

Espaces de modules à la Dwyer-Kan

Frédéric Déglise

Séminaire sur les espaces de modules de
spectres en anneaux

22 au 26 janvier 2007

Organisation : B. Fresse, G. Powell

INTRODUCTION

On note CAT la catégorie des petites catégories. Dans cet exposé, sauf mention explicites du contraire, toutes les catégories sont petites.

Par contre, on ne suppose pas que les catégories de modèles sont petites, on suppose seulement que leur catégorie homotopique est petite. Quand on parle d'une catégorie de modèles $\mathbf{M}$ en ce sens, on fixe par convention un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes de sa catégorie homotopique et quand on parle d'un espace de $\mathbf{M}$, on désigne un élément de cet ensemble. Enfin, on identifie abusivement la catégorie $\mathbf{M}$ avec la sous-catégorie pleine de $\mathbf{M}$ ayant pour ensemble d'objets les espaces. Enfin par convention, toutes les catégories de modèles (resp. catégories des modèles simpliciales) sont fermées.

On travaillera beaucoup avec des *catégories simpliciales*. Remarquons que ce sont des objets simpliciaux de CAT particuliers : leurs objets ne forment pas un objet simplicial, ou plutôt, ils forment un ensemble simplicial discret (que l'on confond avec ses 0-simplexes). Il y a une notion d'*équivalences faibles* évidente sur les catégories simpliciales : demander que tous les ensembles simpliciaux de morphismes soient faiblement équivalents.

On note $\mathcal{S}$ la catégorie des objets simpliciaux, et $\Delta^{op}\mathcal{S}$ la catégorie des ensembles bisimpliciaux.

Si $X_{*,*}$ est un ensemble bisimplicial, l'ensemble diagonal $\text{diag}(X_{*,*})$ est l'ensemble simplicial qui en degré n vaut $X_{n,n}$ avec pour faces et dégénérescences les composées évidentes.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	2
1. Définition	3
1.1. Nerfs	3
1.2. Espaces de modules	3
2. Décomposition canonique	4
2.1. Monoïde des auto-équivalences	4
2.2. Arguments de la démonstration principale	5
3. Localisation simpliciale à la Dwyer-Kan	6
4. Quelques exemples supplémentaires	11
Références	11

1. DÉFINITION

1.1. **Nerfs.** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On rappelle que le *nerf* de $\mathcal{C}$ est l'ensemble simplicial qui en degré n est égale à :

$$(N\mathcal{C})_n = \{X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \mid f_i \in Fl(\mathcal{C})\}.$$

Les applications faces sont obtenues en insérant l'identité et les applications dégénérescence en supprimant une flèche.

On a donc un foncteur :

$$N : \text{CAT} \rightarrow \mathcal{S}$$

Exemple 1.1. Si M est un monoïde, on note BM l'ensemble simplicial qui est égal au nerf de la catégorie avec un seul objet et pour ensemble de flèches M , la composition étant donnée par la loi de monoïde.

Rappelons qu'on a la formule $B(M^+) = \Omega BM$, où M^+ est la complétion en groupe de M .

Une catégorie simpliciale est encore un objet simplicial de CAT . Comme on l'a fait au cours du séminaire, on supposera toujours que les objets d'une catégorie simpliciale forment un ensemble simplicial discret, que l'on confrontera avec l'ensemble des 0 simplexes.

Le foncteur nerf N se prolonge canoniquement aux objets simpliciaux. En particulier, il associe à une catégories simpliciale un ensemble bisimplicial. On note N' ce prolongement.

A toute catégorie simpliciale $\mathcal{C}$, on associe ainsi l'ensemble simplicial $\text{diag}(N'\mathcal{C})$. On le note simplement $N\mathcal{C}$.

De manière analogue, pour tout monoïde simplicial M_* , on pose :

$$BM_* = \text{diag}(B'M_*).$$

1.2. **Espaces de modules.** Soit $\mathbf{M}$ une catégorie de modèles. On note $\mathcal{W}$ la sous-catégorie de $\mathbf{M}$ ayant mêmes objets que $\mathbf{M}$ avec pour flèches les équivalences faibles.

