Table des matières

COURS II
CYCLES ALGÉBRIQUES

1. Théorie des schémas (résumé)

1.1. Spectre premier. —

II.1.1.a. — Soit A un anneau.[1] On note $\operatorname{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, on note $V(\mathfrak{a})$ l'ensemble des idéaux premiers de A contenant $\mathfrak{a}$. La *racine* de l'idéal $\mathfrak{a}$ est l'idéal intersection :

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \cap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})}\mathfrak{p}.$$

Il est donc immédiat que $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}))$.

Pour tout élément f de A, on écrit $V(f)$ au lieu de $V(f.A)$. On pose $D(f) = \operatorname{Spec}(A) - V(f)$.

Proposition II.1. — *Avec les notations précédentes, on a les propriétés suivantes :*

1. $V(0) = \operatorname{Spec}(A), V(1) = \varnothing$.
2. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \Rightarrow V(\mathfrak{a}) \supset V(\mathfrak{a}')$.
3. *Pour toute famille* $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ *de partie de* $\operatorname{Spec}(A)$, $V(\sum_i \mathfrak{a}_i) = \cap_i V(\mathfrak{a}_i)$.
4. $V(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}')$.
5. $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{b})$.

Voir [**Bou83**, II, §4, n° 3].

Définition II.1. — On appelle topologie de Zariski sur $\operatorname{Spec}(A)$ la topologie dont les fermés sont les parties de la forme $V(\mathfrak{a})$ pour un idéal $\mathfrak{a}$ de A.

[1] Dans ce cours, tous les anneaux sont commutatifs avec une unité.

On considèrera toujours $\mathrm{Spec}(A)$ comme un espace topologique muni de sa topologie de Zariski. Les ensembles ouverts de la forme $D(f)$ pour $f \in A$ forment donc une base d'ouverts de $\mathrm{Spec}(A)$. On les appelles les *ouverts principaux* de $\mathrm{Spec}(A)$.

Remarque II.1. — Etant donnés deux éléments f, g de A, d'après le dernier point de la proposition II.1, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $D(f) = D(g)$.

(ii) $\mathfrak{r}(f) = \mathfrak{r}(g)$.

(iii) $g = f^n$ et $f = g^m$ pour des entiers $n, m \geq 0$.

Proposition II.2. — *Si A est un anneau, l'espace topologique* $\mathrm{Spec}(A)$ *est quasi-compact : tout recouvrement ouvert de* $\mathrm{Spec}(A)$ *admet un sous-recouvrement fini.*

En effet, on se ramène au cas d'un recouvrement par des ouverts principaux. Or, dire que $\mathrm{Spec}(A) = \cup_{i \in I} D(f_i)$ équivaut à dire que $\sum_i A.f_i = A$ compte tenu du point 3 de la proposition II.1.

II.1.1.b. — Considérons un morphisme d'anneaux $\rho : A \to B$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de B, $\rho^{-1}(\mathfrak{p})$ est un idéal premier de A : en effet, le morphisme induit

$$A/\rho^{-1}(\mathfrak{p}) \to B/\mathfrak{p}$$

est injectif, ce qui implique que $A/\rho^{-1}(\mathfrak{p})$ est intègre. On en déduit donc une application φ : $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$. Si f est un élément de A, $g = \rho(f)$, alors $\varphi^{-1}(D(f)) = D(g)$. Ainsi, f est continue.

Définition II.2. — Avec les notations précédentes, on note $\mathrm{Spec}(\rho) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ l'application continue qui à $\mathfrak{p}$ associe $\rho^{-1}(\mathfrak{p})$.

Exemple II.1. — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de l'anneau A. Alors, le morphisme

$$i : \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \mathrm{Spec}(A)$$

associé à la projection canonique est un homéomorphisme sur son image, qui est égale à la partie fermée $V(\mathfrak{a})$. On dit que i est une *immersion fermée.*

Exemple II.2. — Le nilradical $\mathfrak{N}$ d'un anneau A est l'ensemble des éléments nilpotents de A. On peut vérifier que $\mathfrak{N}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A ; autrement dit, $\mathfrak{N} = \mathfrak{r}(0)$. Il résulte de l'exemple précédent que le morphisme

$$i : \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{N}) \to \mathrm{Spec}(A)$$

est un homéomorphisme. On note souvent A_{red} l'anneau quotient $A/\mathfrak{N}$. C'est *l'anneau réduit* associé à A.

Remarque II.2. — On voit en particulier que l'espace topologique $\mathrm{Spec}(A)$ n'est pas suffisant pour reconstituer l'anneau A.

Exemple II.3. — Soit f un élément de A, et A_f l'anneau localisé de A en la partie $\{1, f, f^2, ...\}$. On en déduit une injection $A \to A_f$. Celle-ci induit une application continue

$$j : \mathrm{Spec}(A_f) \to \mathrm{Spec}(A)$$

qui est un homéomorphisme sur son image, égale à l'ouvert $D(f)$. On dit que j est une *immersion ouverte.*

II.1.1.c. — Rappelons qu'un espace topologique X est dit *irréductible* si il est non vide et s'il n'est pas réunion de deux fermés non vides distincts de X.

Proposition II.3. — *Soit A un anneau. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $V(\mathfrak{p})$ est irréductible. C'est l'adhérence du singleton $\{\mathfrak{p}\}$ de* Spec(A)*. De plus, l'application*

$$\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$$

définit une bijection entre les idéaux premiers de A et les parties fermées irréductibles de Spec(A).

On dit encore que $\mathfrak{p}$ est le *point générique* de $V(\mathfrak{p})$. On retiendra que dans l'espace topologique Spec(A), tout fermé irréductible admet un unique point générique.

Remarque II.3. — Si A est intègre, son point générique est l'idéal (0). Dire que Spec(A) est irréductible équivaut à dire que A_{red} est intègre.

1.2. Espaces annelés. —

II.1.2.a. — Soit X un espace topologique et $\mathscr{O}\mathrm{uv}(X)$ l'ensemble ordonné par inclusion des ouverts de X. On peut voir $\mathscr{O}\mathrm{uv}(X)$ comme une catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathscr{O}\mathrm{uv}(X)$ avec pour morphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}\mathrm{uv}(X)}(U, V) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } U \subset V, \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $\mathscr{A}nn$ la catégorie des anneaux.

Définition II.3. — Un *préfaisceau d'anneaux* sur X est un foncteur contravariant

$$F : \mathscr{O}\mathrm{uv}(X)^{op} \to \mathscr{A}nn.$$

Un morphisme de préfaisceaux d'anneaux sur X est une transformation naturelle.

II.1.2.b. — Soit F un préfaisceau d'anneaux sur X. Si $U \subset V$ est une inclusion entre ouverts et f un élément de $F(V)$, on note $f|_U$ l'image de f par le morphisme $F(V) \to F(U)$ associé à F.[2] Considérons un ouvert U de X et un recouvrement ouvert $U = \cup_{i \in I} U_i$ de U. On définit une suite d'applications :

$$0 \longrightarrow F(U) \xrightarrow{a} \prod_{i \in I} F(U_i) \overset{b_1}{\underset{b_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j) \in I^2} F(U_i \cap U_j) \tag{II.1}$$

grâce aux formules suivantes :

$$\begin{aligned} a(f) &= (f|_{U_i})_{i \in I} \\ b_1(f_i) &= (f_i|_{U_i \cap U_j})_{i,j} \\ b_2(f_i) &= (f_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j} \end{aligned}$$

On dit que la suite (II.1) est *exacte* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) a est injective.

(ii) L'image de a est égale à l'ensemble égalisateur de (b_1, b_2).

Définition II.4. — Soit F un préfaisceau d'anneaux sur X. On dit que F est un *faisceau d'anneaux* si pour tout recouvrement ouvert (U_i) d'un ouvert U de X, la suite (II.1) est exacte dans le sens qui précède.

On dit encore que le couple (X, F) est un *espace annelé*.

[2] Dans cette situation, on dit que $f|_U$ est la restriction de f à U.

Remarque II.4. — La condition d'être un faisceau signifie que les éléments de $F(U)$ sont de *nature locale* : d'après (i), un élément f de $F(U)$ est connu si l'on connait sa restriction aux ouverts d'un recouvrement de U ; d'après (ii), se donner un élément f de $F(U)$ revient à se donner un élément f_i de $F(U_i)$ pour chaque indice $i \in I$ telle que la famille (f_i) satisfait la relation dite *de cocyle* :

$$\forall (i,j) \in I^2,\ f_i|_{U_i \cap U_i} = f_j|_{U_i \cap U_j}.$$

II.1.2.c. — Soit A un anneau, $X = \operatorname{Spec}(A)$ son spectre. Considérons un ouvert principal U de $\operatorname{Spec}(A)$. D'après la remarque II.1, l'anneau A_f ne dépend pas de l'élément $f \in A$ tel que $U = D(f)$. Si l'on note $\mathscr{O}\mathrm{uv}'(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{O}\mathrm{uv}(X)$ formée des ouverts principaux, on déduit donc un foncteur bien définit :

$$\mathcal{O}_X : \mathscr{O}\mathrm{uv}'(X)^{op} \to \mathscr{A}nn, D(f) \mapsto A_f.$$

Pour prolonger ce foncteur en un faisceau d'anneaux sur $\operatorname{Spec}(A)$, le point clé est le suivant :

Lemme II.4. — *Considérons une famille finie $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $X = \cup_{i=1}^n D(f_i)$. Alors, la suite d'applications*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} \prod_i A_{f_i} \underset{b_2}{\overset{b_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)} A_{f_i f_j}$$

obtenue en appliquant la construction (II.1) *au fonteur $\mathcal{O}_X$ est exacte.*

Ce lemme s'appuie sur le fait que l'hypothèse de l'énoncé équivaut à demander l'existence d'éléments h_i dans A tels que $\sum_{i=1}^n h_i.f_i = 1$.

