Table des matières

COURS XIII
CONCLUSION

1. Quelques exemples de motifs mixtes

Pour les exemples qui suivent, on se place dans le cas où la base est un corps parfait k. Tous les k-schémas sont supposés séparés de type fini.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on notera $\mathscr{L}_{k,\leq n}$ la sous catégorie pleine de $\mathscr{L}_k$ formée des k-schémas de dimension inférieure à n. De même, on notera

$$DM^{eff}_{gm,\leq n}(k)$$

la plus petite sous-catégorie triangulée épaisse de $DM^{eff}_{gm}(k)$ contenant les motifs des schémas de $\mathscr{L}_{k,\leq n}$.

1.1. Dimension nulle. —

XIII.1.1.a. — Soit $\bar{k}$ une cloture algébrique de k et π son groupe de Galois. C'est un groupe pro-fini qui est donc naturellement muni d'une topologie canonique.

On note $\mathcal{F}^\pi$ la catégorie des ensembles discrets finis munis d'une action continue de π. Si X est un k-schéma de dimension nulle, l'ensemble fini $X(\bar{k})$ est muni d'une action continue de π. Le foncteur qui s'en déduit :

$$\mathscr{L}_{k,\leq 0} \to \mathcal{F}^\pi, X \mapsto X(\bar{k})$$

est d'après la théorie de Galois interprétée par Grothendieck une équivalence entre la catégorie des k-schémas de dimension nulle et $\mathcal{F}^\pi$.

Notons $\mathbb{Z}[\mathcal{F}^\pi]$ la catégorie additive libre engendrée par $\mathcal{F}^\pi$.

Proposition XIII.1. — *La restriction du foncteur graphe*

$$\mathcal{F}^\pi \simeq \mathscr{L}_{k,\leq 0} \to \mathscr{L}^{cor}_k \qquad \text{(XIII.1)}$$

induit une équivalence de catégorie

$$\mathbb{Z}[\mathcal{F}^\pi] \to \mathscr{L}^{cor}_{k,\leq 0}.$$

La preuve est laissée en exercice.(1) On en déduit le résultat suivant :

(1) Cela résulte essentiellement de l'isomorphisme

$$c_k\,(E, L) = \mathbb{Z}.\pi_0(\mathrm{Spec}(E \otimes_k L))$$

où E/k et L/k sont des extensions de corps finies.

Proposition XIII.2. — *Le foncteur* (XIII.1) *induit une équivalence de catégories :*

$$K^b(\mathcal{F}^\pi)^\sharp \to DM^{eff}_{gm,\leq 0}(k).$$

Démonstration. — Le foncteur est évidemment essentiellement surjectif par définition. Il reste à montrer qu'il est pleinement fidèle. Considérons un k-schéma lisse connexe de dimension nulle $X = \mathrm{Spec}(E)$. Considérant les notations du paragraphe VII.2.1.a, il suffit de vérifier que le préfaisceau

$$\mathscr{L}_k^{cor} \to \mathscr{A}b, Y \mapsto c_k\,(Y, X)$$

envoie les $\mathscr{V}_k$-équivalences sur des quasi-isomorphismes. Or c'est évident du fait que $c_k\,(Y, X) = \mathbb{Z}.\pi_0(Y \times_k X)$. □

XIII.1.1.b. — Etant donnée une catégorie additive $\mathscr{A}$, on note $\mathscr{A} \otimes \mathbb{Q}$ la catégorie $\mathbb{Q}$-linéaire associée : ses objets sont les objets de $\mathscr{A}$ et les morphismes entre deux objets A et B est formé par le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel : $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

La catégorie $\mathbb{Z}[\mathcal{F}^\pi] \otimes \mathbb{Q}$ est bien connue : il s'agit de la catégorie $\mathbb{Q}[\pi]$ des $\mathbb{Q}$-représentations de π, autrement dit des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de π. Il est bien connu que cette catégorie est abélienne semi-simple. La proposition précédente admet donc le corollaire suivante :

Corollaire XIII.2.1. — *Le foncteur* (XIII.1) *induit une équivalence de catégories :*

$$D^b(\mathbb{Q}[\pi]) \simeq DM^{eff}_{gm,\leq 0}(k) \otimes \mathbb{Q}.$$

1.2. Dimension un. —

XIII.1.2.a. — On considère à nouveau une cloture spérable $\bar{k}$ de k et π son groupe de Galois.

La catégorie des schémas en groupes est une catégorie additive. La définition suivante est due à Deligne :

***Définition XIII.1* (Deligne)**. — Un 1-motif sur k est un triple (Λ, G, d) où Λ est un réseau (groupe abélien libre de rang fini) muni d'une action continue de π, G est un schéma en groupe semi-abélien(2) et $d : \Lambda \to G(\bar{k})$ est un morphisme π-équivariant.