Si X et Y sont deux espaces, on dit que X et Y sont faiblement équivalents (ie on même type d'homotopie) s'ils sont isomorphes dans la catégorie homotopique.

Définition 1.2. Une catégorie d'équivalences faibles dans $\mathbf{M}$ est une sous-catégorie $\mathcal{E} \subset \mathbf{M}$ telle que :

- (1) Pour tous espaces X et Y , si X est un objet de $\mathcal{E}$ et Y est équivalent à X , Y est un objet de $\mathcal{E}$.
- (2) Soit $f : X \rightarrow Y$ une équivalence faible telle que X et Y sont des objets de $\mathcal{E}$. Alors f est un flèche de $\mathcal{E}$.

La catégorie $\mathcal{W}$ est la plus grosse catégorie d'équivalences dans $\mathbf{M}$.

Définition 1.3. Un *espace de modules* (à la Dwyer-Kan) est un ensemble simplicial de la forme $N\mathcal{E}$ pour une catégorie d'équivalences faibles $\mathcal{E}$ dans une catégorie de modèles $\mathbf{M}$.

L'espace de modules d'une catégorie de modèles $\mathbf{M}$ avec équivalences faibles $\mathcal{W}$ est l'ensemble simpliciale $\mathcal{M}(\mathbf{M}) = N\mathcal{W}$.

Exemple 1.4. Soit X un objet de $\mathbf{M}$. Soit $\mathcal{E}_X$ la plus petite catégorie d'équivalences faibles dans $\mathbf{M}$ dont les objets contiennent X . On définit l'espace de modules de X :

$$\mathcal{M}(X) = N\mathcal{E}_X.$$

On remarquera que par définition, $\mathcal{M}(X)$ est connexe. Par ailleurs, $\mathcal{M}(X) \subset N(\mathbf{M})$ est une composante connexe.

Fixons une catégorie de modèles $\mathbf{M}$. Considérons deux espaces X et Y .

Considérons la catégorie $\mathcal{W}(X, Y)$ dont les objets sont les suites de flèches

$$X \xleftarrow{\sim} Z_1 \rightarrow Z_2 \xleftarrow{\sim} Y$$

telle que les deux flèches allant vers la gauche sont des équivalences faibles. Les morphismes sont donnés par les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_{0,1} & \longrightarrow & Z_{0,2} \\ & \swarrow \sim & & & \nwarrow \sim \\ X & & & & & Y \\ & \nwarrow \sim & & & \swarrow \sim \\ & & Z_{1,1} & \longrightarrow & Z_{1,2} \end{array} \quad \begin{array}{c} f \downarrow \\ g \downarrow \end{array}$$

tels que f et g soient des équivalences faibles.

On définit suivant Goerss-Hopkins l'espace de modules :

$$\mathcal{M}_{\text{Hom}}(X, Y) = N\mathcal{W}(X, Y).$$

On remarquera qu'on n'est pas tout à fait dans le cadre de la définition ci-dessus.

2. DÉCOMPOSITION CANONIQUE

2.1. Monoïde des auto-équivalences. On considère une catégorie simpliciale $\mathcal{C}$ quelconque, et on note $\text{map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'ensemble simplicial des morphismes entre deux objets X et Y .

La loi de composition de la catégorie simpliciale $\mathcal{C}$ induit une loi de composition sur la catégorie $\pi_0(\mathcal{C})$ ayant mêmes objets que $\mathcal{C}$ et pour morphismes de X vers Y l'ensemble $\pi_0 \text{map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Définition 2.1. Soit X un objet de $\mathcal{C}$.

Soit $\mathcal{P}_X$ l'ensemble des composantes connexes T de $\text{map}_{\mathcal{C}}(X, X)$ dont la classe dans $\pi_0 \text{map}_{\mathcal{C}}(X, X)$ est un isomorphisme dans $\pi_0(\mathcal{C})$ - i.e. ou tout simplement est inversible.