On en déduit le résultat suivant :

1. A tout ouvert U de X, on associe un anneau en considérant un recouvrement ouvert $U = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$ et en posant

(II.2) $$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) := \operatorname{Ker}\left(\prod_{f \in \mathfrak{a}} A_f \underset{b_2}{\overset{b_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(f,g) \in \mathfrak{a}^2} A_{fg} \right).$$

   Cet anneau est en effet indépendant du recouvrement choisi.
2. On définit ainsi un préfaisceau $\mathcal{O}_X : \mathscr{O}\mathrm{uv}(X)^{op} \to \mathscr{A}nn$.

Cette définition montre de manière évidente que $\mathcal{O}_X$ est un faisceau sur X.

Définition II.5. — Considérant les notations ci-dessus, on dit que $(X, \mathcal{O}_X)$ est l'espace annelé associé à l'anneau A.

On se rappellera l'égalité pour tout élément f de A :

(II.3) $$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = A_f.$$

II.1.2.d. — Soit $\varphi : Y \to X$ une application continue. Par définition, on en déduit un foncteur

$$\varphi^{-1} : \mathscr{O}\mathrm{uv}(X) \to \mathscr{O}\mathrm{uv}(Y), U \mapsto \varphi^{-1}(U).$$

On associe donc à un préfaisceau en anneaux F sur Y, le préfaisceau en anneaux sur X suivant :

$$\varphi_*(F) = F \circ \varphi^{-1}.$$

On l'appelle l'image directe de F suivant φ. On vérifie facilement que si F est un faisceau en anneaux sur Y, $\varphi_*(F)$ est un faisceau en anneaux sur X.

Définition II.6. — Un morphisme d'espaces annelés $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ est un couple (φ, θ) tel que $\varphi : Y \to X$ est une application continue et $\theta : \mathcal{O}_X \to \varphi_*(\mathcal{O}_Y)$ est un morphisme de faisceau d'anneaux.

II.1.2.e. — Soit $\rho : A \to B$ un morphisme d'anneaux, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ les spectres respectifs et $\varphi : Y \to X$ l'application continue induite par ρ. Considérant un élément $f \in A$, $g = \rho(f)$. Rappelons que $\varphi^{-1}(D(f)) = D(g)$. On en déduit donc un morphisme d'anneaux :

$$\theta_{D(f)} : \Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = A_f \to B_g = \Gamma(D(g), \mathcal{O}_Y) = \Gamma(D(f), \varphi_*(\mathcal{O}_Y)).$$

Ce morphisme ne dépend que de l'ouvert $D(f)$. Il définit une transformation naturelle

$$\theta : \mathcal{O}_X \to \varphi_*(\mathcal{O}_Y)$$

sur les ouverts principaux de X. On déduit immédiatement de la formule (II.2) que θ se prolonge de manière unique à tous les ouverts de X.

Définition II.7. — Le couple $(\varphi, \theta) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ définit ci-dessus est appelé le morphisme d'espaces annelés associé au morphisme d'anneaux ρ.

II.1.2.f. — Soit x un point d'un espace topologique X. L'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages ouverts de x dans X est filtrant pour l'inclusion. Si F est un préfaisceau d'anneaux sur X, on définit sa fibre au point x comme la limite inductive dans la catégorie des anneaux

$$F_x := \varinjlim_{V \in \mathcal{V}(x)} F(V).$$

Il est immédiat que cette définition est naturelle en F. Etant donné un morphisme d'espaces annelés $(\varphi, \theta) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ et un point y de Y, $x = \varphi(y)$, la fibre du morphisme en y sera par définition le morphisme composé :

$$\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\theta_x} \left(\varphi_*(\mathcal{O}_Y)\right)_x \to \mathcal{O}_{Y,y}$$

la dernière flèche étant la projection canonique – en effet, pour tout voisinage ouvert U de x dans X, $\varphi^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert de y dans Y.

Exemple II.4. — Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ le schéma affine associé à un anneau A. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, la fibre de $\mathcal{O}_X$ au point $\mathfrak{p}$ est l'anneau local $A_\mathfrak{p}$ comme il résulte de (II.3).
Soit $\rho : A \to B$ un morphisme d'anneaux, et $(\varphi, \theta) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ le morphisme de schémas affines associé. Tout point $\mathfrak{q}$ de $\mathrm{Spec}(B)$ a pour image par φ l'idéal premier $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{q})$. On vérifie facilement que la fibre de $\theta : \mathcal{O}_X \to \varphi_*(\mathcal{O}_Y)$ au point $\mathfrak{q}$ est le morphisme canonique

$$A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}.$$

On remarquera particulièrement que c'est un morphisme *local* d'anneau locaux (*i.e.* l'image réciproque de l'idéal maximal du but est l'idéal maximal de la source).

1.3. La catégorie des schémas. —

II.1.3.a. — Soit X un espace topologique et U un ouvert de X. On dispose d'une inclusion $\mathscr{O}\mathrm{uv}(U) \subset \mathscr{O}\mathrm{uv}(X)$. Ainsi, un préfaisceau F sur X définit par restriction un présfaisceau sur U que l'on noute $F|_U$. Il est immédiat que si F est un faisceau sur X, $F|_U$ est un faisceau sur U.

Définition II.8. — Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé.

1. On dit que $(X, \mathcal{O}_X)$ est un schéma affine s'il existe un anneau A tel que $(X, \mathcal{O}_X)$ est isomorphe à l'espace annelé associé à A.
2. On dit que $(X, \mathcal{O}_X)$ est un schéma si tout point de x admet un voisinage ouvert V tel que $(V, \mathcal{O}_X|_V)$ est un schéma affine.

On note souvent X le schéma $(X, \mathcal{O}_X)$, étant sous-entendu que $\mathcal{O}_X$ désigne le faisceau d'anneaux structural.

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un schéma affine, l'espace annelé associé à l'anneau $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est canoniquement isomorphe à $(X, \mathcal{O}_X)$. On parle de *l'anneau des fonctions globales* du schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$.

Les propriétés topologiques élémentaires d'un schéma X sont les suivantes :

1. L'ensemble des ouverts de X qui sont des schémas affines[3] est une base pour la topologie de X.
2. Si U est un ouvert de X, l'espace annelé $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ est un schéma.
3. Toute partie irréductible Z de X admet un unique point générique x, $Z = \overline{\{x\}}$.
4. Pour tout point x de X, la fibre de $\mathcal{O}_X$ au point x est un anneau local. On l'appelle *l'anneau local de X en x* et on le note $\mathcal{O}_{X,x}$. Le corps résiduel de cet anneau est appelé le *corps résiduel* du point x. On le note $\kappa(x)$.

Si X est irréductible, et x désigne son point générique, le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est appelé le *corps des fonctions* de X.

II.1.3.b. — On considère souvent une relation d'ordre partielle sur les points de X : pour $x, x' \in X$, $x \leq x'$ si $x \in \overline{\{x'\}}$. On dit aussi que x est une spécialisation de x' ou encore que x' est une générisation de x.
Dans ce cas, tout voisinage ouvert V de x contient nécessairement x'. Considérant le cas où V est affine, on en déduit un morphisme canonique

$$\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x'}$$

(ce n'est pas un morphisme local sauf si $x = x'$).
Un point x de X est maximal si et seulement si $\overline{\{x\}}$ est une composante irréductible de X. On dit encore que x est un *point générique* de X.
Un point x de X est minimal si et seulement si $\{x\}$ est fermé dans X. On parle naturellement de *point fermé*.
Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, on fera attention que pour deux éléments $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ de $\mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}'$ dans le sens précédent si et seulement si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$. Ainsi, un point générique (resp. fermé) de $\mathrm{Spec}(A)$ est un idéal premier minimal (resp. maximal) de A.

L'exemple II.4 est à l'origine de la définition suivante :

Définition II.9. — Un morphisme de schémas

$$(\varphi, \theta) : Y \to X$$

est un morphisme d'espaces annelés tel que pout tout point y de Y, $x = \varphi(y)$, la fibre de θ en y

$$\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y} \tag{II.4}$$

est un morphisme local d'anneaux locaux.

On confondra souvent le morphisme (φ, θ) avec l'application continue φ, le morphisme structural θ étant sous-entendu. Le morphisme (II.4) induit un morphisme canonique sur les corps résiduel $\kappa(x) \to \kappa(y)$. On parle de *l'extension résiduelle* du morphisme (φ, θ) au point y.

Exemple II.5. — Soit U un ouvert d'un schéma X, $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$. Si $j : U \to X$ désigne l'injection associé, on obtient un morphisme

$$\theta : \mathcal{O}_X \to j_* \mathcal{O}_U$$

en associant à un ouvert V de X le morphisme de restriction

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(V \cap U) = \Gamma(V, j_*(\mathcal{O}_X|_U).$$

[3] On les appelle encore des *ouverts affines*.

Ceci définit un morphisme de schémas $(j, \theta) : U \to X$. On dit que (j, θ) est une immersion ouverte. Plus généralement, tout morphisme de schémas isomorphe à un morphisme de la forme (j, θ) sera appelé une *immersion ouverte.*

II.1.3.c. — Si S est un schéma, la catégorie $\mathscr{S}ch/S$ des morphismes de schémas à valeur dans S est appelée la catégorie des S-schémas.

Proposition II.5. — *Soit A un anneau et $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma. Alors, le morphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}ch}(X, \mathrm{Spec}(A)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}nn}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

est un isomorphisme.

Il en résulte que $\mathrm{Spec}(.) : \mathscr{A}nn^{op} \to \mathscr{S}ch$ est un foncteur *contravariant* pleinement fidèle. On voit aussi que le schéma affine $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est initial dans la catégorie des schémas.

