Table des matières

COURS XI
FAISCEAUX HOMOTOPIQUES ET COMPLEXES MOTIVIQUES

1. Théorème fondamental des faisceaux homotopiques

1.1. Enoncé. — Le théorème suivant est le résultat clé de la théorie de Voevodsky sur un corps parfait :

Théorème XI.1. — *Soit k un corps parfait et F un faisceau homotopique sur k.*
Alors, pour tout entier $i > 0$, $H^i(.,F)$ est invariant par homotopie (autrement dit, F est $\mathbb{A}^1$-local : cf. *IX.12).*

Notons que ce théorème est une généralisation du théorème X.10 compte tenu de la remarque X.8. Dans les paragraphes qui suivent, on donne l'ingrédient clé de la démonstration de ce théorème : un résultat de pureté pour les faisceaux homotopiques (*cf.* paragraphe XI.1.3.b). Pour la preuve complète, on réfère le lecteur à [**Dég07**, section 4.5.4].

1.2. Paires fermées et excision. — Pour les définition qui suivent, on fixe un schéma S. Tous les S-schémas qui apparaissent sont supposés séparés de type fini.

Définition XI.1. — 1. On appelle *paire ouverte (*resp. *fermée)* toute couple (X, Y) de schémas tel que X est un S-schéma lisse et Y est un sous-schéma ouvert (resp. fermé) de X.
2. On dit qu'une paire fermée (X, Y) est *lisse* (resp. *de codimension* n) si Y est lisse sur S (resp. purement de codimension n dans X).
3. Un morphisme de paires ouvertes (resp. fermées) est simplement un carré commutatif,

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

que l'on note (f, g). Si ce carré est cartésien, on dit que (f, g) est *cartésien.*

Remarque XI.1. — Pour un morphisme cartésien $(f, g) : (X', Y') \to (X, Y)$, on abrégera souvent (f, g) en f en posant $f_Y := g$. De plus, si (P) est une propriété des morphismes de schémas stable par changement de base, on dira que (f, g) vérifie la propriété (P) si et seulement si f vérifie (P).

XI.1.2.a. — Pour différencier la notion de paire fermée et de paire ouverte, on note (X/Y) les paires ouvertes.

Notons qu'à toute paire fermée (X, Z), il correspond une unique paire ouverte $(X/X - Z)$, mais la réciproque n'est pas vraie, puisque Z peut ne pas être réduit.

Définition XI.2. — On appelle *pseudo-morphisme* de paires fermées tout morphisme entre les paires ouvertes correspondantes.

Soit $(f, g) : (Y, T) \to (X, Z)$ un morphisme de paires fermées. On dit que :

1. (f, g) est *quasi-cartésien* si le morphisme canonique $T \to Z \times_X Y$ est un épaississement.[(1)]
2. (f, g) est *excisif* si
   (a) (f, g) est quasi-cartésien.
   (b) f est étale.
   (c) $g_{red} : T_{red} \to Z_{red}$ est un isomorphisme.

Remarque XI.2. — Considérons un morphisme $(f, g) : (Y, T) \to (X, Z)$ de paires fermées et posons $U = X - Z$, $W = Y - T$, munis de leur structure canonique de sous-schéma ouvert. Il résulte de nos définitions que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) (f, g) est excisif.

(ii) (f, g) est un pseudo-morphisme et le carré commutatif qui s'en déduit

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

est Nisnevich distingué (*cf.* définition VII.9).

XI.1.2.b. — Par la suite, étant donnée une immersion fermée $i : Z \to X$, on identifiera Z au sous-schéma fermé $i(Z)$ de X et on notera simplement (X, Z) la paire fermée qui se déduit de cette identification.

Proposition XI.2. — *Considérons un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

où i, j sont des immersions fermées, et f, g des morphismes étales.

Alors il existe un ouvert canonique Ω de $X \times_S X'$, muni d'une immersion fermée $\iota : Z \to \Omega$ qui s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "\iota"] \arrow[drr, bend left, "i"] \arrow[ddr, bend right, "j"'] & & \\ & \Omega \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d] \\ & X' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

et tel que les morphismes induits

$$(X', Z) \xleftarrow{q} (\Omega, Z) \xrightarrow{p} (X, Z)$$

soient (cartésiens) excisifs.

[(1)] *i.e.* une immersion fermée d'idéal nilpotent : localement de la forme $\mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}(A)$ où I est un idéal de A tel que $I^n = 0$ pour un entier $n > 0$.