On définit le monoïde simplicial des autoéquivalences de X par la formule

$$\text{aut}_{\mathcal{C}}(X) = \sqcup_{T \in \mathcal{P}_X} T.$$

Par définition, $\text{aut}(X)$ est un sous-monoïde de $\text{map}_{\mathcal{C}}(X, X)$.

Exemple 2.2. Soit $\mathbf{M}$ une catégorie de modèles simpliciale.

Pour tout espace X fibrant cofibrant, $\text{aut}_{\mathbf{M}}(X)$ est l'ensemble des n -simplexes de la forme $f : \Delta[n] \otimes X \rightarrow X$ où f est une équivalence faible.

Cette description est en général fautive lorsque X n'est pas fibrant et cofibrant.

Dans l'exemple précédent, le foncteur $\text{aut}_{\mathbf{M}}$ est un foncteur de Quillen à droite. On peut donc le dériver.

Définition 2.3. Soit $\mathbf{M}$ une catégorie de modèle simpliciale.

Pour tout espace X , le monoïde dérivé des équivalences faibles de X est le monoïde simplicial $\mathbf{Raut}_{\mathbf{M}}(X)$.

Souvent, on supprime l'index $\mathbf{M}$ dans la notation ci-dessus.

On rappelle que le foncteur $\text{map} : \mathbf{M}^{op} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ est un foncteur de Quillen à droite (structure de catégorie de modèles évidentes à gauche). On peut donc le dériver à droite en posant

$$\mathbf{Rmap}(X, Y) = \text{map}(X^c, Y^f),$$

où X^c (resp. Y^f) est un remplacement cofibrant (resp. fibrant) de X (resp. Y).

Remarque 2.4. Rappelons que $\pi_i \mathbf{Rmap}(X, Y) = [S^i \otimes X, Y]$. Ainsin, $\mathbf{Rmap}(X, Y)$ a le bon type d'homotopie alors que c'est faux en général pour $\text{map}(X, Y)$.

Si l'on dispose d'un foncteur de remplacement fibrant et d'un foncteur de remplacement cofibrant, par composition on en déduit un foncteur de remplacement fibrant/cofibrant ϕ . Alors, le foncteur $\text{map}(\phi, \phi)$ définit une structure de catégorie simpliciale "dérivée" sur la catégorie $\mathbf{M}$ et le monoïde dérivé des autoéquivalences dans la définition précédente correspond au monoïde des autoéquivalences pour cette structure simpliciale modifiée.

Le théorème principal de la théorie de Dwyer-Kan est le suivant (cf [4, 2.3]) :

Théorème 2.5. Soit $\mathbf{M}$ une catégorie de modèles simpliciale fermée (admettant des factorisations fonctorielles).

Alors :

- (1) L'application $\mathbf{M} \rightarrow \mathcal{S}, X \mapsto \mathcal{M}(X)$ induit une bijection des classes d'isomorphismes de $\text{Ho}(\mathbf{M})$ dans $\pi_0 \mathcal{M}(\mathbf{M})$.
- (2) Pour tout espace X , $\mathcal{M}(X)$ a le type d'homotopie de $B(\mathbf{Raut}(X))$.

De façon plus concise,

$$\mathcal{M}(\mathbf{M}) \simeq \bigsqcup_{[X], X \text{ espace}} B(\mathbf{Raut}(X)).$$

2.2. Arguments de la démonstration principale.

Proposition. Soit $\mathbf{M}$ une catégorie de modèles simpliciale, $\mathcal{W}$ ses équivalences faibles.

Soit $L^{\mathbf{H}}\mathbf{M}$ la localisation hamac de $(\mathbf{M}, \mathcal{W})$. Alors, pour tout espace X , $\text{aut}_{L^{\mathbf{H}}\mathbf{M}}(X)$ a le type d'homotopie de $\mathbf{Raut}_{\mathbf{M}}(X)$.

Proposition. Soit $\mathbf{M}$ une catégorie de modèles simpliciale admettant des factorisations fonctorielles, $\mathcal{W}$ ses équivalences faibles.