Exemple II.6. — Si K est un corps et X un schéma, un morphisme $\sigma : \mathrm{Spec}(K) \to X$ revient à se donner un point x de X et une extension de corps $\kappa(x) \to K$. On dit que σ est un *point géométrique* de X à valeur dans K.

Remarque II.5. — Etant donné un morphisme $f : Y \to X$ de schémas, et y un point de Y, $x = f(y)$, il existe un voisinage ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de x dans X, et un voisinage ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(B)$ de y dans Y tel que $V \subset f^{-1}(U)$. Ainsi, f induit un morphisme $V \to U$ qui correspond à un morphisme d'anneaux $A \to B$. On réduit ainsi les questions sur les morphismes de schémas à des questions sur des morphismes d'anneaux.

Définition II.10. — On dit qu'un morphisme de schéma $f : Y \to X$ est de *type fini* (resp. *fini*) si pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de X, $f^{-1}(U)$ est une réunion finie d'ouverts affines $\mathrm{Spec}(B_i)$ tels que le morphisme induit $A \to B_i$ fait de B_i une A-algèbre de type fini (resp. finie).

Si k est un corps, un morphisme $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ est de type fini si X est une réunion finie d'ouverts affines $\mathrm{Spec}(A_i)$ tel que A_i est une k-algèbre de type fini. On dit aussi que X est un k-schéma algébrique. Un point x de X induit donc une extension $k \to \kappa(x)$ qui est de degré de transcendance finie. On dit que x est rationnel (ou k-rationnel) si cette extension est triviale.

Exemple II.7. — Si k est algébriquement clos, tout k-schéma algébrique non vide X admet un point rationnel d'après le *théorème des zéros de Hilbert* ([**Bou83**, V, §3, n$^{\mathrm{o}}$ 3, prop. 1]).

Définition II.11. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas.

On dit que f est une *immersion fermée* si point tout point y de Y, il existe un voisinage ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(B)$ (resp. $U = \mathrm{Spec}(A)$) de y dans Y (resp. de $x = f(y)$ dans X) tel que le morphisme

$$A \to B$$

induit par f soit surjectif.

On dit que f est une *immersion* s'il se factorise

$$Y \xrightarrow{i} U \xrightarrow{j} X$$

où i est une immersion fermée et j une immersion ouverte.

Un sous-schéma fermé Z de X est une immersion fermée $Z \to X$ dont l'application sous-jacente est l'inclusion d'une partie fermée.

Remarque II.6. — Une immersion fermée est un exemple de morphisme fini.

Définition II.12. — On dit qu'un schéma X est *réduit* si pour tout point x de X, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit. On dit que X est *intègre* s'il est réduit et irréductible.

II.1.3.d. — Soit Z une partie fermée de l'espace topologique sous-jacent à un schéma X. Soit $U = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de X. Alors, $Z \cap U$ est un fermé de $\mathrm{Spec}(A)$. Il s'écrit donc de manière unique $Z \cap U = V(\mathfrak{a}) = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ pour un idéal $\mathfrak{a}$ égal à sa racine. On pose :

$$\mathcal{O}_Z(Z \cap V) = A/\mathfrak{a}.$$

L'unicité de l'idéal $\mathfrak{a}$ montre qu'on définit ainsi un foncteur sur les ouverts de la forme $Z \cap U$ pour U ouvert affine de X, qui se prolonge de manière unique en un faisceau d'anneaux sur Z.

Il est immédiat que $(Z, \mathcal{O}_Z)$ est un schéma. On obtient de plus un morphisme canonique $(Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ qui est par construction une immersion fermée.

Définition II.13. — Si Z est une partie fermée de X, la structure de schéma $(Z, \mathcal{O}_Z)$ est appelée la *structure réduite* associé à Z dans X.

Lorsque $Z = X$, on note X_{red} le sous-schéma de X munit de sa structure réduite, et on l'appelle le *schéma réduit* associé à X.

On peut voir que si $i : Y \to X$ est une immersion fermée tel que Y est réduit, i induit un isomorphisme entre Y et le sous-schéma $i(Y)$ munit de sa structure réduite.

Exemple II.8. — 1. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X_{red} = \mathrm{Spec}(A_{red})$.

2. Si X est un schéma, on obtient une bijection entre l'ensemble des points de x et l'ensemble des sous-schémas fermés intègres de X :

$$x \mapsto \overline{\{x\}}_{red}$$

II.1.3.e. — La catégorie des schémas admet des sommes disjointes : si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de schémas, $X = \sqcup_i X_i$ l'espace topologique somme, on définit un faisceau en anneaux sur X

$$U = \bigsqcup_i U_i \mapsto \prod_i \mathcal{O}_{X_i}(U_i).$$

Alors, $(X, \mathcal{O}_X)$ est un schéma.

Exemple II.9. — Si A et B sont deux anneaux, $\mathrm{Spec}(A) \sqcup \mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(A \times B)$. Si X est un schéma dont l'espace sous-jacent est un ensemble fini, alors X est affine, spectre d'un produit d'anneaux locaux.

II.1.3.f. — La catégorie des schémas admet des produits fibrés

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Ces produits fibrés sont caractérisés par le fait que si $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y = \mathrm{Spec}(C)$, alors $X \times_S Y = \mathrm{Spec}(B \otimes_A C)$.

Exemple II.10. — Soit $f : T \to S$ un morphisme de schémas. On en déduit un foncteur dit de *changement de base*

$$\begin{aligned} \mathscr{S}ch/S &\to \mathscr{S}ch/T \\ X/S &\mapsto (X \times_S T)/T. \end{aligned}$$

Les immersions (resp. ouvertes, fermées) sont stables par changement de base.

Si Z est un sous-schéma fermé de S, on pose $f^{-1}(Z) = T \times_S Z$ vu comme un sous-schéma fermé de T et on l'appelle *l'image réciproque* de Z par f.

2. Préliminaires

2.1. Dimension. — Une *chaîne* d'irréductibles d'un espace topologique X de longueur $n \geq 0$ est une suite finie strictement décroissante de parties fermées irréductibles[(4)] de X

$$Z^0 \supsetneq Z^1 \supsetneq \ldots \supsetneq Z^n.$$

Définition II.14. — Soit X un espace topologique.

On définit la *dimension* de X comme la borne supérieure dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty, -\infty\}$ des longueurs des chaînes d'irréductibles de X. On note cet élément $\dim(X)$.

On dit que X est de *dimension finie* si $\dim(X) < +\infty$.

On dit que X est *équidimensionnel* si toutes ses composantes irréductibles ont la même dimension.

Remarque II.7. — Cette définition n'a pas d'intérêt pour les espaces topologiques séparés puisque si $X \neq \varnothing$ est un tel espace, il est de dimension nulle dans le sens précédent (toute partie irréductible est en effet réduite à un point).

On l'appliquera essentiellement à des schémas.

On obtient facilement les assertions suivantes :

1. $(\dim(X) = -\infty) \Leftrightarrow X = \varnothing$.
2. Si Y est un sous-schéma de X, $\dim(Y) \leq \dim(X)$.
3. Si X est réunion d'une famille finie de fermés $(Z_i)_{i \in I}$, $\dim(X) = \sup_{i \in I} \dim(Z_i)$.

Définition II.15. — Soit X un schéma. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $X_{(n)}$ l'ensemble des points de X dont l'adhérence est de dimension n.

Si X est de dimension finie d, on a donc définit une partition finie de X : $X = \sqcup_{n=0}^{d} X_{(i)}$. Les éléments de $X_{(0)}$ sont donc les points fermés de X (*cf.* II.1.3.b).

II.2.1.a. — La dimension du schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ est encore la borne supérieure des chaînes d'idéaux premiers

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n,$$

aussi appelée *dimension de Krull* de A.

Exemple II.11. — Soit k un corps, A un anneau.

1. $\dim(\mathbb{Z}) = 1$.
2. $\dim(k) = 0$.
3. $\dim(k[t_1, ..., t_n]) = n$.
4. Si A est noethérien, $A[t]$ est noethérien et $\dim(A[t]) = \dim(A) + 1$ (*cf.* [**Ser65**, III, prop. 13]).

II.2.1.b. — Rappelons qu'un anneau A est *noethérien* si toute suite croissante d'idéal de A est stationnaire. On fera attention qu'il existe des anneaux noethériens de dimension infinie (*cf.* [**Bou83**, VIII, §1, exercice 13]). mais aussi des anneaux de dimension finie qui ne sont pas noethériens (par exemple un anneau de valuation dont le groupe est de rang $h > 1$). Toutefois, rappelons le théorème suivant :

---

(4) Irréductible implique non vide

Théorème II.6. — [5] *Tout anneau local noethérien A est de dimension finie. De plus, si $\mathfrak{m}$ (resp. k) désigne son idéal maximal (resp. corps résiduel), on a la relation :*

$$\dim(A) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Un schéma est *noethérien* s'il est réunion finie d'ouverts affines dont l'anneau sous-jacent est noethérien. **Tous les schémas que nous considèrerons dans ce cours seront noethériens.**

II.2.1.c. — Rappelons aussi qu'un anneau est *artinien* si toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire. Notons encore le théorème suivant :

Théorème II.7. — *Les conditions suivantes sur un anneau A sont équivalentes :*

(i) *A est artinien.*

(ii) *A est noethérien et tout idéal premier est maximal.*

(iii) *A est noethérien de dimension* 0.

Pour une preuve, on se réfère à [**CL99**, 1.4.3].[6] Rappelons qu'un anneau noethérien n'a qu'un nombre fini d'idéaux minimaux (*i.e.* $\operatorname{Spec}(A)$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles). En conséquence, si A est artinien, il est semi-local.