Démonstration. — Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "i"] \arrow[ddr, bend right, "j"'] & & \\
& X \times_S X' \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "f"] \\
& X' \arrow[r, "g"] & S.
\end{tikzcd}$$

Il suffit de trouver un ouvert $\Omega \subset X \times_S X'$ tel que les image réciproques de Z dans Ω par p et q soient égales à $k(Z)$. Considérons encore le diagramme de schémas suivant obtenu par pullback :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "k'"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, equal] & & \\
& q^{-1}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "q'"] & X \times_S X' \arrow[d, "q"] \\
& Z \arrow[r, "j"] & X'.
\end{tikzcd}$$

Puisque f est étale et séparé, q et q' sont étales et séparés. Ainsi, puisque k' est une section de q', c'est une immersion ouverte et fermée (*cf.* corollaire V.3.1). Il en résulte que $q^{-1}(Z) - k(Z)$ est un sous-schéma fermé de $q^{-1}(Z)$, donc de $X \times_S X'$. Par symétrie des rôles, $p^{-1}(Z) - k(Z)$ est fermé dans $X \times_S X'$.

On peut alors poser

$$\Omega = (X \times_S X') - \big((q^{-1}(Z) - k(Z)) \cup (p^{-1}(Z) - k(Z))\big) \tag{XI.1}$$

et la propriété attendue est claire. □

Définition XI.3. — Soit (X, Z) une paire fermée sur S. Une paramétrisation de (X, Z) sur S est un morphisme de paires fermées $(f, g) : (X, Z) \to (\mathbb{A}^{n+c}_S, \mathbb{A}^n_S)$ tel que :

1. n et c sont des entiers naturels.
2. $\mathbb{A}^n_S$ est vu comme un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^{n+c}_S$ à travers l'annulation des c premières coordonnées.
3. (f, g) est cartésien étale.

Remarque XI.3. — L'existence d'une paramétrisation $(X, Z) \to (\mathbb{A}^{n+c}_S, \mathbb{A}^n_S)$ implique que (X, Z) est une paire fermée lisse de codimension c. Réciproquement, si X et Z sont lisses sur S, pour tout point $x \in Z$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et une paramétrisation de $(U, Z \cap U)$ (*cf.* [**17.12.2**, EGA4]).

XI.1.2.c. — Soit (X, Z) une paire fermée munie d'une paramétrisation sur S :

$$(f, g) : (X, Z) \to (\mathbb{A}^{c+n}_S, \mathbb{A}^n_S).$$

On considère le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "s_0"] \arrow[d] & \mathbb{A}^c_Z \arrow[d, "g \times 1_{\mathbb{A}^c_S}"] \\
X \arrow[r] & \mathbb{A}^{c+n}_S.
\end{tikzcd}$$

où s_0 est la section nulle du fibré considéré. D'après la proposition XI.2, il existe donc une paire fermée (Ω, Z) et des morphismes excisifs :

$$(X, Z) \to (\Omega, Z) \leftarrow (\mathbb{A}^c_Z, Z). \tag{XI.2}$$

Remarque XI.4. — Le schéma Ω ainsi que le diagramme précédent sont naturels en (X, Z) par rapport aux morphismes cartésiens étales. Si $(p, q) : (Y, T) \to (X, Z)$ est un tel morphisme, la composée

$$(Y, T) \to (X, Z) \xrightarrow{(f,g)} (\mathbb{A}_S^{c+n}, \mathbb{A}_S^n)$$

est une paramétrisation de (Y, T) et si l'on note Ω' l'ouvert défini par la formule XI.1, on obtient un diagramme commutatif de paires fermées :

$$\begin{tikzcd}
(Y,T) \arrow[d, "(p,q)"'] & (\Omega',T) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbb{A}^c_T, T) \arrow[d, "(1\times_S q,q)"] \\
(X,Z) & (\Omega,Z) \arrow[l] \arrow[r] & (\mathbb{A}^c_Z, Z)
\end{tikzcd}$$

Rappelons que si s est un point d'un schéma X, on a noté $X^h_{(s)}$ le pro-schéma formé des voisinages Nisnevich de s dans X (*cf.* définition IX.5). La construction précédente admet le corollaire suivant :

Corollaire XI.2.1. — *Soit (X, Z) une paire fermée lisse sur S.*

Alors, pour tout point s de Z, si c désigne la dimension de l'anneau local de X en s, il existe un isomorphisme

$$X^h_{(s)} \simeq (\mathbb{A}^c_Z)^h_{(s)}$$

de pro-schémas sur S égal à l'identité sur Z^h_s.

De plus, un tel isomorphisme est déterminé de manière canonique par une paramétrisation de (X, Z).