Soit $L^{\mathbf{H}}\mathcal{W}$ (resp. $L^{\mathbf{H}}\mathbf{M}$) la localisation hamac de $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ (resp. $(\mathbf{M}, \mathcal{W})$). Alors, pour tout espace X , l'inclusion canonique

$$L^{\mathbf{H}}\mathcal{W}(X, X) \rightarrow L^{\mathbf{H}}\mathbf{M}(X, X) = \text{map}_{L^{\mathbf{H}}\mathbf{M}}(X, X)$$

se factorise en une équivalence faible

$$L^{\mathbf{H}}\mathcal{W}(X, X) \xrightarrow{\epsilon} \text{aut}_{L^{\mathbf{H}}\mathbf{M}}(X).$$

La localisation simpliciale et la localisation hamac ont même type d'homotopie.

Proposition. Soit $\mathcal{W}$ une catégorie, $L\mathcal{W}$ sa localisation simpliciale. On suppose que $N\mathcal{W}$ est connexe. Alors :

- (1) Pour tout objet X de $\mathcal{W}$, $L\mathcal{W}(X, X)$ est un groupoïde.
- (2) L'ensemble simplicial $B(L\mathcal{W}(X, X))$ a le même type d'homotopie que $N\mathcal{W}$.

Soit $\mathcal{E}_X$ la plus petite catégorie d'équivalences faibles contenant l'objet X :

$$B\text{Raut}(X) \sim B\text{aut}_{L\mathbf{HM}}(X) \sim BL^H\mathcal{E}_X(X, X) \sim BL\mathcal{E}_X(X, X) \sim N\mathcal{E}_X = \mathcal{M}(X)$$

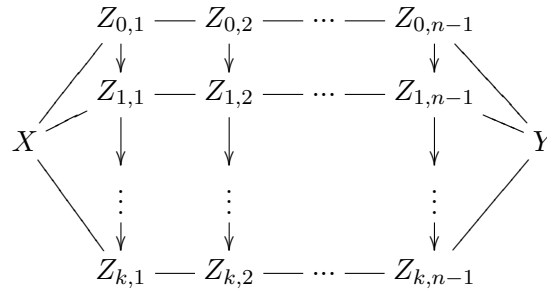
3. LOCALISATION SIMPLICIALE À LA DWYER-KAN

Comme on l'a déjà remarqué, la structure simpliciale d'une catégorie de modèles simpliciale ne rend pas *a priori* compte de toute la "structure" de sa catégorie homotopique (cf remarque 2.4).

Dwyer et Kan ont entrepris de corriger ce défaut dans les années 1980 en introduisant la *localisation simpliciale* d'une catégorie équipée d'"équivalences faibles". Leur but était plus généralement de comprendre la structure d'une catégorie localisée. On sait bien comment sont fabriqués les morphismes d'une catégorie localisée, mais la définition abstraite donne très peu de renseignements sur les morphismes ou la manière dont ils se composent.

Fixons une catégorie $\mathcal{C}$ et une sous-catégorie $\mathcal{W}$ ayant les mêmes objets. Soit X et Y des objets de $\mathcal{C}$.

Un *hamac réduit de largeur k et de longueur n entre X et Y* est une suite de flèches



telle que :

- (1) Toutes les flèches verticales sont dans W .
- (2) Toutes les arêtes d'une même colonne sont des flèches qui vont dans la même direction. Si elles vont vers la gauche, elles sont dans W .
- (3) Les flèches de deux colonnes adjacentes ne vont pas dans la même direction.
- (4) Aucune colonne ne contient que des identités.

Un hamac qui satisfait les deux premières propriétés seules peut toujours être mis sous forme réduite par l'une des deux opérations : composer des flèches de deux colonnes adjacentes, supprimer les flèches d'une colonne lorsqu'elle ne contient que des identités.

Suivant Dwyer-Kan, on note $L^H\mathcal{C}(X, Y)_k$ l'ensemble des hamacs de largeur k et de longueur quelconque.

On peut définir des opérateurs faces (resp. dégénérescences) par rapport à l'indice k - la largeur - en omettant (resp. répétant) une des lignes. Le hamac ainsi obtenu n'est peut-être pas réduit, mais on le remplace aussitôt par le hamac réduit canoniquement associé.

