

## Table des matières

<b>Cours XII. Orientation, transferts et dualité</b> .....	1
1. Cohomologie motivique et groupe de Picard .....	1
1.1. Cas des complexes motiviques .....	1
1.2. Motifs géométriques effectifs .....	3
1.3. Motifs géométriques .....	4
2. Théorème du fibré projectif .....	4
2.1. Fibrés vectoriels et projectifs .....	4
2.2. Préparation .....	6
2.3. Énoncé et preuve .....	7
2.4. Théorème de pureté .....	9
3. Morphisme de Gysin et dualité .....	12
3.1. Filtration par coniveau .....	12
Références .....	14

## COURS XII ORIENTATION, TRANSFERTS ET DUALITÉ

Tous les  $S$ -schémas sont supposés séparés de type fini.

### 1. Cohomologie motivique et groupe de Picard

**1.1. Cas des complexes motiviques.** — Reprenons les notations de la définition IX.11.

**Définition XII.1.** — Si  $X$  est un  $S$ -schéma lisse, on note  $M(X)$  l'objet de  $DM^{eff}(S)$  représenté par le complexe de faisceaux avec transferts concentré en degré 0 égal à  $\mathbb{Z}_S^{tr}(X)$ .

**XII.1.1.a.** — Considérons un entier  $n > 0$ . On note  $\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m^{\wedge, n})$  le faisceau avec transferts sur  $S$  obtenu comme conoyau du morphisme canonique :

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m^{n-1}) \rightarrow \mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m^n),$$

somme des morphismes induits par les immersions fermées de la forme  $\mathbb{G}_m^{i-1} \times \{1\} \times \mathbb{G}_m^{n-i} \rightarrow \mathbb{G}_m^n$ .<sup>(1)</sup>

**Définition XII.2.** — On définit le motif de Tate  $\mathbb{Z}_S(n)$  comme l'objet de  $DM^{eff}(S)$  représenté par le complexe de faisceaux avec transferts concentré en degré  $n$  égal à  $\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m^{\wedge, n})$  en degré  $n$ .

Pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$  et tout couple d'entiers  $(i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ , on définit la cohomologie motivique effective de  $X$  en degré  $(i, n)$  comme le groupe abélien :

$$\mathrm{Hom}_{DM^{eff}(S)}(M_S(X), \mathbb{Z}_S(n)[i]).$$

**Remarque XII.1.** — On fera attention que le complexe de faisceaux avec transferts  $\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m^{\wedge, n})$  n'est pas  $\mathbb{A}^1$ -local ( $n > 0$ ).

Notons que la définition du complexe de Suslin (cf. XI.8) se généralise facilement au cas où  $S$  est un schéma régulier : si  $F$  est un faisceau avec transferts sur  $S$ , on pose :

$$C_*^{\mathrm{sing}}(F) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{N}_S^{tr}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(\Delta_S^*), F).$$

<sup>(1)</sup>Avec les notations de XI.2.2.c,  $\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m^{\wedge, n})$  est la puissance tensorielle  $n$ -ième de  $\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m/1)$ .

**Proposition XII.1.** — *Considérons le morphisme de faisceaux Nisnevich sur  $\mathcal{L}_S$  suivant :*

$$\eta : \mathbb{G}_m \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m) \rightarrow \mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m/1)$$

où le premier morphisme est induit par le foncteur graphe et le second est la projection canonique.

Le morphisme de complexes de faisceaux Nisnevich

$$\mathbb{G}_m \rightarrow C_*^{\text{sing}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m/1))$$

est un quasi-isomorphisme.

*Démonstration.* — Pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ ,

$$\Gamma(X, C_*^{\text{sing}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m))) = c_S(X \times \Delta^*, \mathbb{G}_m).$$

Par définition de l'homologie singulière de Suslin (cf. remarque XI.7), on en déduit donc :

$$H_i \Gamma(X, C_*^{\text{sing}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m))) = H_i^{\text{sing}}(\mathbb{G}_{m,X}/X).$$

Supposons que  $X$  soit affine. Dès lors, la  $X$ -courbe lisse  $\mathbb{G}_{m,X}$  admet évidemment une bonne compactification sur  $X$  au sens de la définition X.7, la droite projective  $\mathbb{P}_X^1$ . Posons  $X_0 = X \times \{0\}$ ,  $X_\infty = X \times \{\infty\}$  vus comme des sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}_X^1$ . Le calcul suivant résulte donc du théorème 3.1 de [SV96] :

$$H_i \Gamma(X, C_*^{\text{sing}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m))) = \begin{cases} \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1, X_0 \sqcup X_\infty) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que le morphisme induit par  $\eta$  :

$$\mathbb{G}_m(X) \rightarrow H_0 \Gamma(X, C_*^{\text{sing}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m/1)))$$

est un isomorphisme. Notons que le membre de droite est encore le conoyau du morphisme induit par la section unité du  $X$ -schéma en groupe  $\mathbb{G}_{m,X}$  :

$$\mathbb{Z}^{\pi_0(X)} = H_0^{\text{sing}}(X/X) \rightarrow H_{\text{sing}}^0(\mathbb{G}_{m,X}/X) = \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1, X_0 \sqcup X_\infty).$$

Or, par définition du groupe de Picard relatif, on obtient une suite exacte :

$$\mathbb{G}_m(\mathbb{P}_X^1) \xrightarrow{(1)} \mathbb{G}_m(X_0) \oplus \mathbb{G}_m(X_\infty) \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1, X_0 \sqcup X_\infty) \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1) \xrightarrow{(2)} \text{Pic}(X_0) \oplus \text{Pic}(X_\infty).$$

Comme  $X$  est réduit, le conoyau de la flèche (1) est  $\mathbb{G}_m(X)$ . Comme  $X$  est régulier, on obtient une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(X)} \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1) \xrightarrow{\varphi} \text{Pic}(X) \rightarrow 0$$

où  $\varphi$  est la restriction par la section nulle ou infinie de  $\mathbb{P}_X^1/X$ . Or, la flèche (2) est égal à  $(\varphi, \varphi)$  : son noyau est donc égal à  $\mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$ . On en déduit donc une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m(X) \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1, X_0 \sqcup X_\infty) \rightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(X)} \rightarrow 0$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

**Remarque XII.2.** — Il résulte de cette proposition que le faisceau Nisnevich représenté par  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathcal{L}_X$  admet des transferts. On peut décrire les transferts comme suit. Soit  $X, Y$  deux  $S$ -schémas lisses connexes. Soit  $Z \subset X \times_S Y$  un sous-schéma fermé irréductible fini surjectif sur  $X$ , vu comme une correspondance finie  $\alpha : X \bullet \rightarrow Y$ .