On identifie un tel 1-motif au complexe de schémas en groupes

$$\Lambda \xrightarrow{d} G$$

qu'il définit. Le groupe G est placé en degré 0.

Ainsi, un morphisme de 1-motifs est un morphisme des complexes associés. On note $1\!-\mathscr{M}ot_k$ la catégorie associée.

Pour le théorème qui suit, on utilise le lemme suivant :

Lemme XIII.3. — *Soit G un k-schéma en groupes.*

Alors, il existe un faisceau avec transferts G^{tr} sur k tel que $G^{tr} \circ \gamma$ est le préfaisceau représenté par G. Ce faisceau dépend fonctoriellement de G.

Dans le cas où $G = \mathbb{G}_m$, on retrouve la structure XII.2.

XIII.1.2.b. — Ainsi, si $[\Lambda \to G]$ est un 1-motif, on lui associe canoniquement un complexe de faisceaux avec transferts $[\Lambda^{tr} \to G^{tr}]$ définissant un foncteur :

$$1\!-\mathscr{M}ot_k \to \mathsf{C}(\mathscr{N}_k^{tr}). \tag{XIII.2}$$

La catégorie $1\!-\mathscr{M}ot_k$ n'est pas abélienne, mais par contre la catégorie rationelle associée $1\!-\mathscr{M}ot_k^{\mathbb{Q}}$ est bien abélienne . Le théorème qui suit a été annoncé par Voeovdsky et démontré par Orgogozo (*cf.* [**Org04**]) :

(2) *i.e.* un schéma en groupes extension d'un tore par un schéma abélien.

Théorème XIII.4. — *Le foncteur* (XIII.2) *induit une équivalence de catégorie :*

$$D^b(1-\mathscr{M}ot_k^{\mathbb{Q}}) \to DM_{gm,\leq 1}^{eff}(k) \otimes \mathbb{Q}.$$

Remarque XIII.1. — si k est un corps fini, la catégorie $1-\mathscr{M}ot_k^{\mathbb{Q}}$ est semi-simple. Dans le cas général, tout objet de $1-\mathscr{M}ot_k^{\mathbb{Q}}$ admet une filtration a trois crans dont les gradués associés sont semi-simples. Cette filtration s'appelle la *filtration par le poids.*

2. Fonctorialité des complexes motiviques

2.1. Catégories de modèles (survol). — On commence par fixer une terminologie pratique :

Définition XIII.2. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie quelconque. Soit $f : X \to Y$ et $g : A \to B$ des morphismes de $\mathscr{C}$.

1. On dit que f a la propriété de relèvement à droite par rapport à g ou que g a la propriété de relèvement à gauche par rapport à f si pour tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

il existe un morphisme $h : B \to X$ rendant les deux triangles du diagramme suivant commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "i"] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

2. On dit que f est un rétracte de g si il existe un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "1_X"] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "1_Y"'] & B \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Exemple XIII.1. — Dans une catégorie abélienne $\mathscr{A}$, un objet P de $\mathscr{A}$ est projectif si et seulement si le morphisme canonique $0 \to P$ a la propriété de relèvement à gauche par rapport à tout épimorphisme.

Dualement un objet I de $\mathscr{A}$ est injectif si et seulement si le morphisme canonique $I \to 0$ a la propriété de relèvement à droite par rapport à tout monomorphisme.

La définition suivante est due à Quillen :

Définition XIII.3. — Une catégorie de modèles est une catégorie $\mathscr{C}$ munie de trois classes de flèches $(\mathcal{W}, Fib, Cof)$ telles que :

(MC1) $\mathscr{C}$ admet des limites projectives et inductives. On note $*$ (resp. $\varnothing$) l'objet final (resp. initial) de $\mathscr{C}$.

(MC2) Pour toutes flèches composables f, g de $\mathscr{C}$, si deux des trois flèches f, g, fg sont dans $\mathcal{W}$, la troisième l'est aussi.

(MC3) Si f est un rétracte de g et si g appartient à $\mathcal{W}$ (resp. Fib, Cof) alors f y appartient aussi.

(MC4) Les flèches de $Cof \cap \mathcal{W}$ (resp. Cof) ont la propriété de relèvement à gauche par rapport aux flèches de Fib (resp. $Fib \cap \mathcal{W}$).

(MC5) Toute flèche f de $\mathscr{C}$ admet une factorisation $f = pi$ telle que $p \in Cof$ et $i \in Fib \cap \mathcal{W}$ (resp. $p \in Cof \cap \mathcal{W}$ et $i \in Fib$).