Finalement, on peut définir une loi de composition sur les hamacs composables de telle manière à obtenir une catégorie simpliciale notée $L^H(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{C}$ et les morphismes sont les hamacs.

Définition 3.1. On appelle $L^H(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ la localisation hamac de $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$, suivant Dwyer-Kan, [1, 2.1] (même définition dans [2, 3.1]).

On la note parfois $L^H\mathcal{C}$ lorsque $\mathcal{W}$ est clair suivant le contexte.

Le lemme suivant est maintenant un exercice facile :

Lemme 3.2. Avec les hypothèses ci-dessus, $\pi_0 L^H(\mathcal{C}, \mathcal{W}) = \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

3.0.1. *Première étape.* Un des résultats principaux de Dwyer et Kan qui montrent que cette construction est très fine est le théorème suivant (cf [2, 4.4]) :

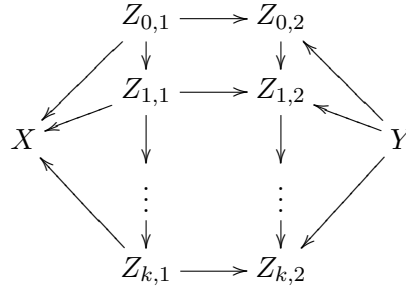
Théorème 3.3. Soit $\mathbf{M}$ une catégorie de modèles simpliciale.

Alors, pour tous espaces X et Y , $L^H\mathbf{M}(X, Y)$ a le type d'homotopie de $\mathbf{Rmap}(X, Y)$.

En termes conceptuels, la catégorie simpliciale $L^H\mathbf{M}$ est faiblement équivalente dans la catégorie des catégories simpliciales à la catégorie simpliciale dérivée de $\mathbf{M}$. Cette affirmation n'a de sens que si la catégorie de modèles admet des résolutions fonctorielles. Par contre, la construction de Dwyer et Kan a toujours un sens, et pour être compliquée, elle est plus naturelle.

Démonstration. On fixe X et Y . On peut supposer que X (resp. Y) est cofibrant (resp. fibrant).

Le point clé pour ce théorème est de considérer l'espace de modules $\mathcal{M}(X, Y)$. Rappelons que ses k -simplexes sont de la forme



où les flèches verticales et les flèches allant de gauche à droite sont des équivalences faibles. Autrement dit, ces simplexes sont des hamacs (non nécessairement réduits).

On a donc un morphisme de réduction évident

$$\mathcal{M}_{\text{Hom}}(X, Y) \rightarrow L^{\text{H}}\mathbf{M}(X, Y).$$

Si $\mathbf{M}$ admet des factorisations fonctorielles, on montre suivant Dwyer-Kan que cette flèche est une équivalence faible (cf [1, 8.4] et [1, 6.2]). La raison intuitive est que tout hamac est homotope à un hamac sous la forme ci-dessus, en utilisant les factorisations fonctorielles. Dwyer et Kan parlent de "calcul des fractions à homotopie près" (homotopy calculus of fractions, [1, par. 6]).

Si l'on veut se passer des factorisations fonctorielles, Dwyer et Kan donnent un argument quitte à restreindre la catégorie de hamacs $\mathcal{M}_{\text{Hom}}(X, Y)$ en ne considérant que les hamacs pour lesquels les flèches de la première (resp. deuxième) colonne sont des fibrations (resp. cofibrations) - cf [2, 8.1].

Il reste ensuite à montrer que $\mathcal{M}_{\text{Hom}}(X, Y)$ a le type d'homotopie de $\text{map}(X, Y)$. Dwyer et Kan introduisent une résolution cosimpliciale (co-fibrante) X^* de X , une résolution simpliciale (fibrante) Y_* de Y (cf [2, 4.3]). Il doit être assez formel¹ que $\text{map}(X, Y)$ a le type d'homotopie de $\text{diag Hom}_{\mathbf{M}}(X^*, Y_*)$.