On pose  $A = \mathcal{O}_X(X)$ ,  $B = \mathcal{O}_Z(Z)$ . Ainsi,  $B/A$  est une extension entière. Si l'on pose  $K = \text{Frac}(A)$ ,  $L = \text{Frac}(B)$ , la norme de l'extension finie  $L/K$  induit un unique morphisme  $N : B^\times \rightarrow A^\times$ . On peut alors vérifier que le morphisme  $\alpha^* : \mathbb{G}_m(Y) \rightarrow \mathbb{G}_m(X)$  induit par la proposition précédente est donné par la composée suivante :

$$\alpha^* : \mathbb{G}_m(Y) \rightarrow \mathbb{G}_m(Z) = B^\times \xrightarrow{N} A^\times = \mathbb{G}_m(X).$$

Notons que le complexe  $\mathbb{G}_m$  est  $\mathbb{A}^1$ -local au sens de la définition IX.12. Par ailleurs, on peut montrer que le morphisme

$$\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m/1) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{G}_m/1))$$

est un isomorphisme dans  $DM^{eff}(S)$ . Compte tenu de la remarque IX.7, on en déduit le résultat suivant :

**Théorème XII.2.** — Soit  $X$  un  $S$ -schéma lisse. Alors, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\text{Hom}_{DM^{eff}(S)}(M_S(X), \mathbb{Z}_S(1)[n]) = \begin{cases} \mathcal{O}_X(X)^\times & \text{si } n = 1, \\ \text{Pic}(X) & \text{si } n = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que l'isomorphisme de ce théorème est naturel par rapport au  $S$ -schéma lisse  $X$ .

## 1.2. Motifs géométriques effectifs. —

**XII.1.2.a.** — Pour la suite de ce cours, on va admettre que le foncteur (IX.82)

$$\rho : DM_{gm}^{eff}(S) \rightarrow DM^{eff}(S)$$

est pleinement fidèle. Ainsi, le théorème précédent donne pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$  un isomorphisme canonique de groupes abéliens :

$$(XII.1) \quad \text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(S)}(M_S(X), \mathbb{Z}_S(1)[2]) = \text{Pic}(X)$$

où  $\mathbb{Z}_S(1)$  est défini comme le complexe de  $\mathcal{L}_S^{cor}$  concentré en degrés 0 et 1 de la forme suivante

$$\dots[S] \rightarrow [\mathbb{G}_{m,S}] \dots$$

le seule différentielle non nulle étant induite par la section unité.

**XII.1.2.b.** — Utilisant la structure monoïdale de  $DM_{gm}^{eff}(S)$ , on peut poser  $\mathbb{Z}_S(n) = \mathbb{Z}_S(1)^{\otimes, n}$ , de sorte que  $\rho$  envoie isomorphiquement cet objet de  $DM_{gm}^{eff}(S)$  sur l'objet correspondant de  $DM^{eff}(S)$ .

Le cohomologie motivique effective de  $S$  en degré  $(i, n)$  est alors isomorphe au groupe abélien :

$$\text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(S)}(\mathbb{Z}_S, \mathbb{Z}_S(n)[i]).$$

Compte tenu de l'identification  $\mathbb{Z}_S(n) \otimes \mathbb{Z}_S(m) = \mathbb{Z}_S(n+m)$ , le produit tensoriel de  $DM_{gm}^{eff}(S)$  induit une unique structure d'algèbre bigraduée sur la cohomologie motivique effective de  $S$ .

Si  $X$  est un  $S$ -schéma lisse avec pour morphisme structural  $p$ , le lien avec la définition XII.2 se fait grâce à l'adjonction de catégories triangulées (voir proposition VII.10) :

$$p_{\sharp} : DM_{gm}^{eff}(X) \rightleftarrows DM_{gm}^{eff}(S) : p^*$$

En effet,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(S)}(M_S(X), \mathbb{Z}_S(n)[i]) &= \text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(S)}(p_{\sharp}(\mathbb{Z}_X), \mathbb{Z}_S(n)[i]) \\ &= \text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(X)}(\mathbb{Z}_X, p^*(\mathbb{Z}_S(n)[i])) = \text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(X)}(\mathbb{Z}_X, \mathbb{Z}_X(n)[i]) = H_{\mathcal{M}, eff}^{i, n}(X). \end{aligned}$$

**Remarque XII.3.** — Notons qu'on obtient aussi un isomorphisme :

$$\mathbb{G}_m(X) = \text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(S)}(M_S(X), \mathbb{Z}_S(1)[1]).$$

Par définition, on peut décrire celui-ci comme le morphisme composé suivant :

$$\mathbb{G}_m(X) = \text{Hom}_S(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\gamma} c_S(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\pi} c_S(X, \mathbb{G}_m/1) \xrightarrow{(1)} \text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(S)}(M_S(X), \mathbb{Z}_S(1)[1]).$$

Le morphisme  $\gamma$  est le morphisme graphe. Le morphisme  $\pi$  est le morphisme de projection canonique associé à la décomposition évidente :

$$c_S(X, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}^{\pi_0(X)} \oplus c_S(X, \mathbb{G}_m/1).$$

La projection sur le premier facteur est induite par le morphisme de projection  $\mathbb{G}_{m,S} \rightarrow S$ . Le morphisme (1) est induit par le foncteur canonique  $\mathcal{L}_S^{cor} \rightarrow DM_{gm}^{eff}(S)$ .

### 1.3. Motifs géométriques. —

**Définition XII.3.** — On définit la catégorie des motifs géométriques  $DM_{gm}(S)$  comme la catégorie obtenue à partir de  $DM_{gm}^{eff}(S)$  en inversant formellement le morphisme de Tate  $\mathbb{Z}_S(1)$  et en considérant ensuite l'enveloppe pseudo-abélienne.

Cette catégorie admet de manière évidente une structure triangulée monoïdale telle que le foncteur canonique

$$(XII.2) \quad DM_{gm}^{eff}(S) \rightarrow DM_{gm}(S)$$

est triangulé monoïdal. La structure monoïdale est symétrique.<sup>(2)</sup>

La functorialité de la catégorie  $DM_{gm}^{eff}(S)$  par rapport à  $S$  construite dans le paragraphe VII.2.3.a s'étend à la catégorie  $DM_{gm}(S)$  — notamment grâce à la proposition VII.14 qui montre que  $p_{\sharp}(\mathcal{M}(1)) = p_{\sharp}(\mathcal{M})(1)$ . Le foncteur (XII.2) est alors compatible à cette functorialité dans le sens évident.

**Définition XII.4.** — Pour tout schéma régulier  $S$  et tout couple d'entiers  $(i, n) \in \mathbb{Z}^2$ , on définit la cohomologie motivique de  $S$  en degré  $(i, n)$  comme le groupe abélien :

$$H_{\mathcal{M}}^{i,n}(S) = \mathrm{Hom}_{DM_{gm}(S)}(\mathbb{Z}_S, \mathbb{Z}_S(i)[n]).$$

Plus concrètement, on obtient :

$$H_{\mathcal{M}}^{i,n}(S) = \varinjlim_{r \geq \max(0, -i)} \mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(S)}(\mathbb{Z}_S(r), \mathbb{Z}_S(r+i)[n]).$$

**Remarque XII.4.** — Si  $S$  est un schéma régulier d'égales caractéristiques, les morphismes de transition dans la limite inductive précédente sont des isomorphismes : la cohomologie motivique coïncide avec la cohomologie motivique effective. Dans le cas d'un schéma régulier  $S$  d'inégales caractéristiques, on ignore si cette propriété est vérifiée.

