, et $\kappa(x)$ le corps résiduel de x.

Appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(.,\mathbb{Z}(n))$ à ce couple exact, on en déduit donc une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x\in X^{(p)}} H^{q-p}(\kappa(x),\mathbb{Z}(n-p)) \Rightarrow H^{p+q}(X,\mathbb{Z}(n)).$$

Si l'on regarde la ligne $q = n$ du terme E_1, on obtient donc un complexe dont le p-ième terme est $\bigoplus_{x\in X^{(p)}} K^M_{n-p}(\kappa(x))$. C'est le complexe de Gersten (en notations cohomologiques) à coefficients dans la K-théorie de Milnor.

Références

[Gil84] Henri Gillet. Homological descent for the K-theory of coherent sheaves. In *Algebraic K-theory, number theory, geometry and analysis (Bielefeld, 1982)*, volume 1046 of *Lecture Notes in Math.*, pages 80–103. Springer, Berlin, 1984.

[GS96] H. Gillet and C. Soulé. Descent, motives and K-theory. *J. Reine Angew. Math.*, 478:127–176, 1996.

[Kat86] Kazuya Kato. Milnor K-theory and the Chow group of zero cycles. In *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, volume 55 of *Contemp. Math.*, pages 241–253. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[SGA4] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, volume 269,270,305. Springer, 1972-73.

Décembre 2007

F. Déglise