Exemple II.12. — Soit X un schéma noethérien. Alors X est de dimension nulle si et seulement si $X = \operatorname{Spec}(A)$ pour A artinien.

2.2. Codimension. —

Définition II.16. — Soit X un schéma et Z une partie fermée de X.

On définit la codimension c de Z dans X en deux étapes :

1. Si Z est irréductible, c est la borne supérieure des longueurs des chaînes d'irréductibles de X de la forme
$$Z^0 \supsetneq Z^1 \supsetneq \ldots \supsetneq Z^n = Z.$$
2. Dans le cas général, c est la borne inférieure des codimensions dans X des composantes irréductibles de Z.

On pose encore $c = \operatorname{codim}_X(Z)$.

On dit que Z est de codimension pure n dans un schéma X si toute composante irréductible de Z est de codimension n dans X.

On obtient facilement les assertions suivantes :

1. $(\operatorname{codim}_X(Z) = 0) \Leftrightarrow Z$ contient une composante irréductible de X.
2. Si Z est irréductible de point générique z,
$$\operatorname{codim}_X(Z) = \dim(\mathcal{O}_{X,z}).$$

Remarque II.8. — On déduit donc du théorème II.6 que dans un schéma noethérien X, toute partie fermée non vide est de codimension finie.

Définition II.17. — Soit X un schéma. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $X^{(n)}$ l'ensemble des points de X dont l'adhérence est de codimension n dans X.

---

[5] En fait, la première partie du théorème est vraie pour tout anneau semi-local (*i.e.* n'admettant qu'un nombre fini d'idéaux maximaux). Voir [**Bou83**, VIII, §3, n$^{\text{o}}$ 1, cor. 1]. (La démonstration utilise une partie du théorème suivant.)

[6] Ce théorème est attribué à Akizuki par Chambert-Loir. En fait, ce mathématicien a démontré (en 1935) que si A est artinien, il est noethérien.

Ainsi, $x \in X^{(n)}$ si et seulement si $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = n$. Si X est noethérien, on a donc définit une partition (éventuellement infinie) : $X = \sqcup_{n\geq 0} X^{(n)}$.
Les éléments de $X^{(0)}$ sont les points génériques de X (*cf.* II.1.3.b). Notons que si X est noethérien, l'ensemble $X^{(0)}$ est fini – en effet, on se réduit au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, A noethérien, et la conclusion suit par induction noethérienne.

II.2.2.a. — Pour tout schéma X, on obtient encore formellement les inégalités suivantes :

1. Si $Z \neq \varnothing$ est une partie fermée de X,

$$\dim(Z) + \mathrm{codim}_X(Z) \leq \dim(X). \tag{II.5}$$

2. Si $Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2$ sont trois parties fermés de X,

$$\mathrm{codim}_{Z_1}(Z_0) + \mathrm{codim}_{Z_2}(Z_1) \leq \mathrm{codim}_{Z_2}(Z_0). \tag{II.6}$$

On fera attention que ces inégalités peuvent être strictes (par exemple pour (II.5) un schéma non équidimensionnel).

Définition II.18. — On dit que X est *caténaire* si pour tout triplet $Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2$ de parties fermées irréductibles de X, il y a égalité dans (II.6).

Il revient au même de demander que pour tout couple $T \subset Z$ de parties fermées irréductibles, toute chaîne saturée d'irréductibles d'extrémités T et Z est de longueur $\mathrm{codim}_Z(T)$. En particulier, il est évident qu'un sous-schéma fermé d'un schéma caténaire est caténaire.

II.2.2.b. — Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, la codimension de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ dans A est appelée la *hauteur* de $\mathfrak{a}$, notée $\mathrm{ht}(\mathfrak{a})$. Si $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ est un idéal premier,

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(A_{\mathfrak{p}}).$$

L'inégalité (II.5) se réécrit dans le cas $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Z = V(\mathfrak{a})$:

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{a}) + \dim(A/\mathfrak{a}) \leq \dim(A).$$

Exemple II.13. — Soit f un élément d'un anneau noethérien A, $X = \mathrm{Spec}(A)$. Alors :

1. $\mathrm{ht}(f) = -\infty \Leftrightarrow V(f) = \emptyset \Leftrightarrow f \in A^{\times}$.
2. $\mathrm{ht}(f) = 0 \Leftrightarrow V(f)$ contient une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(A)$. Dans ce cas, f est diviseur de 0 dans A.
3. Si A est réduit, $\mathrm{ht}(f) = 0 \Leftrightarrow f$ est diviseur de 0 dans A.[7]
4. $\mathrm{ht}(f) = 1 \Leftrightarrow V(f)$ est non vide et ne contient aucune composante irréductible de X. De plus, $V(f)$ est purement de codimension 1 dans X.

On dira que l'élément f est *régulier* s'il n'est pas diviseur de 0 dans A. On retiendra que dans ce cas, $V(f)$ est purement de codimension 1.[8]

Notons pour terminer le théorème suivant :

Théorème II.8. — *Soit X un schéma noethérien irréductible (localement) de type fini sur un corps k. Soit K le corps des fonctions de X.*[9]

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

---

[7] Voir [**Bou83**, IV, §2, n° 5, prop. 10]. En général, f est diviseur de 0 si et seulement si $V(f)$ contient une composante immergée de l'anneau A (ibidem).

[8] Réciproquement, si $V(f)$ est purement de codimension 1 et $\mathrm{Spec}(A)$ n'a pas de composante immergée, alors f est régulier.

[9] *i.e.* le corps résiduel du point générique de X.

(i) *Pour tout point z de X de corps résiduel κ_z et d'adhérence Z dans X,*

$$\operatorname{codim}_X(Z) = \operatorname{degtr}_k(\kappa_z).$$

(ii) $\dim(X) = \operatorname{degtr}_k(K)$.

(iii) *Pour toute partie fermée irréductible Z de X,*

$$\dim(Z) + \operatorname{codim}_X(Z) = \dim(X). \tag{II.7}$$

Pour la preuve, on note que le point (i) entraîne le point (ii) et le point (iii). Il s'agit essentiellement de démontrer que si A est le localisé d'une k-algèbre intègre de type fini en un idéal premier, alors :

$$\dim(A) = \operatorname{degtr}_k(\operatorname{Frac}(A)).$$

Pour cette égalité, on se réfère à [**Bou83**, VIII, §2, n° 4, th. 3].

Remarque II.9. — 1. On déduit facilement du théorème ci-dessus que tout schéma (essentiellement) de type fini sur un corps k est caténaire au sens de la remarque II.18.

2. Si l'on n'a pas de corps de base k, l'égalité du point (iii) n'est pas naturelle. Par exemple, elle n'a pas lieu dans le schéma régulier $\operatorname{Spec}(V[t])$ où V est un anneau de valuation. En effet, $V[t]$ est de dimension 2 ; pourtant, si π désigne une uniformisante de V, l'idéal $(1-\pi.t)$ est maximal dans $V[t]$ et de hauteur 1. Nous retiendrons que dans le cas général, c'est la codimension qui se comporte bien.(10)

2.3. Longueurs. — Considérons un A-module M. On rappelle les définitions suivantes :

1. M est *simple* si il n'admet pas de sous-A-modules autres que 0 et M.
2. L'annulateur de M dans A est l'idéal
$$\operatorname{Ann}(M) = \{f \in A \mid \forall v \in M, f.v = 0\}.$$
3. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, la *fibre* de M en $\mathfrak{p}$ est le $A_\mathfrak{p}$-module $M_\mathfrak{p} := M \otimes_A A_\mathfrak{p}$.
4. Le *support* de M est le sous-ensemble de $\operatorname{Spec}(A)$ suivant :
$$\operatorname{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\}$$

Si M est simple, l'idéal $\operatorname{Ann}(M)$ est maximal et $M = A/\operatorname{Ann}(M)$.

Soit M un A-module. Une chaîne de sous-A-modules de M est une suite de la forme

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M. \tag{II.8}$$

L'entier n est appelée la longueur de la chaîne.

Définition II.19. — La longueur d'un A-module M est la borne supérieure dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ des longueurs des chaînes de sous-A-modules de M. On la note $\lg_A(M)$, ou encore $\lg(M)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. On dit que M est de longueur finie si $\lg(M) < +\infty$.

Exemple II.14. — On vérifie facilement :

1. $\lg(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0$.
2. $\lg(M) = 1 \Leftrightarrow M$ est simple.
3. Si $A = k$ est un corps, $\lg_k(M) = \dim_k(M)$.
4. Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Ann}(M)$, $\lg_A(M) = \lg_{A/\mathfrak{a}}(M)$.

(10)D'autres auteurs, comme Fulton dans [**Ful98**, chap. 20], préfèrent travailler sur un anneau régulier A fixé et utiliser une fonction de dimension relativement à A.

5. Etant donnée une suite exacte de A-modules
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$
on a l'égalité : $\lg(M) = \lg(M') + \lg(M'')$.

On déduit du dernier point que pour toute suite croissante de sous-A-modules $(M_i)_{1\leq i<n}$, posant $M_0 = 0$ et $M_n = M$, on obtient :

$$\lg_A(M) = \sum_{i=1}^{n} \lg_A(M_i/M_{i-1}). \tag{II.9}$$

Définition II.20. — Une *suite de composition* d'un A-module M est une chaîne de sous-A-modules (II.8) qui est maximale (pour la relation d'inclusion termes à termes indépendemment de la longueur de la chaîne).

Il revient au même de demander que pour tout i, $M_i/M_{i-1} = A/\mathfrak{m}_i$ pour un idéal maximal $\mathfrak{m}_i$. On dit encore que l'idéal $\mathfrak{m}_i$ est *associé* à la suite de composition (II.8).