Démonstration. — En effet, d'après la remarque XI.3 et la construction de XI.1.2.c, il existe un voisinage ouvert U de s dans X ainsi que des morphismes excisifs

$$(U, T) \to (\Omega, T) \leftarrow (\mathbb{A}^c_T, T)$$

où l'on a posé : $T = Z \cap U$. Par définition, Ω est donc un voisinage Nisnevich de s dans U (resp. de s dans $\mathbb{A}^c_T$) et cela conclut puisque :

$$X^h_{(s)} = U^h_{(s)} = \Omega^h_{(s)} = (\mathbb{A}^c_T)^h_{(s)} = (\mathbb{A}^c_Z)^h_{(s)}.$$

$\square$

Remarque XI.5. — On en déduit par exemple que toute immersion fermée $i : Z \to X$ entre S-schémas lisses de type fini admet localement pour la topologie de Nisnevich une rétraction. Plus précisément, pour tout point s de Z, il existe un voisinage Nisnevich V de s dans X et un S-morphisme $V \to V \times_X Z$ qui est une rétraction de l'immersion induite $V \times_S Z \to V$.

1.3. Pureté pour les diviseurs lisses. —

Définition XI.4. — Soit P un préfaisceau homotopique sur k.

On lui associe un préfaisceau homotopique noté P_{-1} grâce à la formule :

$$P_{-1}(X) := \operatorname{coKer}\left(P(\mathbb{A}^1_X) \xrightarrow{j^*} P(\mathbb{G}_{m,X})\right)$$

où j est l'immersion ouverte évidente.

Comme P est invariant par homotopie, on en déduit :

$$P_{-1}(X) = \operatorname{Ker}\left(P(\mathbb{G}_{m,X}) \xrightarrow{s^*} P(X)\right)$$

où s est la section unité du schéma en groupes $\mathbb{G}_{m,X}/X$. Il en résulte que si P est un faisceau homotopique, P_{-1} est un faisceau homotopique.

XI.1.3.a. — Considérons un faisceau homotopique F. Si X est un k-schéma lisse, on note X_{Nis} le site formé des X-schémas étales (séparés de type fini) muni de la topologie dont les recouvrements sont les recouvrements Nisnevich. On note $\mathscr{A}b_X^{Nis}$ la catégore des faisceaux abéliens sur X_{Nis}. Notons que cette catégorie jouie des mêmes propriétés que la catégorie $\mathscr{A}b_X$ introduite dans X.1.2.a.

On obtient un foncteur évident

$$X_{Nis} \to \mathscr{L}_k \to \mathscr{L}_k^{cor}$$

qui permet de restreindre F au site X_{Nis}. On note F_X cette restriction. Il est évident que F_X est un faisceau abélien sur X_{Nis}.

Considérons une paire fermée (X, Z) et $U = X - Z$ l'ouvert complémentaire. On note $i : Z \to X$ et $j : U \to X$ les immersions évidentes. Comme on l'a déjà vu (par exemple dans le cas du site X_{Zar}), on associe à ces immersions les couples suivants de foncteurs abjoints :

$$i^* : \mathscr{A}b_X^{Nis} \leftrightarrows \mathscr{A}b_Z^{Nis} : i_*, j^* : \mathscr{A}b_X^{Nis} \leftrightarrows \mathscr{A}b_U^{Nis} : j_*, j_! : \mathscr{A}b_U^{Nis} \leftrightarrows \mathscr{A}b_X^{Nis} : j^*.$$

Notons la propriété intéressante suivante :

Lemme XI.3. — *Soit G un faisceau abélien sur X_{Nis}. Alors, la suite suivante*

$$0 \to j_! j^*(G) \to G \to i_* i^*(G) \to 0$$

dont les morphismes non triviaux sont obtenus par adjonction est exacte courte dans $\mathscr{A}b_X^{Nis}$.

Démonstration. — En effet, pour vérifier l'exactitude de cette suite, il suffit de le faire sur la fibre Nisnevich en un couple (V, s) où $p : V \to X$ est un morphisme étale et s un point de V. Ce point résulte facilement de l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $p(s) \in \Omega$

(ii) $V_{(s)}^h \times_X \Omega = V_{(s)}^h$

(iii) $V_{(s)}^h \times_X \Omega^c = \varnothing$.

où (Ω, Ω^c) est le couple (U, Z) ou le couple (Z, U). □

D'après la proposition X.9, le morphisme obtenu par adjonction :

$$F_X \to j_* j^*(F_X) = j_*(F_U)$$

est un monomorphisme. Notons C le conoyau dans la catégorie $\mathscr{A}b_X^{Nis}$. On vérifie facilement la relation $j^* j_* = 1$. Du fait que j^* est exact, on déduit donc que $j^*(C) = 0$. Le lemme précédent montre donc que le morphisme canonique

$$C \to i_* i^*(C)$$

est un isomorphisme.