Ensuite, il faut remarquer que $\mathcal{M}_{\text{Hom}}(X, Y)$ et $\text{diag Hom}_{\mathbf{M}}(X^*, Y_*)$ s'expriment comme des limites homotopiques par rapport à deux catégories dont l'une est cofinale dans l'autre. $\square$

Corollaire 3.4. *Sous les hypothèses du théorème précédent, pour tout espace X , $\text{aut}_{L^{\text{H}}\mathbf{M}}(X)$ a le type d'homotopie de $\mathbf{R aut}_{\mathbf{M}}(X)$.*

Il faut juste remarquer que les équivalences faibles dégagées dans la preuve précédente sont compatibles avec les isomorphismes canoniques

$$\pi_0(L^{\text{H}}\mathbf{M}(X, X)) \simeq [X, X], \pi_0(\mathbf{R map}(X, X)) \simeq [X, X].$$

3.0.2. *Deuxième étape.* Le résultat suivant (cf [1, 6.4]) est moins difficile que le précédent, mais repose sur un des arguments utilisés.

Proposition 3.5 (Dwyer-Kan). *Soit $\mathbf{M}$ une catégorie de modèles simpliciale (admettant des factorisations fonctorielles), $\mathcal{W}$ sa sous-catégorie des équivalences faibles.*

Soit $L^{\text{H}}\mathcal{W}$ (resp. $L^{\text{H}}\mathbf{M}$) la localisation hamac de $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ (resp. $(\mathbf{M}, \mathcal{W})$). Alors, pour tout espace X , l'inclusion canonique

$$L^{\text{H}}\mathcal{W}(X, X) \rightarrow L^{\text{H}}\mathbf{M}(X, X) = \text{map}_{L^{\text{H}}\mathbf{M}}(X, X)$$

se factorise en une équivalence faible

$$L^{\text{H}}\mathcal{W}(X, X) \xrightarrow{\epsilon} \text{aut}_{L^{\text{H}}\mathbf{M}}(X).$$

Le fait que l'application se factorise en ϵ est tautologique. Le fait que ϵ est une équivalence faible résulte encore d'un *calcul des fractions à homotopie près* (cf [1, 6.1]), qui peut se faire parce qu'on a une catégorie de modèle avec des factorisation à homotopie près. Pour faire ce calcul suivant [1], on

¹Mais je n'ai pas pu trouver la démonstration dans [2]. Ce fait est pourtant affirmé implicitement dans la preuve du théorème dont on s'occupe ici (cf [2, 7.2] qui contient la preuve de [2, 4.4]).

a besoin de l'existence d'une factorisation fonctorielle dans la catégorie de modèles².

3.0.3. *Dernière étape.* Cette dernière étape s'obtient en fait par la conjonction de deux résultats de Dwyer et Kan ([2, 2.2] et [3, 5.5]). Donnons l'énoncé précis :

Proposition 3.6. *Soit $\mathcal{W}$ une catégorie telle que $N\mathcal{W}$ est connexe. Soit $L^H\mathcal{W}$ la localisation hamac de $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$.*

Alors pour tout objet X de $\mathcal{W}$, $B(L^H\mathcal{W}(X, X))$ a le type d'homotopie de $N\mathcal{W}$.

Dans cette proposition, il nous reste à aborder le dernier pan de la théorie de Dwyer-Kan (qui est dans l'ordre des articles de Dwyer-Kan le premier !). C'est l'étude des catégories localisées d'un point de vue purement algébrique.

On fixe un ensemble O et on travaille dans la catégorie $O - \text{CAT}$ ayant pour objets les catégories dont l'ensemble des objets est égal à O et pour morphismes les foncteurs qui sont égaux à l'identité sur les objets - on ne considère que les flèches : d'un point de vue algébrique, les objets de $O - \text{CAT}$ sont des monoïdes généralisés.

Lorsque l'on considère une catégorie $\mathcal{C}$ avec une sous-catégorie $\mathcal{W}$ toutes deux dans Ord-cat , $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ est une catégorie dans $O - \text{CAT}$ et $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ est un morphisme de $O - \text{CAT}$. Ce cadre est donc adapté à l'étude qu'on veut faire.