## 2. Théorème du fibré projectif

### 2.1. Fibrés vectoriels et projectifs. —

**XII.2.1.a.** — Soit  $S$  un schéma.

Rappelons qu'un  $\mathcal{O}_S$ -module  $\mathcal{M}$  est *quasi-cohérent* si pour tout point  $s \in S$ , il existe un voisinage ouvert affine  $U = \mathrm{Spec}(A)$  de  $s$ , un  $A$ -module  $M$  et un isomorphisme  $\mathcal{M}|_U \simeq \tilde{M}$  de  $\mathcal{O}_U$ -modules (avec la notation de X.1). Dans ce cas, pour tout ouvert affine  $U = \mathrm{Spec}(A)$ , si l'on pose  $M = \Gamma(U, \mathcal{M})$ , on obtient un isomorphisme canonique  $\tilde{M} \simeq \mathcal{M}|_U$ .

Si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{O}_S$ -algèbre quasi-cohérente, il existe un unique  $S$ -schéma affine  $X$  tel que :

1. pour tout ouvert affine  $U$  de  $S$ ,

$$X \times_S U = \mathrm{Spec}(\mathcal{A}(U)).$$

2. Pour toute inclusion  $V \rightarrow U$  d'ouverts affines de  $S$ , le morphisme induit  $X \times_S V \rightarrow X \times_S U$  est le spectre du morphisme d'anneaux :

$$\mathcal{A}(U) \rightarrow \mathcal{A}(V).$$

<sup>(2)</sup>Cela résulte du fait que la permutation des facteurs sur  $\mathbb{Z}_S(1) \otimes \mathbb{Z}_S(1)$  est égale à l'identité dans  $DM_{gm}^{eff}(S)$ .

On note ce schéma  $\text{Spec}_S(\mathcal{A})$ . Notons qu'il est contravariant en  $\mathcal{A}$ . On a ainsi défini une anti-équivalence de catégories entre les  $S$ -schémas affines et les  $\mathcal{O}_S$ -modules quasi-cohérents. Un quasi-inverse de  $\mathcal{A} \mapsto \text{Spec}_S(\mathcal{A})$  est donné par le foncteur qui à un morphisme affine ( $f : X \rightarrow S$ ) associe la  $\mathcal{O}_S$ -algèbre quasi-cohérente  $f_*(\mathcal{O}_X)$  – cf. [1.3.1, EGA2].

**Exemple XII.1.** — Un morphisme de schémas  $i : Z \rightarrow S$  est une immersion fermée si et seulement si c'est un morphisme affine et le morphisme  $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*(\mathcal{O}_Z)$  est surjectif.

Dans ce cas, le noyau  $\mathcal{I}$  de  $i^\#$  est un faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$  qui détermine uniquement  $i$ . On l'appelle l'idéal associé à  $i$ .

**Définition XII.5.** — Soit  $X$  un schéma. On dit qu'un  $X$ -schéma  $E$  est un *fibré vectoriel* si pour tout point  $x \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $X$  et un  $U$ -isomorphisme  $E \times_X U \rightarrow \mathbb{A}_U^n$ .

L'entier  $n \in \mathbb{N}$  apparaissant dans cette définition est indépendant du voisinage ouvert  $U$  choisi. On l'appelle le *rang de  $E/X$  en  $x$*  et on le note  $\text{rg}_x(E)$ . C'est une fonction localement constante en  $x$ .

**XII.2.1.b.** — Si  $M$  est un  $A$ -module, on note  $\text{Sym}_A(M)$  la  $A$ -algèbre graduée symétrique associée à  $M$ . Si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module, on lui associe une  $\mathcal{O}_X$ -algèbre graduée  $\text{Sym}_X(\mathcal{E})$  en considérant le faisceau associé au préfaisceau sur  $X_{\text{Zar}}$  :

$$U \mapsto \text{Sym}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{E}(U)).$$

Si  $\mathcal{E}$  est quasi-cohérent,  $\text{Sym}(\mathcal{E})$  est quasi-cohérent. De plus, si  $\mathcal{E}$  est localement libre de rang fini, le schéma  $\text{Spec}_X(\text{Sym}(\mathcal{E}))$  est un fibré vectoriel sur  $X$ . Le foncteur

$$\mathcal{E} \mapsto \text{Spec}_X(\text{Sym}(\mathcal{E}))$$

réalise une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libre de rang fini et la catégorie des fibrés vectoriels sur  $X$ . Notons que  $\text{Sym}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t]$ ; ainsi,  $\text{Spec}_{\text{Sym}(\mathcal{O}_X)} (=) \mathbb{A}_X^1$ . Il résulte de l'équivalence de catégorie précédente que tout fibré vectoriel  $E/X$  admet une unique structure de module sur le  $X$ -schéma en anneaux  $\mathbb{A}_X^1$  :

$$(XII.3) \quad \gamma : \mathbb{A}^1 \times E = \mathbb{A}_X^1 \times_X E \rightarrow E.$$

Si  $E/X$  est un fibré vectoriel, le faisceau sur  $X_{\text{Zar}}$

$$\mathcal{E} : U \mapsto \text{Hom}_X(U, E)$$

est localement libre de rang fini. Si on note  $\mathcal{E}^\vee$  le dual du  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{E}$ , on définit ainsi un foncteur  $E \mapsto \mathcal{E}^\vee$  qui est un quasi-inverse du foncteur précédent. Ainsi, le morphisme nul  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E}$  définit un élément canonique de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{E}) = \Gamma(X, \mathcal{E}^\vee)$ , autrement dit une section  $s : X \rightarrow E$  de  $E/X$  appelée la *section nulle* de  $E$  – comme  $E/X$  est séparé,  $s$  est une immersion fermée (V.3.1).

**XII.2.1.c.** — Soit  $E/X$  un fibré vectoriel,  $s : X \rightarrow E$  la section nulle. On note  $E^\times$  l'ouvert complémentaire de  $s$ . L'action de  $\mathbb{A}^1$  sur  $E$  induit une action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $E^\times$ .

On peut définir le fibré projectif associé à  $E$  comme le schéma quotient

$$\mathbb{P}(E) = E^\times / \mathbb{G}_m.$$

Notons  $\lambda$  le produit semi-direct de  $E^\times$  et  $\mathbb{A}^1$  chacun muni de son action canonique de  $\mathbb{G}_m$ . Ainsi,  $\lambda$  est muni d'une action de  $\mathbb{A}^1$  au-dessus de  $\mathbb{P}(E)$ ; on vérifie facilement que c'est un fibré vectoriel de rang 1. On l'appellera le *fibré inversible canonique* sur  $\mathbb{P}(E)$ .<sup>(3)</sup>

Notons que d'après l'isomorphisme (XII.1), on associe à  $\lambda$  un unique morphisme de  $DM_{gm}^{eff}(S)$  :

$$(XII.4) \quad c_1(\lambda) : M_S(\mathbb{P}(E)) \rightarrow \mathbb{Z}_S(1)[2]$$

<sup>(3)</sup>Il est souvent noté  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$ .