Définition XI.5. — Adoptant les notations précédentes, on définit un faisceau abélien sur X_{Nis} par la formule :

$$F_{(X,Z)} = i^*(C) = i^*[\mathrm{coKer}\big(F_X \to j_*(F_U)\big)].$$

On dispose donc d'une suite exacte courte :

$$0 \to F_X \to j_*(F_U) \to i_*\big(F_{(X,Z)}\big) \to 0 \qquad \text{(XI.3)}$$

Cette construction est naturelle par rapport aux morphismes cartésiens $(f, g) : (Y, T) \to (X, Z)$ de paire fermées : on obtient un morphisme canonique :

$$F_{(X,Z)} \to g_* F_{(Y,T)}.$$

Lemme XI.4. — *Pour tout morphisme excisif $(f, g) : (Y, T) \to (X, Z)$, le morphisme précédent est un isomorphisme.*

En raisonnant sur les fibres du morphisme, on se ramène au corollaire IX.5.3.

Corollaire XI.4.1. — *Soit (X, Z) une paire fermée lisse de codimension c.*
Alors, on associe à toute paramétrisation ρ de (X, Z) un isomorphisme

$$F_{(X,Z)} \simeq F_{(\mathbb{A}^c_Z, Z)}$$

de faisceaux sur $\mathscr{A}b^{Nis}_Z$.

Il suffit en effet de considérer les morphismes excisifs (XI.2) associés à ρ.

Pour achever le théorème de pureté locale, on a besoin du résultat suivant :

Lemme XI.5. — *Pour tout k-schéma lisse Z, il existe un isomorphisme canonique de faisceaux abéliens sur Z_{Nis} :*

$$F_{(\mathbb{A}^1_Z, Z)} \simeq F_{-1}|_Z.$$

Dans le cas où $Z = \mathrm{Spec}(k)$, on déduit ce théorème de la proposition X.8. Dans le cas général, on utilise la généralisation de cette proposition dans le cas où l'on remplace $\mathrm{Spec}(k)$ par Z – *cf.* [**Dég07**], théorème 4.3.24 pour cette généralisation et lemme 4.5.18 pour une preuve détaillée de la proposition précédente.

XI.1.3.b. — Considérons les hypothèses du corollaire précédent dans le cas où $c = 1$. On déduit du lemme précédent et de (XI.3) une suite exacte courte de faisceaux sur X_{Nis} :

$$0 \to F_X \to j_*(F_U) \to i_*(F_{-1}|_Z) \to 0.$$

On en déduit ainsi une suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 \to F(X) \xrightarrow{j^*} F(U) \xrightarrow{\partial_{X,Z}} F_{-1}(Z) \to H^1(X, F) \to H^1(X, j_*F_U) \to \cdots \\ \to H^n(X, F) \to H^n(X, j_*F_U) \to H^n(Z, F_{-1}) \to \cdots \end{aligned} \tag{XI.4}$$

Notons qu'on a utilisé le fait que les deux foncteurs de l'adjonction

$$i^* : \mathscr{A}b^{Nis}_X \leftrightarrows \mathscr{A}b^{Nis}_Z : i_*$$

sont exacts.(2) On fera attention par contre que le foncteur j_* n'est pas exact.

La suite exacte longue précédente est la *suite exacte de localisation*.(3) Le morphisme $\partial_{X,Z}$ est appelé le *résidu* associé à (X, Z).

Exemple XI.1. — Le préfaisceau

$$\mathbb{G}_m : \mathscr{L}_k \to \mathscr{A}b, X \mapsto \mathcal{O}_X(X)^\times$$

admet des transferts (voir par exemple la proposition XI.9). C'est de plus un faisceau pour la topologie Nisnevich (et même pour la topologie étale : cela résulte de l'exemple VIII.7 compte tenu de l'inclusion $\mathcal{O}_X(X) \subset \mathcal{O}_X(X)^\times$). Il est clairement invariant par homotopie.