La localisation hamac associe à un couple de O -catégories une O -catégorie simpliciale. Elle induit par ailleurs un endomorphisme $L^H : O - \text{CAT} \rightarrow O - \text{CAT}$, $\mathcal{C} \mapsto L^H(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Dans ce qui suit, les localisations hamac considérées sont toujours de cette forme.

Définition 3.7. On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est *libre* si il existe un ensemble fini S de flèches de $\mathcal{C}$ telle que toute flèche de $\mathcal{C}$ différente d'une identité peut être écrite de manière unique comme une composée d'éléments de S .

La motivation pour introduire cette définition est le lemme suivant :

Lemme 3.8. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie libre.*

Alors le foncteur canonique

$$L^H\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\mathcal{C}^{-1}]$$

est une équivalence faible (ie tous les espaces de morphismes de $L^H\mathcal{C}$ sont contractiles).

Pour une catégorie libre $\mathcal{C}$ dont le nerf est connexe, ce nerf est alors contractile et on vérifie directement la proposition.

L'idée est de se ramener à ce cas. On va donc utiliser des résolutions libre :

Soit $U : O - \text{CAT}^f \rightarrow O - \text{CAT}$ le foncteur d'oubli. Il admet évidemment un adjoint à gauche $F : O - \text{CAT} \rightarrow O - \text{CAT}^f$. En utilisant la résolution de Godement associé à cette paire d'adjoint (F, U) , on obtient un foncteur de résolution libre :

$$F_* : O - \text{CAT} \rightarrow sO - \text{CAT}$$

²Contrairement au cas du théorème précédent, Dwyer et Kan ne semblent pas donner un argument pour contourner ce problème.

tel que $F_k(\mathcal{C}) = (FU)^k(\mathcal{C})$.

Formellement, pour toute catégorie $\mathcal{C}$, le morphisme d'augmentation canonique

$$F_*(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

est une équivalence faible (de catégories simpliciales).

Enfin, en utilisant le lemme précédent, on obtient :

Lemme 3.9. *Soit $\mathcal{C}$ une O -catégorie.*

En appliquant le foncteur L^H degré par degré à la catégorie simpliciale $F_\mathcal{C}$, on obtient une catégorie bi-simpliciale. On peut considérer la catégorie simpliciale diagonale associée que l'on note $\text{diag } L^H F_*\mathcal{C}$.*

*Les catégories $F_k\mathcal{C}[F_k\mathcal{C}^{-1}]$ forment une catégorie simpliciale de manière évidente notée $F_*C[F_*C^{-1}]$.*

Alors les morphismes évidents

$$L^H\mathcal{C} \rightarrow \text{diag } L^H F_*\mathcal{C} \leftarrow F_*\mathcal{C}[F_*\mathcal{C}^{-1}]$$

sont des équivalences faibles.

Définition 3.10. Suivant Dwyer et Kan, on définit la localisation simpliciale de $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ comme la catégorie simpliciale $L(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = F_*\mathcal{C}[F_*\mathcal{C}^{-1}]$.

On peut finalement vérifier la proposition suivante :

Proposition 3.11. *Soit $\mathcal{C}$ une O -catégorie, $L\mathcal{C}$ sa localisation simpliciale. On suppose que $N\mathcal{C}$ est connexe. Alors :*

- (1) *Pour tout objet $X \in O$, $LC(X, X)$ est un groupoïde. Pour $X, Y \in O$, $LC(X, X)$ est isomorphe à $LC(Y, Y)$.*
- (2) *L'ensemble simplicial $B(LC(X, X))$ a le même type d'homotopie que NC .*

Démonstration. Le premier point est évident.

Soit k un entier. La catégorie $F_k\mathcal{C}[F_k\mathcal{C}^{-1}]$ est un groupoïde. On en déduit une fibration principale d'ensembles simpliciaux

$$\tilde{N}(F_k\mathcal{C}[F_k\mathcal{C}^{-1}]) \rightarrow N(F_k\mathcal{C}[F_k\mathcal{C}^{-1}])$$

dont la fibre est $LC(X, X)_k$, indépendant de X d'après le premier point.