Proposition II.9. — *Pour un A-module M, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est de longueur finie sur A.*

(ii) *Il existe une suite de composition dans M.*

De plus, ces conditions impliquent la suivante :

(iii) *Toute suite de composition de M est de longueur $\lg_A(M)$.*

Démonstration. — Considérons une suite de composition de la forme (II.8) dans M. Alors, la formule (II.9) appliquée à la suite $(M_i)_i$ montre que $\lg_A(M) = n$.

On en déduit donc l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ ainsi que l'assertion (iii). Pour $(i) \Rightarrow (ii)$, on montre qu'on peut construire une suite de composition par induction, en partant du fait que, M étant de longueur finie, il contient un sous-A-module N telle que M/N est simple. □

Notons encore, les faits suivants :

1. L'ensemble des idéaux maximaux $\{\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_n\}$ associés à une suite de composition est indépendant de la suite choisie. Il est égal au support de M.
2. L'ensemble $\mathrm{Supp}(M)$ est fini, fermé dans $\mathrm{Spec}(A)$. Pour tout élément $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Supp}(M)$,

$$\lg_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \mathrm{card}(\{1 \leq i \leq n \mid \mathfrak{m}_i = \mathfrak{p}\}). \tag{II.10}$$

3. On a la relation suivante :
$$\lg(M) = \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(M)} \lg(M_\mathfrak{p}).$$

Corollaire II.9.1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est artinien.*

(ii) *A est de longueur finie (en tant que A-module).*

Remarque II.10. — On peut voir plus généralement que si A est artinien, tout A-module de type fini est de longueur finie.

II.2.3.a. — Soit A un anneau. Rappelons qu'on dit que A est *local* (resp. *semi-local*) si il n'a qu'un seul idéal maximal (resp. un nombre fini d'idéaux maximaux).

Proposition II.10. — *Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$, B un anneau semi-local et $\rho : A \to B$ un morphisme d'anneaux. On suppose que pour tout idéal maximal $\mathfrak{q}$ de B, $\rho^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}_A$. Le morphisme ρ induit donc une extension de corps $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{q}$ et on note $d_\mathfrak{q}$ son degré (éventuellemnt infini).*
Alors, pour tout B-module M non nul, on a la relation :

$$\mathrm{lg}_A(M) = \sum_{\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(B)_{(0)}} d_\mathfrak{q}.\,\mathrm{lg}_{B_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}).$$

Démonstration. — On débute cette preuve en remarquant la relation suivante :

$$\mathrm{lg}_A(B/\mathfrak{q}) = \mathrm{lg}_{A/\mathfrak{m}_A}(B/\mathfrak{q}) = d_\mathfrak{q}. \tag{II.11}$$

Si M est de longueur infinie sur B, il est nécessairement de longueur infinie sur A, ce qui conclut.

Dans le cas contraire, on peut considérer une suite de composition du B-module M :

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M.$$

Comme B est local, $M_i/M_{i-1} = B/\mathfrak{q}_i.B$. On peut considérer la suite ci-dessus comme une suite croissante de sous-A-modules de M. On déduit donc le résultat en appliquant le calcul (II.9) à cette suite croissante et en utilisant les relations (II.10) et (II.11). □

II.2.3.b. — Considérons un morphisme d'anneaux $\rho : A \to B$. On dit que B est plat sur A, ou que ρ est plat, si le foncteur $B \otimes_A (.)$ des A-modules dans les B-modules est exact. Notons que cette définition entraîne facilement la proposition suivante :

Proposition II.11. — *Soit A et B deux anneaux locaux, $\rho : A \to B$ un morphisme local plat. Alors, l'application induite* $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *est surjective.*

On en déduit que B/A est fidèlement plat : si M est un A-module, $M \otimes_A B = 0$ équivaut à $M = 0$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Le morphisme induit $A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{p}.B$ est encore plat et local. Il suffit donc de traiter le cas où A est intègre et $\mathfrak{p} = (0)$. Si f est un élément non nul de A, le morphisme $\gamma_f : A \to$ de multiplication par f est injectif, donc $B \otimes_A \gamma_f$ est encore injectif. Ceci revient à dire que $\rho(f)$ est régulier dans B.

Posons $S = \rho(A - \{0\})$. C'est une partie multiplmicative de B formée d'éléments réguliers d'après ce qui précède. L'anneau $S^{-1}B$ est donc non nul ; il contient donc un idéal premier $\mathfrak{q}$. L'idéal $\mathfrak{q}$, vu dans B, est tel que $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$. On en déduit $\rho^{-1}(\mathfrak{q}) = (0)$. □

Proposition II.12. — *Soient A et B deux anneaux locaux noethériens, $\mathfrak{m}_A$ l'idéal maximal de A et $\rho : A \to B$ un morphisme plat local. Si B est artinien, alors A est artinien. De plus, pour tout A-module M de longueur finie, on a la relation suivante :*

$$\mathrm{lg}_B(M \otimes_A B) = \mathrm{lg}_A(M).\,\mathrm{lg}_B(B/\mathfrak{m}_A.B).$$

Démonstration. — Si B est artinien, $\mathrm{Spec}(B)$ est réduit à un point, donc $\mathrm{Spec}(A)$ est réduit à un point d'après la proposition qui précède. Cela montre que A est artinien d'après le théorème II.7. Puisque M est de longueur finie sur A, il admet d'après la proposition II.9 une suite de composition

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M.$$

telle que $M_i/M_{i-1} = A/\mathfrak{m}_A$. Comme B/A est plate, on en déduit une suite de monomorphismes :

$$0 = M_0 \otimes_A B \subsetneq M_1 \otimes_A B \subsetneq \ldots \subsetneq M_n \otimes_A B = M \otimes_A B.$$

Remarquons de plus que $M_i/M_{i-1} \otimes_A B = B/\mathfrak{m}_A.B$. On conclut donc grâce à la relation (II.9). □

3. Théorie élémentaire

3.1. Définitions. —

Définition II.21. — Soit X un schéma noethérien. Un *cycle algébrique* de X est une somme formelle finie

$$\alpha = \sum_{i \in I} n_i . x_i$$

où $n_i \in \mathbb{Z}$ et x_i est un point de X.

On dit que α est *n-dimensionnel* (resp. *n-codimensionnel*) si pour tout indice $i \in I$ tel que $n_i \neq 0$, $x_i \in X_{(n)}$ (resp. $x_i \in X^{(n)}$). On dit que α est *effectif* si pour tout $i \in I$, $n_i \geq 0$.

On note $Z(X)$ (resp. $Z_n(X)$, $Z^n(X)$) le groupe des cycles algébriques (resp. n-dimensionnels, n-codimensionnels) de X.

On dit encore 0-*cycle* pour « cycle 0-dimensionnel » et *diviseur* pour « cycle 1-codimensionnel ».

Remarque II.11. — Dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$, un cycle est donc une combinaison linéaire d'idéaux premiers de A.

Définition II.22. — Soit $\alpha = \sum_{i \in I} n_i . x_i$ un cycle de X. On définit le *support* de α comme le fermé de X

$$Z = \bigcup_{i \in I, n_i \neq 0} \overline{\{x_i\}}$$

adhérence des points qui apparaissent avec un coefficient non nul.

On considère le support Z d'un cycle de X comme un sous-schéma fermé de X, munit de sa structure réduite canonique (*cf.* II.13).

Exemple II.15. — Dans le cas $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\alpha = \sum_{i \in \Lambda} n_i . \mathfrak{p}_i$, le support de α est la partie fermée $V(\mathfrak{a})$ où $\mathfrak{a}$ est la racine de l'idéal

$$\prod_{i \in I, n_i \neq 0} \mathfrak{p}_i .$$

Remarque II.12. — Tautologiquement, α est n-dimensionnel (resp. n-codimensionnel) si et seulement si son support est *équidimensionnel de dimension n* (resp. de *codimension pure n* dans X).

II.3.1.a. — Rappelons qu'un point d'un schéma X est générique si et seulement si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est artinien (théorème II.7), ou de manière équivalente de longueur finie (corollaire II.9.1).

Définition II.23. — On associe à tout sous-schéma fermé Z de X un cycle

$$\langle Z \rangle_X = \sum_{x \in Z^{(0)}} \mathrm{lg}(\mathcal{O}_{Z,x}) . x .$$

L'entier $\mathrm{lg}(\mathcal{O}_{Z,x})$ est encore appelé la *multiplicité (géométrique)* de x dans Z.

Le support de $\langle Z \rangle_X$ est Z_{red}. Ainsi, lorsque Z est de codimension pure (resp. équidimensionnel de dimension) n, $\langle Z \rangle_X$ est n-codimensionnel (resp. n-dimensionnel).
Tout cycle α de X admet une unique écriture de la forme

$$\alpha = \sum_{i \in I} n_i . \langle Z_i \rangle_X$$

où n_i est un entier non nul et Z_i est un sous-schéma fermé intègre de X. On l'appelle la *forme normale* du cycle α.

Exemple II.16. — Soit A un anneau noethérien, $X = \operatorname{Spec}(A)$. A tout élément régulier $f \in A$, on associe un diviseur de X :

$$\operatorname{div}(f) = \langle V(f) \rangle_X .$$

Le fermé $V(f)$ est purement de codimension 1 (*cf.* exemple II.13). Il en résulte que $\operatorname{div}(f)$ est un diviseur ; on peut l'écrire en toute généralité

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{\mathfrak{p} \in X^{(1)}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(f).\mathfrak{p}$$

où l'on a posé $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(f) = \lg(A_{(\mathfrak{p})}/(f))$, $A_{(\mathfrak{p})}$ désignant l'anneau localisé de A en l'idéal premier $\mathfrak{p}$.

3.2. Image directe et degré. —

II.3.2.a. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas. A tout point y de Y, d'image $x = f(y)$ dans X, est associé un morphisme

$$\kappa(x) \to \kappa(y)$$

des corps résiduels respectifs de x et y. On l'appelle *l'extension rédiduelle* de f en y ; le degré de cette extension est encore appelé le *degré résiduel* de f en y.