Par ailleurs, le faisceau homotopique $(\mathbb{G}_m)_{-1}$ qui s'en déduit est égal au faisceau constant

$$\mathbb{Z} : \mathscr{L}_k \to \mathscr{A}b, X \mapsto \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$$

où $\pi_0(X)$ désigne l'ensemble (fini car X est de type fini sur k) des composantes connexes de X.(4)

Considérons une paire fermée (X, Z) lisse de codimension 1 telle que X et Z soient connexes. Soit E le corps des fonctions de X et $\mathscr{V}$ l'anneau local de X au point générique de Z. L'anneau $\mathscr{V}$ est noethérien régulier de dimension 1 : c'est un anneau de valuation discrète ayant E pour corps des fractions. Notons $v : E^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation qui lui est associée.

---

(2) Plus généralement, pour tout morphisme fini $f : Y \to X$, $f_* : \mathscr{A}b^{Nis}_Y \to \mathscr{A}b^{Nis}_X$ est exact : en utilisant les foncteurs fibres Nisnevich, cela résulte du fait que pour tout schéma local hensélien V/X, $Y \times_X V$ est une somme de schémas locaux henséliens, d'après la définition IX.6.

(3) Elle n'est pas sous forme finale : voir **??**.

(4) Cet encore le faisceau avec transferts $\mathbb{Z}^{tr}_k(\mathrm{Spec}(k))$ représenté par $\mathrm{Spec}(k)$.

Avec ces notations, on peut vérifier que le morphisme $\partial_{X,Z}$ obtenu précédemment est donné par la formule :

$$\partial_{X,Z} : \mathcal{O}_X(X)^\times \to \mathbb{Z}, f \mapsto v(f).$$

2. Complexes motiviques

2.1. Caractérisation. —

XI.2.1.a. — Si K est un complexe de faisceau avec transferts et $n \in \mathbb{Z}$ un entier, on note $\underline{\check{H}}^n(K)$ le préfaisceau avec transferts qui à un k-schéma lisse associe le groupe abélien $H^n(K(X))$. On note $\underline{H}^n(K)$ le faisceau Nisnevich associé à ce dernier.

Corollaire XI.5.1. — *Soit K un complexe de faisceaux avec transferts sur k. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *K est un complexe motivique.*

(ii) *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{H}^n(K)$ est $\mathbb{A}^1$-local.*

(iii) *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{H}^n(K)$ est invariant par homotopie.*

De plus, ces conditions sont impliquées par le propriété suivante :

(iv) *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{\check{H}}^n(K)$ est invariant par homotopie.*

Démonstration. — Le fait que (i) équivaut à (ii) résulte de la suite spectral d'hypercohomologie

$$E_2^{pq} = H^p_{Nis}(X, \underline{H}^q(K)) \Rightarrow H^{p+q}(X, K)$$

qui est convergente (en effet, comme X est de dimension finie d, $E_2^{pq} = 0$ si $p \notin [0, d]$). Le fait que (ii) implique (iii) est trivial et la réciproque résulte du théorème de Voevodsky.

Enfin, le corollaire X.10.1 montre que (iv) implique (iii). □

2.2. Complexe de Suslin. —

Définition XI.6. — On note Δ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis totalement ordonnés et les morphismes sont les applications croissantes. On appelle Δ la catégorie cosimpliciale standard.

Si n est un entier, on note $\underline{n}$ l'ensemble fini ordonné $\{0, \cdots, n\}$. La catégorie Δ est équivalente à la sous-catégorie des ensembles finis ordonnés de la forme $\underline{n}$ pour un entier $n \geq 0$. De plus, tout morphisme de $f : \underline{n} \to \underline{m}$ est représenté de manière unique[5] comme composé des morphismes du type suivant :

$$\textit{coface}, \ \delta_i^n : \underline{n-1} \simeq \{0, \ldots, \cancel{i}, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, n\} = \underline{n}$$
$$\textit{codégénérescence}, \ \sigma_i^n : \underline{n+1} = \{0, \ldots, n+1\} \to \{0, \ldots, \cancel{i}, \ldots, n\} \simeq \underline{n}$$

Définition XI.7. — Un objet cosimplicial (resp. simplicial) d'une catégorie $\mathscr{C}$ est un foncteur $\Delta \to \mathscr{C}$ (resp. $\Delta^{op} \to \mathscr{C}$).

Notons que se donner un objet cosimplicial C^*_{sing} de $\mathscr{C}$ revient à se donner pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ un objet C^n_{sing} de $\mathscr{C}$ et des morphismes :

$$\textit{coface}, \ \delta_i^n : C^{n-1}_{\text{sing}} \to C^n_{\text{sing}}$$
$$\textit{codégénérescence}, \ \sigma_i^n : C^{n+1}_{\text{sing}} \to C^n_{\text{sing}}$$

[5] Plus précisément, il existe un unique composé s (resp. d) de morphismes codégénérescences (resp. cofaces) tel que $f = d \circ s$.