**2.2. Préparation.** — Si  $i : Y \rightarrow X$  est une immersion, on note  $M_S(X/Y)$  le motif relatif associé au morphisme  $i$  dans la définition VII.11.

Considérons les morphismes suivants :

$$\begin{cases} p : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow S & \text{projection canonique} \\ j : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow \mathbb{A}_S^1 & \text{immersion ouverte canonique} \\ j^0, j^\infty : \mathbb{A}_S^1 \rightarrow \mathbb{P}_S^1 & \text{immersion ouverte complémentaire de } 0 \text{ et } \infty \\ i^\infty : S \rightarrow \mathbb{P}_S^1 & \text{section infinie.} \end{cases}$$

Par functorialité du motif relatif, on en déduit des morphismes de triangles :

$$(XII.5) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}_S(1)[1] & \longrightarrow & M_S(\mathbb{G}_{m,S}) & \xrightarrow{p^*} & \mathbb{Z}_S & \longrightarrow & M_S(\mathbb{A}_S^1/\mathbb{G}_{m,S}) \\ \downarrow \sim & & \parallel & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ M_S(\mathbb{A}_S^1/\mathbb{G}_{m,S})[-1] & \longrightarrow & M_S(\mathbb{G}_{m,S}) & \xrightarrow{j^*} & M_S(\mathbb{A}_S^1) & \longrightarrow & M_S(\mathbb{A}_S^1/\mathbb{G}_{m,S}) \\ \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow j_*^\infty & & \downarrow \sim \\ M_S(\mathbb{P}_S^1/\mathbb{A}_S^1)[-1] & \longrightarrow & M_S(\mathbb{A}_S^1) & \xrightarrow{j_*^0} & M_S(\mathbb{P}_S^1) & \longrightarrow & M_S(\mathbb{P}_S^1/\mathbb{A}_S^1) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \parallel & & \downarrow \sim \\ \tilde{M}_S(\mathbb{P}_S^1, \infty)[-1] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_S & \xrightarrow{s^*} & M_S(\mathbb{P}_S^1) & \longrightarrow & \tilde{M}_S(\mathbb{P}_S^1, \infty) \end{array}$$

Dans ce diagramme, les flèches verticales indiquées avec le symbole  $\sim$  sont des isomorphismes d'après la propriété d'invariance par homotopie des motifs et du fait que chaque étage forme un morphisme de triangle distingué, ou bien d'après la proposition VII.9. Notons par ailleurs que chaque suite verticale est un triangle distingué scindé.

**Corollaire XII.2.1.** — *Le diagramme (XII.5) induit une décomposition canonique :*

$$M_S(\mathbb{P}_S^1) = \mathbb{Z}_S \oplus \mathbb{Z}_S(1)[2].$$

**Corollaire XII.2.2.** — *Soit  $\lambda$  le fibré inversible canonique sur  $\mathbb{P}_S^1$ ,  $c_1(\lambda) : M_S(\mathbb{P}_S^1) \rightarrow \mathbb{Z}_S(1)[2]$  le morphisme (XII.4) qui lui est associé.*

*Alors,  $c_1(\lambda)$  induit un isomorphisme sur le facteur direct  $\mathbb{Z}_S(1)[2]$  dans la décomposition du corollaire précédent.*

*Démonstration.* — On peut supposer que  $S$  est connexe. Compte tenu de la dernière ligne du diagramme (XII.5), de l'isomorphisme (XII.1), cela résulte formellement de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}_S^1) \xrightarrow{s^*} \text{Pic}(S) \rightarrow 0$$

et du fait que la classe  $c_1(\lambda)$  est un générateur du noyau de  $s^*$ .  $\square$

**XII.2.2.a.** — Considérons un fibré vectoriel  $E$  sur  $S$ . On en déduit un fibré vectoriel  $E \oplus \mathbb{1} = E \times \mathbb{A}^1$  sur  $X$  obtenu en ajoutant une copie du fibré trivial. Ce schéma admet un recouvrement ouvert évident par  $(E \times \mathbb{G}_m, E^\times \times \mathbb{A}^1)$ . On en déduit un diagramme d'immersions

$$\begin{array}{ccc} E^\times \times \mathbb{G}_m & \longrightarrow & E \times \mathbb{G}_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ E^\times & \xrightarrow{s_0} & E^\times \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow E \oplus \mathbb{1} \end{array}$$

dans lequel le carré est cartésien et  $s_0$  est la section nulle. Chaque schéma de ce diagramme a une action canonique de  $\mathbb{G}_m$  : considérant le quotient par  $\mathbb{G}_m$ , on en déduit un diagramme

d'immersions :

$$\begin{array}{ccc} E^\times & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{s'_0} \lambda_E \longrightarrow & \mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1}) \end{array}$$

où  $s'_0$  est la section nulle du fibré inversible canonique  $\lambda_E$  sur  $\mathbb{P}(E)$ . Ainsi,  $E$  est un ouvert de  $\mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1})$  dont le complémentaire est le schéma  $\mathbb{P}(E)$  vu à travers la composée des flèches horizontales inférieure dans le diagramme précédent.<sup>(4)</sup> D'après la propriété d'excision des motifs (cf. proposition VII.9), on en déduit un isomorphisme canonique :

$$(XII.6) \quad M(E/E^\times) \simeq M(\mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1})/\lambda) \simeq M(\mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1})/\mathbb{P}(E)).$$

**Définition XII.6.** — Si  $X$  est un  $S$ -schéma lisse et  $E/X$  est un fibré vectoriel, on pose  $M_S Th(E) = M_S(E/E^\times)$  et on l'appelle l'espace de Thom de  $E/X$  sur  $S$ .

**Exemple XII.2.** — Dans le cas particulier où  $E = \mathbb{A}_S^n$  pour un entier  $n > 0$ , on en déduit un isomorphisme canonique :

$$M_S(\mathbb{P}_S^n/\mathbb{P}_S^{n-1}) = M_S(\mathbb{A}_S^n/\mathbb{A}_S^n - \{0\}) = \mathbb{Z}_S(n)[2n].$$

On laisse la dernière identification en exercice.

### 2.3. Enoncé et preuve. —

**XII.2.3.a.** — Soit  $S$  un schéma régulier et  $E/S$  un fibré vectoriel de rang  $n+1$ . Le fibré en droites  $\lambda_E$  sur  $\mathbb{P}(E)$  correspond à un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible auquel on associe une classe  $c_1(\lambda) \in \text{Pic}(\mathbb{P}(E))$ . Compte tenu de l'isomorphisme (XII.1) cette classe correspond donc à un morphisme

$$M_S(\mathbb{P}(E)) \rightarrow \mathbb{Z}_S(1)[2]$$

que l'on note encore  $c_1(\lambda_E)$  par abus.

**Théorème XII.3.** — Avec les notations qui précèdent, le morphisme

$$\epsilon_E = \sum_{i=0}^n c_1(\lambda_E)^i : M_S(\mathbb{P}(E)) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}_S(i)[2i]$$

est un isomorphisme dans  $DM_{gm}^{eff}$ .