Définition II.24. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme, et

$$\alpha = \sum_{i \in I} n_i.y_i$$

un cycle de Y. On définit le cycle image directe de α par f par la formule :

$$f_*(\alpha) := \sum_{i \in I} n_i.d_i.f(y_i)$$

où pour tout indice $i \in I$, d_i est le degré résiduel de f en y si il est fini et 0 dans le cas contraire.

Exemple II.17. — Si $i : Y \to X$ est une immersion, le degré résiduel de i en tout point de y est 1 : le morphisme i_* correspond donc à voir un cycle de Y comme un cycle de X.

Ainsi, pour tout sous-schéma fermé intègre Z de Y, $i_*(\langle Z \rangle_Y) = \langle \bar{Z} \rangle_X$, où $\bar{Z}$ désigne l'adhérence de Z dans X, munie de sa structure réduite.

Exemple II.18. — Soit k un corps et X un k-schéma de type fini, $f : X \to \operatorname{Spec}(k)$ son morphisme structural.

Alors, le morphisme $f_* : Z(X) \to Z(\operatorname{Spec}(k)) = \mathbb{Z}$ se factorise par le groupe $Z_0(X)$ des 0-cycles de X. En effet, d'après le théorème II.8, si x est un point de X et Z désigne son adhérence dans X, $\dim(Z) = \operatorname{degtr}_k(\kappa(x))$. Comme $\kappa(x)$ est une k-algèbre essentiellement de type fini, l'extension $\kappa(x)/k$ est finie si et seulement si Z est de dimension nulle. Si $\alpha = \sum_i n_i.x_i$ est un 0-cycle, on obtient

$$f_*(\alpha) = \sum_i n_i.[\kappa(x_i) : k].$$

Cet entier est appelé le *degré* du 0-cycle α.

Proposition II.13. — *Pour tous morphismes de schémas*

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X,$$

on a la relation : $g_* f_* = (gf)_*$.

C'est évident par transitivité des degrés des extensions résiduelles.

II.3.2.b. — On fera attention que $f_* : Z(Y) \to Z(X)$ ne respecte pas toujours la dimension des cycles.

Par exemple, si V est un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K, $X = \operatorname{Spec}(V)$, $U = \operatorname{Spec}(K)$ et $f = j : U \to X$ est l'immersion ouverte évidente, $U = \{x\}$ où x est le point générique de X. Le cycle $\alpha' = x$ est 0-dimensionnel dans U, car $\dim(U) = 0$, et pourtant $j_*(\alpha')$ est 1-dimensionnel dans X car x est le point générique de X et $\dim(X) = 1$.

Fixons un corps k. Voici les cas principaux où l'image directe préserve la dimension des cycles :

1. $j : U \to X$ est une immersion ouverte entre k-schémas algébriques.
2. $f : Y \to X$ est un morphisme propre et X est universellement caténaire.[11]
3. $f : Y \to X$ est un morphisme séparé de type fini entre k-schémas algébriques.

Le point 1 résulte du fait que si x est un point d'un k-schéma algébrique X, d'adhérence Z dans X, $\dim(Z) = \operatorname{degtr}_k(\kappa(x))$ d'après la proposition II.8. On obtient facilement le point 2 à partir du théorème suivant :

Théorème II.14. — *Soit X (resp. Y) un schéma irréductible de point générique x (resp. y). Soit $f : Y \to X$ un morphisme propre tel que $f(y) = x$. Alors, on a l'inégalité :*

$$\dim(Y) \leq \dim(X) + \operatorname{degtr}(\kappa(y)/\kappa(x)).$$

En outre, il y a égalité si X est universellement caténaire.

Cela résulte de [**ÉGA** IV, 5.6.5].

Le point 3 finalement est une conjonction des points 1 et 2 et du théorème de Nagata : tout X-schéma séparé de type fini est un ouvert d'un X-schéma propre (*cf.* [**Con07**]).

3.3. Image inverse. —

Définition II.25. — On dit qu'un morphisme de schémas $f : Y \to X$ est *plat* si pour tout point y de Y, il existe un voisinage ouvert $V = \operatorname{Spec}(B)$ (resp. $U = \operatorname{Spec}(A)$) de y dans Y (resp. $x = f(y)$ dans X) tel que $f(V) \subset U$ et le morphisme induit $A \to B$ est plat.

Il revient au même de demander que pour tout point y, la fibre de f en y

$$\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$$

est une extension plate.

Définition II.26. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme plat. Soit $\alpha = \sum_{i \in I} n_i.\langle Z_i \rangle_X$ un cycle de X sous forme normale. On définit l'image inverse de α par f comme le cycle

$$f^*(\alpha) = \sum_{i \in I} n_i.\langle Y \times_X Z_i \rangle_Y.$$

Exemple II.19. — Si $f = j : U \to X$ est une immersion ouverte, $j^*(\alpha) = \sum_{i \in I | x_i \in U} n_i.x_i$ est encore appelé la restriction du cycle α à U. Si α' est un cycle sur U, $j^* j_*(\alpha') = \alpha'$. Si Z est le fermé complémentaire de U dans X, muni de sa structure réduite, on obtient trivialement une suite exacte courte :

$$Z(Z) \xrightarrow{i_*} Z(X) \xrightarrow{j^*} Z(U) \to 0.$$

Proposition II.15. — *Soit Z un sous-schéma fermé de X et $f : Y \to X$ un morphisme plat. Alors,*

$$f^*(\langle Z \rangle_X) = \langle Y \times_X Z \rangle_Y.$$

Démonstration. — On utilise le lemme suivant :

[11] *i.e.* X est caténaire (definition II.18) et tout X-schéma de type fini est caténaire.

Lemme II.16. — *Dans les conditions de la proposition, tout point générique de $T = f^{-1}(Z)$ s'envoie sur un point générique de Z.*

Démonstration. — Soit t un point générique de $f^{-1}(Z)$. On montre que $z = f(t)$ est maximal parmis les points de Z. Or le morphisme

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,t}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,z})$$

est surjectif d'après la proposition II.11. Soit z' est un élément maximal de Z tel que $z' \geq z$. Alors, $z' \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,z})$; on en déduit donc un élément t' de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,t})$ tel que $f(t') = z'$. Alors, $t' \geq t$ et $t' \in f^{-1}(Z)$ et que t est maximal parmis les points de $f^{-1}(Z)$, on en déduit $t = t'$ et $z = f(t) = f(t') = z'$. □

Soit t un point générique de $T = f^{-1}(Z)$ et $z = f(t)$ son image dans Z. On note $B = \mathcal{O}_{T,t}$ et $A = \mathcal{O}_{Z,z}$ les anneaux locaux respectifs. Calculant la multiplicité de t dans les deux cycles de la formule à démontrer, on se ramène à prouver l'égalité :

$$\lg(A).\lg(A \otimes_B \kappa(t)) = \lg(B).$$

C'est précisément l'égalité de la proposition II.12. □

On peut préciser le lemme obtenu dans cette preuve :

Proposition II.17. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme plat de schémas.*

Alors, pour tout fermé irréductible Z de X, toute composante irréductible T de $f^{-1}(Z)$ domine Z et vérifie l'égalité

$$\mathrm{codim}_Y(T) = \mathrm{codim}_X(Z).$$

Cela résulte du fait que si $\rho : A \to B$ est un morphisme local d'anneaux locaux,

$$\dim(B) \leq \dim(A) + \dim(B \otimes_A k)$$

où k est le corps résiduel de A – *cf.* [**Bou83**, VIII, §3, n° 4, cor. 1, prop. 7].

Remarque II.13. — Dans le cas où f n'est pas plat, si T domine Z, on a seulement une inégalité $\mathrm{codim}_Y(T) \leq \mathrm{codim}_X(Z)$.

3.4. Formule de projection. —

Proposition II.18. — *Considérons un carré cartésien de schémas*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

tel que g est plat.

Alors, pour tout cycle $\alpha \in Z(Y)$,

$$g^* f_*(\alpha) = f'_* g'^*(\alpha).$$

Démonstration. — Par linéarité, on peut supposer que $\alpha = \langle T \rangle$ pour un fermé irréductible T de Y de point générique t. Soit Z l'adhérence réduite de $z = f(t)$ dans X, et d le degré de l'extension résiduelle $\kappa(t)/\kappa(z)$. Il s'agit de montrer l'égalité :

$$d.\langle Z \times_X X' \rangle_{X'} = f'_*(\langle T \times_Y Y' \rangle_{Y'}). \tag{II.12}$$

Or, $T \subset f^{-1}(Z)$. Quitte à considérer le carré $\Delta \times_X Z$ obtenu par restriction au-dessus de Z, on peut supposer que $X = Z$ (les cycles de l'équation (II.12) sont en effet à support dans $Z \times_X X'$).

Puisque α est un cycle de T et que $T \times_Y Y' = T \times_X X'$, on peut aussi supposer que $Y = T$ et l'équation (II.12) devient :

$$d.\langle X'\rangle = f'_*(\langle Y \times_X X'\rangle). \tag{II.13}$$

Le morphisme f est donc dominant entre schémas irréductibles.

L'anneau local de X (resp. Y) en z (resp. en t) est donc son corps des fonctions, que nous notons K (resp. L). Les multiplicités de l'équation (II.13) ne changent pas si on se restreint à un ouvert dense de X. On peut donc supposer que $X = \mathrm{Spec}(K)$ par changement de base, ce qui implique que $Y = \mathrm{Spec}(L)$.