Evidemment, renversant le sens des flèches, un objet simplicial C_* revient à se donner C_n et des morphismes :

$$\textit{face}, \ \delta_n^i : C_n \to C_{n-1}$$
$$\textit{dégénérescence}, \ \sigma_n^i : C_n \to C_{n+1}$$

Exemple XI.2. — 1. Pour un entier $n \geq 0$, on pose

$$\Delta^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n]/(t_0 + \dots + t_n = 1)).$$

On note $v_i^n = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ le point fermé de Δ^n ayant pour seule coordonnée non nulle la i-ème. Si $\sigma : \underline{n} \to \underline{m}$ est une application croissante, On définit

$$\sigma^* : \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n] \to \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_m], t_i \mapsto \sum_{\sigma(j)=i} t_j$$

Ce morphisme induit un unique morphisme $\sigma_* : \Delta^n \to \Delta^m$ qui fait de Δ^* un schéma cosimplicial.(6) On peut encore décrire ce morphisme comme l'unique morphisme linéaire tel que $\sigma_*(v_i^n) = v_{\sigma(i)}^m$.

Notons qu'il existe un isomorphisme $\Delta^n \simeq \mathbb{A}^n$. A travers cet isomorphisme, pour $i = 0$ (resp. $i = 1$), le morphisme $\delta_i^1 : \Delta^0 \to \Delta^1$ s'identifie à la section nulle (resp. unité) de $\mathbb{A}^1$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

2. Soit X un schéma et W un X-schéma. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\check{S}^n(W/X) = W_X^{n+1}$, produit fibré $n+1$-uple de W/X. Si $f : \underline{n} \to \underline{m}$ est une application croissante, on lui associe un unique morphisme de schémas $f_* : \check{S}^n(W/X) \to \check{S}^m(W/X)$ décrit (sur les ensembles sous-jacents) par la formule :

$$(x_0, ..., x_n) \mapsto (x_{f(0)}, ..., x_{f(n)}).$$

Ainsi, $\check{S}^*(W/X)$ est un X-schéma simplicial.

XI.2.2.a. — Considérons une catégorie additive $\mathscr{A}$. Si A_* est un objet simplicial de $\mathscr{A}$, on lui associe un complexe concentré en degré positif dont la différentelle $d_n : A_n \to A_{n-1}$ est donnée par la formule :

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i . \delta_n^i .$$

Définition XI.8. — Soit F un faisceau avec transferts sur S. On définit le *complexe de Suslin de F* comme le complexe de faisceaux avec transferts sur S associé à l'objet simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{N}_S^{tr}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(\Delta_S^*), F)$. On le note $C_*^{\mathrm{sing}}(F)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $h_n(F)$ le n-ème faisceau d'homologie de $C_*^{\mathrm{sing}}(F)$.

Par définition, pour un S-schéma lisse X, $\Gamma(X, C_n^{\mathrm{sing}}(F)) = F(X \times \Delta^n)$. On notera parfois le complexe de Suslin de manière cohomologique : plus précisément, pour tout entier $n \in_Z Z$, on pose :

$$C_{\mathrm{sing}}^n(F) = C_{-n}^{\mathrm{sing}}(F) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{N}_S^{tr}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(\Delta_S^{-n}), F).$$

Exemple XI.3. — Si F est un faisceau avec transferts, le faisceau avec transferts $h_0(F)$ s'identifie à celui défini dans le paragraphe X.2.2.b (d'après la description des cofaces δ_0^1 et δ_1^1 donnée dans la première partie de l'exemple XI.2).

---

(6) On l'appelle parfois le k-schéma cosimplicial standard.

XI.2.2.b. — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie additive admettant des sommes infinies, et K^{**} un bicomplexe de $\mathscr{A}$. On peut alors définir un objet gradué T^* de $\mathscr{A}$ par la formule :

$$T^n = \oplus_{p+q=n} K^{p,q}.$$

Pour tout couple d'entiers (p,q), considérons les deux différentielles du bicomplexe K^{**} :

$$d_1 : K^{p,q} \to K^{p+1,q}$$
$$d_2 : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$$

On pose alors :

$$d^{p,q} = d_1 + (-1)^p.d_2 : K^{p,q} \to K^{p+1,q} \oplus K^{p,q+1}.$$

En faisant la somme de ces morphismes par rapport aux entiers $p+q=n$, on obtient un morphisme $d^n : T^n \to T^{n+1}$ qui fait de T^* un complexe de $\mathscr{A}$.