*Démonstration.* — Considérons un recouvrement ouvert  $f : W \rightarrow S$  tel que le fibré vectoriel  $F = E \times_S W$  sur  $W$  soit isomorphe à  $\mathbb{A}_W^{n+1}$ . Notons que  $\lambda_E \times_S W = \lambda_F$ . L'isomorphisme (XII.1) est naturel en  $S$  par rapport aux morphismes lisses : on en déduit :  $f^*(\epsilon_E) = \epsilon_F$ .

D'après la proposition VII.13, le foncteur  $f^*$  est conservatif et il suffit donc de traiter le cas de  $F/W$ . Par hypothèse, on obtient un isomorphisme  $\phi : \mathbb{P}(F) \rightarrow \mathbb{P}_W^n$ . Si l'on note  $\lambda_n$  le fibré inversible canonique sur  $\mathbb{P}_W^n$ , cet isomorphisme envoie  $\lambda_F$  sur  $\lambda_n$  : on en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{P}(F)) & \xrightarrow{\phi} & M(\mathbb{P}_W^n) \\ \epsilon_F \searrow & & \swarrow \epsilon_{\mathbb{A}_W^n} \\ & \bigoplus_{i \leq n} \mathbb{Z}_W(i)[2i] & \end{array}$$

On est donc ramené au cas où  $E = \mathbb{A}_S^n$ . On pose  $c_{1,n} = c_1(\lambda_n)$ ,  $\epsilon_n = \epsilon_{\mathbb{A}_S^n}$ .

Le cas  $n = 0$  est trivial. Le cas  $n = 1$  est précisément le corollaire XII.2.2. Le cas général en résulte par récurrence à partir de l'isomorphisme de l'exemple XII.2 (voir par exemple [Dég08, lem. 3.3]).  $\square$

<sup>(4)</sup>On dit que  $\mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1})$  est la *complétion projective* de  $E$ .

**Remarque XII.5.** — Notons que si  $X/S$  est un schéma lisse de morphisme structural  $p$ , et  $E/X$  un fibré vectoriel de rang  $n + 1$ , on en déduit un isomorphisme canonique

$$M_S(\mathbb{P}(E)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^n M_S(X)(i)[2i]$$

dont la projection sur  $M_S(X)(i)[2i]$  est définie canoniquement comme la classe du fibré  $\lambda_E$  à travers le morphisme canonique induit par  $p_{\sharp}$  :

$$\mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(X)}(M_X(\mathbb{P}(E)), \mathbb{Z}_X(1)[2]) = \mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(S)}(M_S(\mathbb{P}(E)), M_S(X)(1)[2]).$$

**XII.2.3.b.** — Compte tenu du foncteur (XII.2), l'isomorphisme  $\epsilon_E$  est vrai dans  $DM_{gm}(S)$ . Si  $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow S$  désigne la projection canonique, le morphisme  $p^*$  fait de  $H_{\mathcal{M}}^{*,*}(\mathbb{P}(E))$  une  $H_{\mathcal{M}}^{*,*}(S)$ -algèbre bigraduée. Appliquant le foncteur  $\mathrm{Hom}_{DM_{gm}(S)}(-, \mathbb{Z}_S(*)[*])$  à l'isomorphisme  $\epsilon$ , on obtient donc :

**Corollaire XII.3.1.** — *Pour tout fibré vectoriel  $E/S$  de rang  $n$ ,  $H_{\mathcal{M}}^{*,*}(\mathbb{P}(E))$  est un  $H_{\mathcal{M}}^{*,*}(S)$ -module bigradué libre avec pour base  $(1, c_1(\lambda_E), \dots, c_1(\lambda_E)^{n-1})$ .*

Sous les hypothèses du corollaire, on déduit qu'il existe une unique suite de classe  $c_i(E) \in H_{\mathcal{M}}^{2i,i}(S)$  pour un entier  $i \in [0, n]$  satisfaisant la relation :

$$(XII.7) \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot p^*(c_i(E)) \cdot c_1(\lambda_E)^{n-i}.$$

Les éléments  $c_i(E)$  sont appelées les classes de Chern motiviques.

**Remarque XII.6.** — Ces classes vérifient toutes les propriétés habituelles des classes de Chern. On renvoie à [Dég08] pour plus de détails.

**XII.2.3.c.** — Soit  $E/S$  un fibré vectoriel de rang  $n$ . On définit la classe de Thom de  $E$  comme l'élément

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot p^*(c_i(E)) \cdot c_1(\lambda_E)^{n-i}$$

de  $H_{\mathcal{M}}^{2n,n}(\mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1}))$ . Notons que par définition, sa restriction au schéma  $\mathbb{P}(E)$  est nulle. On note encore

$$th(E) : M_S(\mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1})) \rightarrow \mathbb{Z}_S(n)[2n]$$

le morphisme de  $DM_{gm}(S)$  induit par cette classe.

**Corollaire XII.3.2.** — *Avec les notations précédentes, le morphisme  $th(E)$  induit un unique isomorphisme*

$$\overline{th}(E) : M_S(\mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1})/\mathbb{P}(E)) \rightarrow \mathbb{Z}_S(n)[2n].$$

dans  $DM_{gm}(S)$ .

Plus généralement, si  $X$  est un  $S$ -schéma lisse et  $E/X$  un fibré vectoriel de rang  $n$ , on obtient d'après le corollaire précédent et l'isomorphisme (XII.6) l'isomorphisme suivant dans  $DM_{gm}(S)$  :

$$(XII.8) \quad M_S Th(E) \xrightarrow{\sim} M_S(X)(n)[2n]$$

appelé suivant F.Morel l'*isomorphisme de Thom*.

## 2.4. Théorème de pureté. —

**XII.2.4.a.** — Soit  $X$  un schéma noethérien,  $i : Z \rightarrow X$  une immersion fermée d'idéal  $\mathcal{I}$ . Le  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{I}$  est alors localement de présentation fini.

On note  $\mathcal{I}^2$  l'image  $\mathcal{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{I}$  par le morphisme produit  $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ . C'est un  $\mathcal{O}_X$ -faisceau d'idéaux. Pour tout entier  $n > 0$ , on définit itérativement le  $\mathcal{O}_X$ -faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}^n$ ; par convention,  $\mathcal{I}^0 = \mathcal{O}_X$ .

Pour tout entier  $n \geq 0$ , le  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent  $\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$  est à support dans  $Z$ , ce qui se traduit par l'isomorphisme :

$$\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1} \rightarrow i_*i^*(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}).$$

Par abus de langage, on identifie  $\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$  avec le  $\mathcal{O}_Z$ -module quasi-cohérent  $i^*(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1})$ .

**Définition XII.7.** — Considérons les notations ci-dessus.

1. On définit le *faisceau conormal* de  $i$  comme le  $\mathcal{O}_Z$ -module quasi-cohérent  $\mathcal{N}_Z(X) := \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ .
2. On définit le *cône normal* de  $Z$  dans  $X$  comme le  $Z$ -schéma affine :

$$C_Z(X) = \text{Spec}_X \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1} \right).$$

3. On dit que  $i$  est *régulière* si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) Le  $\mathcal{O}_Z$ -module  $\mathcal{N}_Z(X)$  est localement libre.
- (b) Le morphisme canonique de  $\mathcal{O}_Z$ -algèbres graduées :

$$\text{Sym}_Z(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$$

est un isomorphisme.