Il suffit maintenant de prouver l'égalité (II.13) en remplaçant X' par son localisé en chacun de ses points génériques. Autrement dit, on peut supposer que $X' = \mathrm{Spec}(A)$, où A est une K-algèbre locale artinienne. Dans ce cas, $Y' = \mathrm{Spec}(B)$ où $B = A \otimes_K L$.

Soit E le corps résiduel de A. D'après la proposition II.12, on obtient encore :

$$f'_*(\langle \mathrm{Spec}(A \otimes_K L)\rangle) = \lg(A).f'_*(\langle \mathrm{Spec}(E \otimes_K L)\rangle).$$

On est donc finalement ramené au cas où $A = E$ et le carré Δ est de la forme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(E \otimes_K L) \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & \mathrm{Spec}(L) \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(E) \arrow[r, "g"] & \mathrm{Spec}(K) \end{tikzcd}$$

Cela résulte alors de la proposition II.10 appliquée au morphisme $E \to E \otimes_K L$ et au module trivial $M = E \otimes_K L$. $\square$

Rappelons la proposition suivante ([**Bou83**, II, §3, n° 2, cor. 2 de prop. 5]) :

Proposition II.19. — *Soit A un anneau local noethérien. Les conditions suivantes sur un A-module M de type fini sont équivalentes :*

(i) *M est plat sur A.*

(ii) *M est libre sur A.*

On obtient comme corollaire de cette proposition le résultat suivant :

Proposition II.20. — *Soit Y un schéma irréductible, $f : Y \to X$ un morphisme plat (II.25) et fini (II.10). Soit d le degré résiduel de f au point générique de Y (II.3.2.a).*
Alors, pour tout cycle α de X, $f_*f^*(\alpha) = d.\alpha$.

Démonstration. — On a vu que $\overline{f(Y)}$ est une composante irréductible de X. Par définition de f^*, on peut remplacer X par cette composante irréductible, munie de sa structure réduite. Ainsi, X est intègre. On en déduit que Y est réduit, donc intègre.
Par linéarité, on peut supposer que $\alpha = x$ pour un point x de X. Quitte à travailler au voisinage de x dans X, on peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ pour $A = \mathcal{O}_{X,x}$. Comme Y/X est plat fini, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ où B est une A-algèbre finie plate, et le morphisme f correspond à un morphisme injectif $\rho : A \to B$. Par hypothèse, le morphisme induit sur les corps des fractions $K \to L$ est de degré d. Comme A est local, on déduit de la proposition précédente que $B = A^n$ pour un entier $n > 0$. Or $B \otimes_A K = L$, donc $n = d$.
Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, qui correspond donc au point fermé x de X. Alors,

$$B/\mathfrak{m}.B = B \otimes_A A/\mathfrak{m} = (A/\mathfrak{m})^d.$$

Autrement dit, $\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{m}.B)$ est une somme de d points fermés $\{y_1, \ldots, y_d\}$ de Y dont les corps résiduel sont isomorphes à $A/\mathfrak{m}$ (*i.e.* $f(y_i) = x$ et l'extension résiduelle de f en y_i est triviale). On en déduit par le calcul :

$$f_*f^*(x) = f_*(\langle B \otimes_A A/\mathfrak{m}\rangle_Y) = f_*\left(\sum_{i=1}^d y_i\right) = \sum_{i=1}^d f_*(y_i) = d.x.$$

□

4. Diviseurs

4.1. Ordre et fonctions rationnelles. — Soit A un anneau noethérien, $X = \mathrm{Spec}(A)$. A tout élément régulier $f \in A$, on associe un diviseur de X :

$$\mathrm{div}(f) = \langle V(f)\rangle_X.$$

Si f n'est pas une unité, le fermé $V(f)$ est purement de codimension 1 (*cf.* exemple II.13). Il en résulte que $\mathrm{div}(f)$ est un diviseur ; on peut l'écrire en toute généralité

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{\mathfrak{p}\in X^{(1)}} \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f).\mathfrak{p}$$

où l'on a posé $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f) = \lg(A_{\mathfrak{p}}/(f))$, $A_{\mathfrak{p}}$ désignant l'anneau localisé de A en l'idéal premier $\mathfrak{p}$ (cette expression garde un sens même si f est une unité, auquel cas, $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f) = 0$ pour tout $\mathfrak{p}$).

Proposition II.21. — *Soit f, g des éléments réguliers de A.*
Alors, fg est régulier dans A et on a :

$$\mathrm{div}_A(fg) = \mathrm{div}_A(f) + \mathrm{div}_A(g).$$

Démonstration. — Par définition, il suffit de considérer le cas où A est un anneau local de dimension 1 et de montrer la relation :

$$\lg(A/fg.A) = \lg(A/f.A) + \lg(A/g.A).$$

Or, puisque g n'est pas diviseur de 0 dans A, $g.A/fg.A$ est isomorphe à $A/f.A$. L'égalité résulte donc de la suite exacte courte de A-modules :

$$0 \to g.A/fg.A \to A/fg.A \to A/g.A \to 0.$$

□

Exemple II.20. — Si A est un anneau de valuation discrète, $v : A \to \mathbb{N}$ sa valuation et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, pour tout $f \in A$,

$$\mathrm{div}(f) = v(f).\mathfrak{m}.$$

En effet, il suffit d'après la proposition précédente de remarquer que si π est une uniformisante de V, $\mathrm{div}(\pi) = 1$.

II.4.1.a. — Rappelons que l'anneau total des fractions de A est l'anneau $R = S^{-1}A$ où S est la partie multiplicative formée des éléments réguliers. Si A est intègre, c'est le corps des fractions de A. En général, c'est un anneau artinien (car A est noethérien). (c'est un corps si $\mathrm{Spec}(A)$ est irréductible, un produit fini de corps si A est réduit et un anneau artinien en général).

Il résulte de la proposition précédente que l'on peut étendre l'application div à l'anneau R par la formule :

$$\mathrm{div}_A\left(\frac{f}{g}\right) = \mathrm{div}_A(f) - \mathrm{div}_A(g).$$

Exemple II.21. — Considérant le cadre de l'exemple précédent, l'anneau total des fractions de A est son corps des fractions K. Pour tout élément non nul f de K,

$$\mathrm{div}_A(f) = v(f).\mathfrak{m}.$$

II.4.1.b. — Supposons que A est un anneau intègre, intégralement clos dans son corps des fractions K – autrement dit, un anneau *normal*. Pour tout idéal $\mathfrak{p}$ de A de hauteur 1, l'anneau local $A_\mathfrak{p}$ est normal noethérien de dimension 1 ; c'est donc un anneau de valuation discrète (voir par exemple [**Ser65**, III-12, prop. 8]), correspondant à une valuation $v_\mathfrak{p}$. Pour tout élément $f \in K$, on déduit donc de l'exemple précédent :

$$\mathrm{div}_A(f) = \sum_{\mathfrak{p}\in X^{(1)}} v_\mathfrak{p}(f).\mathfrak{p}.$$

Plus généralement, on peut démontrer la proposition suivante :

Théorème II.22. — *Soit A un anneau intègre de corps des fractions K, B sa cloture intègrale dans K. On suppose que B est finie sur A.*[(12)]
Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ et $\varphi : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ le morphisme canonique.

Alors, pour tout $f \in K^\times$ et tout $\mathfrak{p} \in X^{(1)}$, on obtient :

$$\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(f) = \sum_{\mathfrak{q}\in\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} v_\mathfrak{q}(f).[\kappa(\mathfrak{q}) : \kappa(\mathfrak{p})]. \tag{II.14}$$

Démonstration. — La cloture intégrale de $A_\mathfrak{p}$ est l'anneau $B \otimes_A A_\mathfrak{p}$. Les deux membres de l'équation II.14 ne change pas si l'on remplace A par $A_\mathfrak{p}$ et B par $B \otimes_A A_\mathfrak{p}$; on peut donc supposer que A est un anneau intègre local de dimension 1.
On peut supposer que f appartient à $A^\times$ car les deux membres de (II.14) transforment un produits en une sommes. Considérons l'inclusion canonique $\rho : A \to B$, $g = \rho(f)$. On obtient alors un diagramme commutatif de A-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\gamma_f"] \arrow[d, "\rho"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & A/(f) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\gamma_g"] & B \arrow[r] & B/(g) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où γ_f (resp. γ_g) est la multiplication par f dans A (resp. g dans B) et les suites horizontales sont exactes. Notant K (resp. C) le noyau (resp. conoyau) de σ, on déduit du lemme du serpent une suite exacte de A-modules :

$$0 \to K \to B/A \to B/A \to C \to 0.$$

Or, B/A est un A-module de type fini, donc le support est réduit au point fermé $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(A)$. Il est donc de longueur finie sur A (*cf.* III.5.3). On déduit donc de l'exemple II.14 et de la suite exacte précédente l'égalité : $\mathrm{lg}_A(K) = \mathrm{lg}_A(C)$. On en déduit de même :

$$\mathrm{lg}_A(A/(f)) = \mathrm{lg}_A(B/(g)).$$

D'après le théorème de Cohen-Seidenberg, B est un anneau de dimension 1 (voir [**Bou83**, VIII, §2, n° 3, th.1]). Il en résulte que $V(g) = \mathrm{Spec}(B/(g))$, qui est purement de codimension 1 dans Y d'après l'exemple II.13, est nécessairement de dimension 0 d'après l'inégalité (II.5) de II.2.2.a. Dès lors, en tant qu'annean, $B/(g)$ est artinien, et il est de plus produit de ses composantes locales :

$$B/(g) = \prod_{\mathfrak{q}\in Y^{(1)}} B_\mathfrak{q}/(g).$$

On en déduit :

$$\mathrm{lg}_A(B/(g)) = \sum_{\mathfrak{q}\in Y^{(1)}} \mathrm{lg}_A(B_\mathfrak{q}/(g)).$$

(12) Lorsque cette propriété est vérifiée, on dit encore que A est *japonais*. Comme exemple d'anneaux japonais, citons les $\mathbb{Z}$-algèbres et les k-algèbres de type fini, pour un corps k.