Un argument diagonal en considérant l'application bi-simpliciale induite montre donc que $\text{diag } N(LC)$ a le type d'homotopie de $LC(X, X)$. Mais par ailleurs, on vérifie que $N(LC)$ est faiblement équivalent à NC . $\square$

Remarque 3.12. Plus généralement, on peut définir la localisation simpliciale (standard) de tout couple $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ par la formule $L(\mathcal{C}, \mathcal{W}) = F_*\mathcal{C}[F_*\mathcal{W}^{-1}]$, qui repose au fond sur une construction algébrique bien connue.

Alors, $L(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ a encore le type d'homotopie de $L^H(\mathcal{C}, \mathcal{W})$. Pourtant, chacune de ses résolutions simpliciales a ses avantages.

3.0.4. *Fin de la démonstration.* Soit $\mathcal{W}'$ la catégorie d'équivalences faibles contenant l'objet X . Avec tout ce qu'on a vu, on peut alors faire le raisonnement suivant :

$$BR\text{aut}_{\mathbf{M}}(X) \sim B\text{aut}_{L^H\mathbf{M}}(X) \sim BL^H\mathcal{W}'(X, X) \sim BL\mathcal{W}'(X, X) \sim N\mathcal{W}' = \mathcal{M}(X).$$

Remarque 3.13. Ainsi, $\mathcal{M}(X)$ a le type d'homotopie du "classifiant" d'un groupoïde simplicial. On remarquera que ce n'est pas surprenant du tout car Dwyer et Kan ont montré que tout ensemble simplicial a le type d'homotopie d'un groupoïde simplicial.

Plus précisément encore, le foncteur B des groupoïdes simpliciaux dans les ensembles simpliciaux fait partie d'une équivalence de Quillen entre la catégorie homotopique des groupoïdes simpliciaux et la catégorie homotopique usuelle, comme l'a montré Kan un peu après l'introduction de la localisation hamac.

4. QUELQUES EXEMPLES SUPPLÉMENTAIRES

Pour terminer, on introduit quelques nouveaux exemples. Considérons à nouveau une catégorie de modèle $\mathbf{M}$.

Soit X et Y deux espaces.

On considère la catégorie $I(X, Y)$ dont les objets sont les flèches $U \rightarrow V$ où U est équivalent à X et V est équivalent à Y , les morphismes étant les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} U & \rightarrow & V \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ U' & \rightarrow & V'. \end{array}$$

On note $\mathcal{M}(X \rightsquigarrow Y)$ le nerf de cette catégorie. C'est bien un espace de modules au sens de Dwyer-Kan car la catégorie $I(X, Y)$ est une catégorie d'équivalences faibles dans la catégorie de modèles des flèches de $\mathbf{M}$.

Proposition 4.1. *Les flèches évidentes*

$$\mathcal{M}_{\text{Hom}}(X, Y) \rightarrow \mathcal{M}(X \rightsquigarrow Y) \rightarrow \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(Y)$$

forment une suite fibre homotopique.

On introduit enfin une variante de cette construction, pour une catégorie de modèles simpliciale. Soit $I'(X, Y)$ la sous-catégorie de $I(X, Y)$ dont les objets sont les flèches $U \xrightarrow{f} V$ où U est équivalent à X et V est équivalent à Y et $\pi_i(f)$ est un isomorphisme pour tout entier i tel que $\pi_i(X)$ et $\pi_i(Y)$ sont non nuls.

On pose $\mathcal{M}(X \looparrowright Y) = NI'(X, Y)$. Cet espace de modules est une union disjointes de composantes de $\mathcal{M}(X \rightsquigarrow Y)$.

RÉFÉRENCES

- [1] W. G. Dwyer and D. M. Kan. Calculating simplicial localizations. *J. Pure Appl. Algebra*, 18(1) :17–35, 1980.
- [2] W. G. Dwyer and D. M. Kan. Function complexes in homotopical algebra. *Topology*, 19(4) :427–440, 1980.
- [3] W. G. Dwyer and D. M. Kan. Simplicial localizations of categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 17(3) :267–284, 1980.
- [4] W. G. Dwyer and D. M. Kan. Function complexes for diagrams of simplicial sets. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 45(2) :139–147, 1983.