Si  $i$  est une immersion fermée régulière, le cône normal de  $Z$  dans  $X$  est donc un fibré vectoriel que l'on note encore  $N_Z(X)$ .

**Remarque XII.7.** — De cette définition et du théorème IV.4 on peut déduire que  $i$  est une immersion régulière si et seulement si pour tout point  $z$  de  $Z$ , l'idéal  $\mathcal{I}_z$  de  $\mathcal{O}_{X,z}$  admet une suite  $\mathcal{O}_{X,z}$ -régulière de paramètres.

Ainsi, un anneau local  $A$  est régulier si et seulement si l'immersion de son point fermé est régulière dans le sens précédent. De même un schéma noethérien est régulier si et seulement si l'immersion de tout point fermé de  $X$  est régulière.

**XII.2.4.b.** — Soit  $X$  un schéma noethérien et  $i : Z \rightarrow X$  une immersion fermée d'idéal  $\mathcal{I}$ . On définit l'*espace de déformation au cône normal*  $D_Z(X)$  comme le spectre de la sous- $\mathcal{O}_X[t]$ -algèbre cohérente de  $\mathcal{O}_X[t, t^{-1}]$  suivante :

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}^n \cdot t^{-n}$$

où  $\mathcal{I}^n = \mathcal{O}_X$  pour  $n < 0$ .

On dispose donc d'un morphisme canonique  $D_Z X \rightarrow \mathbb{A}_X^1$ . On obtient les calculs suivants :

1. Si on quotiente  $\mathcal{A}$  par l'idéal  $(t)$ , on obtient la  $\mathcal{O}_X$ -algèbre  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$  : la fibre de  $D_Z X$  au-dessus de 0 est le cône normal  $C_Z X$ .
2. On obtient un isomorphisme canonique  $\mathcal{A}[t^{-1} = \mathcal{O}_X[t, t^{-1}] : D_Z X|_{\mathbb{G}_m} = X \times \mathbb{G}_m$ . Ainsi, la fibre de  $D_Z X$  au-dessus de 1 est simplement  $X$ .

Bien sûr,  $D_Z(Z) = \mathbb{A}_Z^1$  est un sous-schéma fermée de  $D_Z(X)$ . En termes de paires fermées, on a donc obtenu des morphismes cartésiens :

$$(X, Z) \xrightarrow{d_1} (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) \xleftarrow{d_0} (C_Z X, Z). \quad (\text{XII.9})$$

où  $d_1$  (resp.  $d_0$ ) désigne l'immersion canonique de la fibre au-dessus de 1 (resp. 0). Notons que les schémas  $D_Z X$  et  $C_Z X$  sont fonctoriels par rapport aux morphismes cartésiens de paires fermées. De plus, le diagramme (XII.9) est naturel par rapport à cette functorialité.

Rappelons que, suivant la définition VII.2.2.a, on associe à toute paire fermée  $(X, Z)$  sur  $S$  un motif relatif  $M_{Z,S}(X)$  dans  $DM_{gm}^{eff}(S)$  de manière fonctorielle par rapport aux morphismes cartésiens de paires fermées.

**Proposition XII.4.** — *Soit  $(X, Z)$  une paire fermée lisse sur  $S$ . Alors,  $Z \rightarrow X$  est une immersion fermée régulière et les morphismes*

$$M_{S,Z}(X) \xrightarrow{d_{1*}} M_{S,\mathbb{A}_Z^1}(D_Z X) \xleftarrow{d_{0*}} M_{S,Z}(N_Z X) = M_S Th(N_Z X)$$

sont des isomorphismes dans  $DM_{gm}^{eff}$ .

*Démonstration.* — Pour démontrer ce théorème, on se ramène en utilisant la proposition XI.2 ainsi que la naturalité du diagramme (XII.9) au cas où  $(X, Z) = (\mathbb{A}_Z^c, Z)$ . Mais dans ce cas, un calcul direct montre que  $D_Z X = \mathbb{A}_Z^{c+1}$  et le théorème résulte de l'invariance par homotopie.  $\square$

Comme corollaire de la proposition précédente et de l'isomorphisme (XII.8), on obtient le théorème de pureté :

**Théorème XII.5.** — *Pour toute paire fermée  $(X, Z)$  lisse de codimension  $c$  sur  $S$ , il existe un isomorphisme canonique dans  $DM_{gm}^{eff}$  :*

$$M_{S,Z}(X) \xrightarrow{p_{X,Z}} M_S(Z)(c)[2c].$$

Rappelons que l'on dispose d'un triangle distingué canonique :

$$M_S(X - Z) \rightarrow M_S(X) \rightarrow M_{S,Z}(X) \rightarrow M_S(X - Z)[1]$$

**Définition XII.8.** — A toute paire fermée lisse  $(X, Z)$  sur  $S$  de codimension  $c$ , on associe à partir du triangle précédent et de l'isomorphisme de pureté un triangle distingué :

$$M_S(X - Z) \xrightarrow{j^*} M_S(X) \xrightarrow{i^*} M_S(Z)(c)[2c] \xrightarrow{\partial_{X,Z}} M_S(X - Z)[1]$$

appelé *triangle de Gysin*. Le morphisme  $i^*$  est appelé le *morphisme de Gysin* associé à l'immersion fermée  $i : Z \rightarrow X$ . Le morphisme  $\partial_{X,Z}$  est appelé le *résidu* associé à la paire fermée  $(X, Z)$ .

On fera attention au fait que les motifs sont covariants. En cohomologie motivique par exemple, le morphisme de Gysin  $i^*$  induit un pushout  $i_*$ .

**Exemple XII.3.** — Sous les hypothèses de la définition précédente, on définit la classe fondamentale de  $Z$  dans  $X$  comme l'élément de  $H_{\mathcal{M}}^{2c,c}(X)$  suivant :

$$\eta_Z(-X) = i_*(1).$$

Lorsque  $i : X \rightarrow L$  est la section nulle d'un fibré inversible  $L$  sur  $X$ , la classe fondamentale  $\eta_X(L)$  est simplement la classe de Chern  $c_1(L)$ .

**XII.2.4.c.** — Considérons un morphisme cartésien de paires fermées  $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$  lisses sur  $S$ . On note  $i : Z \rightarrow X$ ,  $k : T \rightarrow Y$  les immersions canoniques,  $h : (Y - T) \rightarrow (X - Z)$  le morphisme induit par  $f$ .

Le morphisme induit sur les fibrés normaux se décompose :

$$N_T Y \xrightarrow{\sigma} g^{-1} N_Z X \xrightarrow{g'} N_Z X$$

où  $\sigma$  est un monomorphisme de fibrés vectoriels sur  $Z$  et  $g'$  est induit par  $g$ . On dit que le morphisme  $(f, g)$  est *transverse* lorsque  $\sigma$  est un isomorphisme (de manière équivalente, la codimension de  $T$  dans  $Y$  est en tous points la même que la codimension de  $Z$  dans  $X$ ).