Notons au passage que l'ensemble fini $Y^{(1)}$ est égal à l'ensemble des points fermés de Y qui est aussi l'ensemble des idéaux premiers de B au-dessus de $\mathfrak{p}$ par une nouvelle application du théorème de Cohen-Seidenberg : $Y^{(1)} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ (voir plus précisément [**Bou83**, V, §2, n° 1, th. 1]). Appliquant finalement la proposition II.10 au morphisme local $A \to B_{\mathfrak{q}}$ et au $B_{\mathfrak{q}}$-module de longueur finie $B_{\mathfrak{q}}/(g)$, on obtient la formule attendue. □

Ce théorème se généralise au cas où A est noethérien quelconque, quitte à supposer que pour tout idéal premier minimal π de A, la normalisation de $(A_\pi)_{red}$ est finie sur $(A_\pi)_{red}$.

II.4.1.c. — Considérons deux anneaux intègres A et B de corps des fractions respectifs K et L, ainsi qu'un morphisme injectif $\rho : A \to B$. Soit $p : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ le morphisme induit par ρ.

Si B/A est finie, l'extension induite L/K est finie. Alors, pour tout $g \in L^\times$, on obtient

$$p_*(\mathrm{div}_B(g)) = \mathrm{div}_A(N_{L/K}(g)).$$

Si B/A est plate, alors pour tout $f \in A^\times$,

$$p^*(\mathrm{div}_A(f)) = \mathrm{div}_B(\rho(f)). \tag{II.15}$$

4.2. Equivalence rationnelle. —

II.4.2.a. — Considérons un anneau noethérien A, $X = \mathrm{Spec}(A)$ le schéma associé.

Soit $\mathfrak{q}$ est un point de X. Posons $Z = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{q})$, et considérons l'immersion fermée canonique $i : Z \to X$. Le corps résiduel $\kappa(\mathfrak{q})$ de $\mathfrak{q}$ dans X est encore le corps des fractions de l'anneau intègre $A/\mathfrak{q}$. On peut donc associer à tout élément inversible f de $\kappa(\mathfrak{q})$ son diviseur dans Z :

$$\mathrm{div}_{A/\mathfrak{q}}(f) \in Z^1(Z).$$

Rappelons qu'on a introduit un morphisme canonique $i_* : Z(Z) \to Z(X)$ (*cf.* definition II.24) – ce morphisme est l'injection évidente. On en déduit donc un morphisme canonique :

$$\partial_X^{\mathfrak{q}} : \kappa(\mathfrak{q})^\times \to Z(X), f \mapsto i_*(\mathrm{div}_{A/\mathfrak{q}}(f)).$$

Pour tout entier $q \geq 0$, on introduit un groupe abélien

$$Z(X, \mathbb{G}_m) = \bigoplus_{\mathfrak{q} \in X} \kappa(\mathfrak{q})^\times$$

et on peut définir un morphisme canonique :

$$d_X : Z(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sum_{\mathfrak{q} \in X} \partial_X^{\mathfrak{q}}} Z(X). \tag{II.16}$$

Définition II.27. — Avec les notations ci-dessus, on définit le *groupe de Chow* de X comme le conoyau du morphisme d_X ci-dessus. On le note $\mathrm{CH}(X)$.

On note encore $\mathrm{Rat}(X)$ l'image de d_X. On dit que deux cycles α et β de X sont *rationnellement équivalents* si $\alpha - \beta$ appartient à $\mathrm{Rat}(X)$.

Evidement, $\mathrm{CH}(X) = Z(X)/\mathrm{Rat}(X)$. On a vu que le groupe des cycles de X admet deux graduations. Comme $CH(X)$ en est un quotient, il admet lui aussi deux graduations.

Remarque II.14. — On fera attention toutefois que si $\mathfrak{q} \in X^{(n-1)}$ et $f \in \kappa(\mathfrak{q})^\times$, on n'a pas nécessairement $d_X(f) \in X^{(p)}$. Pour le voir, posons $Z = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{q})$ et notons $i : Z \to X$ l'immersion fermée canonique. Alors, $d_X(f)$ est d'après la définition précédente un cycle de Z, somme de points z de codimension 1 dans Z. Mais en général, bien que Z soit irréductible de codimension $n-1$ dans X, z n'est pas nécessairement de codimension n dans X. Posant $T = \overline{\{z\}}$, on se rappelle en effet que l'inégalité

$$\mathrm{codim}_X(T) \geq \mathrm{codim}_X(Z) + \mathrm{codim}_Z(T) = n$$

peut être stricte (*cf.* équation (II.6) de II.2.2.a).

Si X est caténaire par contre, il y a égalité dans l'équation précédente, de sorte que si l'on pose

$$Z^m(X, \mathbb{G}_m) = \bigoplus_{\mathfrak{q} \in X^{(m)}} \kappa(\mathfrak{q})^\times,$$

le morphisme d_X induit un morphisme canonique

$$d_X : Z^{n-1}(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sum_{\mathfrak{q} \in X} \partial_X^{\mathfrak{q}}} Z^n(X).$$

II.4.2.b. — Considérons un morphisme plat $\rho : A \to B$ et notons $p : Y \to X$ le morphisme de schémas associé. On a vu dans le lemme II.16 que pour tout point $\mathfrak{q}$ de X, $Z = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{q})$, l'ensemble $p^{-1}(\{\mathfrak{q}\})$ est formé des points génériques de $p^{-1}(Z)$. Pour tout point $\mathfrak{q}' \in Y$, on note $p_{\mathfrak{q}'} : \kappa(\mathfrak{q}) \to \kappa(\mathfrak{q}')$ le morphisme résiduel de p en $\mathfrak{q}'$. On peut alors définir un morphisme canonique

$$\kappa(\mathfrak{q})^\times \to \bigoplus_{\mathfrak{q}'/\mathfrak{q}} \kappa(\mathfrak{q}')^\times, f \mapsto \sum_{\mathfrak{q}'} p_{\mathfrak{q}'}(f).$$

qui induit a son tour un morphisme canonique

$$p^* : Z(X, \mathbb{G}_m) \to Z(Y, \mathbb{G}_m).$$

La proposition suivante repose essentiellement sur la formule (II.15) :

Proposition II.23. — *Avec les notations précédentes, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} Z(X, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "p^*"'] & Z(X) \arrow[d, "p^*"] \\ Z(Y, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "d_Y"] & Z(Y). \end{tikzcd}$$

Remarque II.15. — Notons qu'avec les définitions de la remarque II.14, le morphisme $p^* : Z^*(X, \mathbb{G}_m) \to Z^*(Y, \mathbb{G}_m)$ est homogène de degré 0 comte tenu de la proposition II.17. Ainsi, si X est caténaire, tous les morphismes du diagramme ci-dessus sont compatibles à la graduation par la codimension est on en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z^{n-1}(X, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "p^*"'] & Z^n(X) \arrow[d, "p^*"] \\ Z^{n-1}(Y, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "d_Y"] & Z^n(Y). \end{tikzcd}$$

4.3. Le cas des schémas. —

II.4.3.a. — Considérons un schéma noethérien X. On définit comme dans le cas affine un groupe abélien :

$$Z(X, \mathbb{G}_m) = \bigoplus_{x \in X} \kappa(x)^\times.$$

Considérons un point x de X et un élément f de $\kappa(x)^\times$. Soit U un voisinage ouvert affine de x dans X. Alors, f appartient encore au groupe $Z(U, \mathbb{G}_m)$, et l'on peut définir $d_X(f) = j_*(d_U(f))$ où $j : U \to X$ est l'immersion ouverte canonique. D'après la proposition II.23, cet élément ne dépend pas du voisinage ouvert affine choisi. On définit donc un morphisme canonique :

$$d_X : Z(X, \mathbb{G}_m) \to Z(X). \tag{II.17}$$

Définition II.28. — Avec les notations ci-dessus, Soit X un schéma noethérien. On définit le *groupe de Chow* du schéma X comme le conoyau du morphisme d_X ci-dessus. On le note $\mathrm{CH}(X)$.

On note encore $\mathrm{Rat}(X)$ l'image de d_X. On dit que deux cycles α et β de X sont *rationnellement équivalents* si $\alpha - \beta$ appartient à $\mathrm{Rat}(X)$.

Cette definition prolonge évidemment le cas affine.

La groupe de Chow d'un schéma admet deux graduations, l'une par la codimension et l'autre par la dimension. La remarque II.14 montre par ailleurs que, si X est caténaire (auquel cas tout ouvert de X est caténaire), le morphisme (II.16) est compatible à la graduation par la codimension et induit pour tout entier $n \geq 0$ un morphisme :

$$d_X : Z^{n-1}(X, \mathbb{G}_m) \to Z^n(X).$$

Références

[Bou83] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4 - Chapitres 5 à 7 - Chapitres 8 et 9*, Masson, 1985 - 1985 - 1983.

[CL99] A. Chambert-Loir – « Algèbre commutative et introduction à la géométrie algébrique », `http://perso.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir/publications/teach/Dea99.pdf`, 1999.

[Con07] B. Conrad – « Deligne's notes on Nagata compactifications », *J. Ramanujan Math. Soc.* **22** (2007), no. 3, p. 205–257.

[Ful98] W. Fulton – *Intersection theory*, second éd., Springer, 1998.

[Ser65] J.-P. Serre – *Algèbre locale. Multiplicités*, Cours au Collège de France, 1957–1958, rédigé par Pierre Gabriel. Seconde édition, 1965. Lecture Notes in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

2009-2010

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* `deglise@math.univ-paris13.fr`
Url : `http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/`