Définition XI.9. — Avec les notations précédentes, on appelle T^* le complexe total somme associé au bi-complexe K^{**}. On le note $\mathrm{Tot}^{\oplus}(K^{**})$.

Remarque XI.6. — Si K^* est un complexe de $\mathscr{A}$, on lui associe un bicomplexe $\mathrm{Diag}(K^*)$ qui en bidegré (p,q) est égal à l'objet $K^{p,q}$, les différentielles étant induites de manière évidentes par celles de K^*. Alors le foncteur $\mathrm{Tot}^{\oplus}$ est défini de manière unique comme l'adjoint à gauche du foncteur Diag.

Si K est un complexe de faisceaux avec transferts sur k, on note simplement $C^*_{\mathrm{sing}}(K)$ le complexe total somme associé au bicomplexe

$$(p,q) \mapsto C^p_{\mathrm{sing}}(K^q).$$

Notons que $C^p_{\mathrm{sing}}(K^q)$ est nul si $p<0$ et isomorphe à K^q si $p=0$. On en déduit un morphisme de complexes canonique :

$$K \to C^*_{\mathrm{sing}}(K).$$

Proposition XI.6. — *Avec les notations ci-dessus, le complexe $C^*_{\mathrm{sing}}(K)$ est un complexe motivique.*

Démonstration. — Si S est un schéma, on note $\mathbb{Z}.\mathscr{L}_S$ la catégorie additive librement engendrée par $\mathscr{L}_S$: ses objets sont les S-schémas lisses et les morphismes de X vers Y sont donnés par le groupe abélien :

$$\mathbb{Z}.\mathrm{Hom}_S(X,Y).$$

Pour tout S-schéma lisse X, on note $[X \times \Delta^*]$ le complexe de la catégorie additive $\mathbb{Z}.\mathscr{L}_S$ associé à l'objet simplicial défini par le schéma simplicial évident.

Lemme XI.7. — *Avec les notations précédentes, considérons les morphismes de complexes de $\mathbb{Z}.\mathscr{L}_S$ suivants :*

$$p_X : [X \times \mathbb{A}^1 \times \Delta^*] \to [X \times \Delta^*]$$
$$s^0_X, s^1_X : [X \times \Delta^*] \to [X \times \mathbb{A}^1 \times \Delta^*]$$

induit respectivement par la projection canonique, la section nulle et la section unité de $\mathbb{A}^1_X/X$.

1. *Les morphismes de complexes s^0_X et s^1_X sont homotopes (cf. définition VII.5).*
2. *Le morphisme de complexes p_X est une équivalence d'homotopie avec pour quasi-inverse le morphisme s^X_0.*

Pour le premier point, on peut définit une équivalence d'homotopie

$$s^n : X \times \Delta^n \to X \times \mathbb{A}^1 \times \Delta^{n-1}$$

dans la catégorie $\mathbb{Z}.\mathscr{L}_S$ par la formule :

$$s^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i.(1_X \times s_i^n)$$

où $s_i^n : \Delta^n \to \mathbb{A}^1 \times \Delta^{n-1}$ est l'unique morphisme linéaire décrit avec les notations de l'exemple XI.2 par la formule :

$$s_i^n(v_j^n) = \begin{cases} \{0\} \times v_j^{n-1} & \text{si } j \leq i, \\ \{1\} \times v_{j-1}^{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La vérification est maintenant facile compte tenu de la définition des opérateurs cofaces de Δ^*.

Le deuxième point du lemme s'en déduit maintenant formellement. Considérons un S-schéma lisse Y. Soit $\mu : \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ la multiplication du schéma en anneau $\mathbb{A}^1$. On obtient alors formellement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (1_Y \times \mu) \circ s^0_{\mathbb{A}^1_Y} &= p_{\mathbb{A}^1_Y} \circ s^0_{\mathbb{A}^1_Y} \\ (1_Y \times \mu) \circ s^1_{\mathbb{A}^1_Y} &= 1_{\mathbb{A}^1_Y}. \end{aligned}$$

Ainsi, appliquant le point 1 dans le cas où $X = Y \times \mathbb{A}^1$, les relations précédentes et la compatibilité de l'équivalence d'homotopie avec la composition des morphismes de complexes permet de conclure.

On déduit formellement de ce lemme que pour tout faisceau homotopique F et tout k-schéma lisse X, le morphisme

$$F(X \times \Delta^*) \to F(X \times \mathbb{A}^1 \times \Delta^*)$$

induit par la projection est une équivalence d'homotopie. En d'autres termes, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le préfaisceau de cohomologie $\underline{\check{H}}^n(C^*_{\text{sing}}(F))$ est invariant par homotopie : on conclut grâce au corollaire XI.5.1.