**Proposition XII.6.** — *Si  $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$  est un morphisme transverse de paires fermées lisses chacune de codimension  $c$ , le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} M_S(Y) & \xrightarrow{k^*} & M_S(T)(c)[2c] & \xrightarrow{\partial_{Y,T}} & M_S(Y - T)[1] \\ f_* \downarrow & & \downarrow g_* & & \downarrow h_* \\ M_S(X) & \xrightarrow{i^*} & M_S(Z)(c)[2c] & \xrightarrow{\partial_{X,Z}} & M_S(X - Z)[1]. \end{array}$$

Cela résulte simplement de la functorialité de la déformation au cône normal et du diagramme (XII.9).

**XII.2.4.d.** — Reprenons les notations du paragraphe précédant la proposition. On suppose que  $(X, Z)$  (resp ;  $(Y, T)$ ) est de codimension  $n$  (resp.  $m$ ). Notons que nécessairement,  $m \leq n$ . On pose  $e = n - m$ . C'est le rang du fibré vectoriel quotient  $E = g^{-1}N_Z X / N_T Y$  sur  $T$ . Considérons la classe de Chern motivique de  $E$  :

$$c_e(E) : M_S(T) \rightarrow \mathbb{Z}_S(e)[2e]$$

On définit un morphisme composé :

$$c_e(E) \boxtimes g_* : M_S(T) \xrightarrow{\delta_*} M_S(T) \otimes M_S(T) \xrightarrow{c_e(E) \otimes g_*} M_S(T)(e)[2e]$$

**Proposition XII.7.** — *Avec les notations qui précèdent, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} M_S(Y) & \xrightarrow{k^*} & M_S(T)(m)[2m] & \xrightarrow{\partial_{Y,T}} & M_S(Y - T)[1] \\ f_* \downarrow & & \downarrow c_e(E) \boxtimes g_* & & \downarrow h_* \\ M_S(X) & \xrightarrow{i^*} & M_S(Z)(n)[2n] & \xrightarrow{\partial_{X,Z}} & M_S(X - Z)[1] \end{array}$$

Cette proposition se démontre à nouveau en utilisant la naturalité du diagramme (XII.9).

**Exemple XII.4.** — Considérons un paire fermée  $(X, Z)$  lisse sur  $S$  de codimension  $n$ . Supposons qu'il existe un fibré vectoriel  $E/X$  de rang  $n$  et une section  $s : X \rightarrow E$  telle que  $s$  est transverse à la section nulle et  $Z = s^{-1}s_0(X)$ .

Alors, dans ce cas, la proposition précédente donne :

$$\eta_Z(X) = c_n(E).$$

On retrouve en particulier le calcul de l'exemple XII.3.

**Remarque XII.8.** — Notons finalement qu'on peut démontrer que le morphisme de Gysin d'une immersion fermée est fonctoriel : pour des immersions fermées (de codimension pure)

$$T \xrightarrow{k} Z \xrightarrow{i} X$$

entre  $S$ -schémas lisses, la composée suivante

$$M_S(X) \xrightarrow{i^*} M_S(Z)(n)[2n] \xrightarrow{k^*} M_S(T)(m+n)[2m+2n]$$

est égale à  $(ki)^*$ .

### 3. Morphisme de Gysin et dualité

**XII.3.0.e.** — Rappelons qu'un morphisme de schémas  $f : Y \rightarrow X$  est dit (fortement) projectif s'il admet une factorisation

$$Y \xrightarrow{i} \mathbb{P}(E) \xrightarrow{p} X$$

où  $i$  est une immersion fermée et  $p$  la projection d'un fibré projectif.

Supposons pour simplifier que la codimension de  $i$  (resp. le rang de  $E$  sur  $X$ ) soit constant égale à  $c$  (resp.  $n + 1$  pour un entier  $n$ ). Notons que  $f$  est alors de dimension relative constante égale à  $d = n - c$ .

Supposons que  $f$  est un morphisme de  $S$ -schémas lisses. On suppose que le rang de  $E/X$  est constant et on pose  $n = \operatorname{rg}_X(E) - 1$ . On définit alors un morphisme  $p^*$  comme la composée suivante :

$$M_S(X)(n)[2n] \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n M_S(X)(i)[2i] \rightarrow M_S(\mathbb{P}(E))$$

où le premier morphisme est l'inclusion canonique et le second est la réciproque de l'isomorphisme du fibré projectif (théorème XII.3). On peut vérifier que le morphisme composé :

$$(XII.10) \quad M_S(X)(n)[2n] \xrightarrow{p^*} M_S(\mathbb{P}(E)) \xrightarrow{i^*} M_S(Y)(c)[2c]$$

est indépendant de la factorisation choisie.<sup>(5)</sup>

**Définition XII.9.** — Avec les notations qui précèdent, on définit le morphisme de Gysin associé à  $f$  comme le morphisme composé suivant :

$$f^* : M_S(X)(d)[2d] \rightarrow M_S(Y)$$

obtenu en choisissant une factorisation comme ci-dessus et en tensoriant le morphisme (XII.10) par  $\mathbb{Z}_S(-c)[-2c]$ .

#### 3.1. Filtration par coniveau. —

**Définition XII.10.** — Soit  $X$  un schéma.

Un *drapeau de  $X$*  est une suite décroissante  $(Z^p)_{p \in \mathbb{N}}$  de sous-schémas fermés de  $X$  telle que  $\operatorname{codim}_X(Z^p) \geq p$ . On note  $\mathcal{D}(X)$  l'ensemble des drapeaux de  $X$ , ordonné par inclusion.

Par commodité, on considèrera qu'un drapeau  $Z^* = (Z^p)_{p \in \mathbb{N}}$  est  $\mathbb{Z}$ -gradué en posant  $Z^{-n} = X$  pour  $n > 0$ . L'ensemble des drapeaux est non vide et filtrant.

Rappelons la définition suivante :

**Définition XII.11.** — Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. Un couple exact de  $\mathcal{A}$  est la donnée d'objets  $\mathbb{Z}^2$ -gradués  $D^{**}$  et  $E^{**}$  et d'une suite exacte

$$D^{**} \xrightarrow[(-1,1)]{a} D^{**} \xrightarrow[(1,0)]{b} E_1^{**} \xrightarrow[(0,0)]{c} D^{**}.$$

formées de morphismes homogènes dont le degré est indiqué par chaque couple d'entiers.

On associe à un tel couple exact une suite spectrale dont le premier terme est l'objet  $E_1^{p,q}$  avec pour différentielle

$$d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q}$$

égale à  $d_1 = b \circ c$ .

<sup>(5)</sup>Le point clé pour cette vérification est de montrer que si  $E = F \oplus \mathbb{1}$  et  $s : X \rightarrow \mathbb{P}(F \oplus \mathbb{1})$  est la section canonique,  $s^*p^* = 1$ . Voir [Dég07, lem. 2.6] dans le cas où  $S$  est le spectre d'un corps parfait et [Dég08, lem. 5.11] dans le cas général.

**XII.3.1.a.** — Soit  $S$  un schéma régulier et  $X$  un  $S$ -schéma lisse. Considérons un drapeau  $Z^*$  de  $X$ . Pour tout entier  $p \in \mathbb{Z}$ , on peut considérer dans  $DM_{gm}$  les triangles distingués suivants :

$$M(X - Z^p) \rightarrow M(X - Z^{p+1}) \rightarrow M(X - Z^{p+1}/X - Z^p) \rightarrow M(X - Z^p)[1]$$

Fixons un entier  $n \in \mathbb{Z}$ . Considérant un couple d'entiers  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ , on en déduit en cohomologie motivique une suite exacte longue :

$$H_{\mathcal{M}}^{p+q-1, n}(X - Z^{p+1}) \xrightarrow{a} H_{\mathcal{M}}^{p+q-1, n}(X - Z^p) \xrightarrow{b} H_{\mathcal{M}}^{p+q, n}(X - Z^{p+1}/X - Z^p) \xrightarrow{c} H_{\mathcal{M}}^{p+q, n}(X - Z^{p+1})$$

qui est naturelle par rapport à l'inclusion des drapeaux. Passant à la limite inductive suivant l'ensemble filtrant des drapeaux de  $X$ , on en déduit donc un couple exact de groupes abéliens :

$$(XII.11) \quad \begin{aligned} D^{p, q}(X, n) &= \varinjlim_{Z^* \in \mathcal{D}(X)} H_{\mathcal{M}}^{p+q, n}(X - Z^{p+1}), \\ E_1^{p, q}(X, n) &= \varinjlim_{Z^* \in \mathcal{D}(X)} H_{\mathcal{M}}^{p+q, n}(X - Z^{p+1}/X - Z^p). \end{aligned}$$

**Définition XII.12.** — La suite spectrale associée au couple exact précédent est appelée la *suite spectrale du coniveau* pour la cohomologie motivique de  $X$  en poids  $n$ .

Notons que si  $p < 0$  ou  $p > \dim(X)$ ,  $E_1^{p, q}(X, n) = 0$ . Il en résulte que la suite spectrale est convergente. Plus précisément, le cohomologie motivique  $H_{\mathcal{M}}^{i, n}(X)$  admet une filtration dont le cran  $p$  est donnée par la formule<sup>(6)</sup>

$$N^p H_{\mathcal{M}}^{i, n}(X) = \text{Ker} \left( H_{\mathcal{M}}^{i, n}(X) \rightarrow \varinjlim_{Z^*} H_{\mathcal{M}}^{i, n}(X - Z^p) \right).$$

La suite spectrale du coniveau converge vers le groupe abélien filtré  $(H_{\mathcal{M}}^{*, n}(X), N^*)$  : pour tout  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ , on obtient un isomorphisme canonique :

$$(XII.12) \quad E_{\infty}^{p, q}(X, n) = N^p H_{\mathcal{M}}^{p+q, n}(X) / N^{p+1} H_{\mathcal{M}}^{p+q, n}(X)$$

**XII.3.1.b.** — Supposons maintenant que  $S$  est le spectre d'un corps parfait  $k$ . Notons que dans les conditions du paragraphe XII.3.1.a, si  $Z^{p+1}$  contient le lieu singulier de  $Z^p$  sur  $k$ , le théorème de pureté fournit un isomorphisme canonique :

$$H_{\mathcal{M}}^{p+q, n}(X - Z^{p+1}/X - Z^p) = H_{\mathcal{M}}^{q-p, n-p}(Z^p - Z^{p+1})$$

On en déduit le résultat suivant :

**Proposition XII.8.** — Pour tout  $k$ -schéma lisse  $X$  et tout triplet d'entiers  $(p, q, n) \in \mathbb{Z}^3$ ,

$$E_1^{p, q}(X, n) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H_{\mathcal{M}}^{q-p, n-p}(\kappa(x))$$

où l'on rappelle que  $X^{(p)}$  désigne l'ensemble des points de codimension  $p$  et  $\kappa(x)$  désigne le corps résiduel de  $x$ .

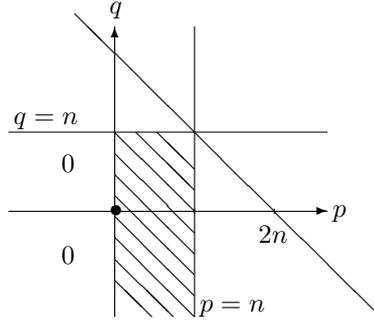
**XII.3.1.c.** — La suite spectrale du coniveau permet donc de tirer des informations concernant la cohomologie motivique d'un  $k$ -schéma lisse à partir de la cohomologie motivique de ses corps résiduels.

<sup>(6)</sup>Cette filtration est appelée suivant Grothendieck la filtration par coniveau.

Pour illustrer ce principe, on va utiliser les résultats suivants<sup>(7)</sup> concernant la cohomologie motivique d'un corps  $k$  (quelconque) :

$$H_{\mathcal{M}}^{i,j}(k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = j = 0, \\ k^\times & \text{si } i = j = 1, \\ 0 & \text{si } i > j \text{ ou } j < 0. \end{cases}$$

D'après la proposition précédente, on en déduit donc :  $E_1^{p,q}(X, n) = 0$  si  $p \notin [0, n]$  ou  $q > n$ . On peut donc visualiser la suite spectrale du coniveau associée à  $(X, n)$  comme suit :



où seule la partie hachurée est non nulle. Dans le cas  $p + q = n$ , il en résulte donc :

$$E_\infty^{p,q}(X, n) = \begin{cases} E_2^{p,q}(X, n) & \text{si } p = q = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient plus précisément le résultat suivant :

**Proposition XII.9.** — *Avec les notations et hypothèses qui précèdent, la différentielle aboutissant au terme  $E_1^{n,n}(X, n)$  s'identifie au morphisme (II.26) :*

$$E_1^{n-1,n}(X, n) = \bigoplus_{x \in X^{(n-1)}} \kappa(x)^\times \xrightarrow{dx} Z^n(X) = E_1^{n,n}(X, n).$$

D'après la définition II.28, on en déduit donc un isomorphisme canonique :

$$(XII.13) \quad H_{\mathcal{M}}^{2n,n}(X) = CH^n(X).$$

## Références

- [Dég07] F. DÉGLISE – « Around the gysin triangle I », (revised version), août 2007.  
[Dég08] ———, « Around the gysin triangle II », *Doc. Math.* **13** (2008), p. 613–675.  
[SV96] A. SUSLIN & V. VOEVODSKY – « Singular homology of abstract algebraic varieties », *Invent. Math.* **123** (1996), no. 1, p. 61–94.

---

2009-2010

FRÉDÉRIC DÉGLISE, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail* : [deglise@math.univ-paris13.fr](mailto:deglise@math.univ-paris13.fr)  
*Url* : <http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/>

---

<sup>(7)</sup>Compte tenu du théorème XII.2, cela résulte du corollaire XIII.9.2 et du théorème de simplification ?? de Voevodsky.