Si K est un complexe de faisceaux avec transferts, comme pour tout entier n,

$$K^n(X \times \Delta^*) \to K^n(X \times \mathbb{A}^1 \times \Delta^*)$$

est une équivalence d'homotopie avec pour quasi-inverse le morphisme induit par la section nulle, il en est de même sur le complexe total somme. On conclut alors comme précédemment grâce au corollaire XI.5.1. □

Définition XI.10. — A tout k-schéma lisse X, on associe le complexe motivique $M(X) := C^*_{\text{sing}}(\mathbb{Z}_k^{tr}(X))$. On l'appelle plus simplement le *motif de* X sur k.

Notons que dans le complexe motivique associé à $\mathrm{Spec}(k)$ n'est rien d'autre que le complexe de faisceau constant $\mathbb{Z}$ – qui à un k-schéma lisse associe le groupe abélien libre engendré par ses composantes connexes.

Remarque XI.7. — On définit l'homologie singulière de Suslin de X en degré $i \geq 0$ par la formule :

$$h_i^{sing}(X) = H_i\big(c_k\,(\Delta^*, X)\big).$$

Avec les notations de la définition précédente, on obtient ainsi :

$$\Gamma(\mathrm{Spec}(k), \underline{H}^{-i} M(X)) = h_i^{sing}(X).$$

On déduit du corollaire précédent et de la remarque IX.7 la proposition suivante :

Proposition XI.8. — *Pour tout complexe motivique K et tout k-schéma lisse X,*

$$\mathrm{Hom}_{DM^{eff}(k)}(M(X), K[i]) = H^i_{Nis}(X, K)$$

où le membre de droite désigne l'hypercohomologie Nisnevich de X à coefficients dans le complexe K, vu comme un faisceau sur $\mathscr{L}_k$.

On en déduit en particulier pour tout k-schéma lisse X et tout entier $i \geq 0$ le calcul suivant :

$$\mathrm{Hom}_{DM^{eff}(k)}(\mathbb{Z}[i], M(X)) = h_i^{sing}(X). \tag{XI.5}$$

Exemple XI.4. — Pour tout k-schéma lisse X et tout entier $n \in_Z Z$,

$$\mathrm{Hom}_{DM^{eff}(k)}(M(X), \mathbb{Z}[n]) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\pi_0(X)} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

XI.2.2.c. — Considérons l'immersion fermée $s : \mathrm{Spec}(k) \to \mathbb{G}_m$ correspondant au point unité du schéma en groupes $\mathbb{G}_m$. C'est un monomorphisme scindé par la projection. On note $\mathbb{Z}_k^{tr}(\mathbb{G}_m/1)$ le faisceau avec transferts conoyau du morphisme $s_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_k^{tr}(\mathbb{G}_m)$. On en déduit donc des morphismes de faisceaux sur $\mathscr{L}_S$

$$\eta : \mathbb{G}_m \to \mathbb{Z}_k^{tr}(\mathbb{G}_m) \to \mathbb{Z}_k^{tr}(\mathbb{G}_m/1)$$

où la première flèche est induite par le morphisme graphe.

Proposition XI.9. — 1. *Le morphisme η est un morphisme de faisceaux avec transferts.*

2. *Le morphisme induit*

$$\mathbb{G}_m \to C^*_{\mathrm{sing}}\big(\mathbb{Z}_k^{tr}(\mathbb{G}_m/1)\big)$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux avec transferts.

Compte tenu de la formule (XI.5), cette proposition résulte du calcul de l'homologie singulière de $\mathbb{G}_m$.

Si on définit le motif de Tate $\mathbb{Z}(1)$ comme le complexe motivique $C^*_{\mathrm{sing}}\big(\mathbb{Z}_k^{tr}(\mathbb{G}_m/1)\big)[-1]$, on déduit des deux propositions précédentes le théorème suivant :

Théorème XI.10. — *Soit X un k-schéma lisse. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\mathrm{Hom}_{DM^{eff}(k)}(M(X), \mathbb{Z}(1)[n]) = \begin{cases} \mathcal{O}_X(X)^\times & \textit{si } n = 1, \\ \mathrm{Pic}(X) & \textit{si } n = 2, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Références

[Dég07] F. Déglise – « Correspondences and transfers », *Algebraic cycles and motives* (J. Nagel & P. Chris, éds.), Cambridge university press, April 2007.

2009-2010

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* deglise@math.univ-paris13.fr
Url : http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/