Dans ce cas, on adopte la terminologie suivante : les flèches de $\mathcal{W}$ (resp. Fib, Cof, $Fib \cap \mathcal{W}$, $Cof \cap \mathcal{W}$) sont appelées les *équivalences faibles* (resp. *fibrations*, *cofibrations*, *fibrations triviales*, *cofibrations triviales*).

De plus, on dit qu'un objet X de $\mathscr{C}$ est *fibrant* (resp. *cofibrant*) si le morphisme canonique $X \to *$ (resp. $\varnothing \to X$) est une fibration (resp. cofibration).

On déduit de ces axiomes la propriété très importante suivante : pour tout objet X de $\mathscr{C}$, il existe un flèche $X_c \to X$ (resp. $X \to X_f$) qui est une fibration triviale (resp. cofibration triviale) et telle que X_c est cofibrant (resp. X_f est fibrant).

Remarque XIII.2. — Il résulte des axiomes que les fibrations (resp. cofibrations) sont exactement les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite (resp. à gauche) par rapport aux cofibrations triviales (resp. fibrations triviales).

Ainsi, étant donnée une classe de flèches $\mathcal{W}$, la donnée de Fib (resp. Cof) détermine de manière unique, si elle existe, la structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{W}$.

Exemple XIII.2. — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne de Grothendieck admettant des limites projectives quelconques. On peut définir deux structures de catégories de modèles canoniques sur $\mathsf{C}(\mathscr{A})$ dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes.

1. *Structure projective* : Les fibrations sont les épimorphismes de complexes. On peut alors caractériser les cofibrations comme les monomorphismes de complexes dont le conoyau est cofibrant. Un complexe K cofibrant pour la structure projectif est dit *projectivement cofibrant*. Si K est *borné supérieurement*, K est projectivement cofibrant si et seulement si pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, K^n est un objet projectif.
2. *Structure injective* : Les cofibrations sont les monomorphismes de complexes. On peut alors caractériser les fibrations comme les épimorphismes de complexes dont le noyau est fibrant. Un complexe L fibrant pour la structure injective est dit *injectivement fibrant*. Si L est *borné inférieurement*, L est injectivement fibrant si et seulement si pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, K^n est un objet injectif.

On renvoie à [**Hov99**] pour ce résultat.

Le théorème fondamental de Quillen est le suivant :

Théorème XIII.5. — 1. *Pour tout objet cofibrant A et tout objet fibrant X, il existe une relation d'équivalence $\sim_h$ sur l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ *telle que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]}(A, X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X)/ \sim_h .$$

2. *Soit $\mathscr{C}_{cf}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ formée des objets fibrants et cofibrants. La relation $\sim_h$ est compatible à la composition dans $\mathscr{C}_{cf}$.*

   Le morphisme d'inclusion canonique

$$\mathscr{C}_{cf} \to \mathscr{C}$$

   induit une équivalence de catégories :

$$\mathscr{C}_{cf}/ \sim_h \to \mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}].$$

Ainsi, l'existence d'une structure de catégories de modèles permet de contrôler les morphismes de la catégories localisées $\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Exemple XIII.3. — Reprenons les notations de l'exemple XIII.2.

Pour la structure projective ou injective, la relation $\sim_h$ qui apparaît dans le théorème précédent est précisément la relation d'homotopie sur les complexes. On en déduit deux façons de calculer les morphismes entre deux complexes K et L dans la catégorie dérivée :

1. *Structure projective* : Le complexe L est trivialement fibrant pour la structure projective. Il existe un quasi-isomorphisme épimorphique de complexe $K \to K'$ tel que K' est projectivement cofibrant. Alors,
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathscr{A})}(K, L) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathscr{A})}(K', L).$$
Notons que si K est borné supérieurement, K' est une résolution projective de K au sens classique. Notons $\mathsf{K}^{projc}(\mathscr{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{K}(\mathscr{A})$ formée des complexes projectivement cofibrants. Le morphisme canonique
$$\mathsf{K}^{projc}(\mathscr{A}) \to \mathsf{D}(\mathscr{A})$$
est une équivalence de catégories.
2. *Structure injective* : Le complexe K est trivialement cofibrant pour la structure injective. Il existe un quasi-isomorphisme monomorphique de complexe $L' \to L$ tel que L' est injectivement cofibrant. Alors,
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathscr{A})}(K, L) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathscr{A})}(K, L').$$
Notons que si L est borné inférieurement, L' est une résolution injective de L au sens classique. Notons $\mathsf{K}^{injf}(\mathscr{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{K}(\mathscr{A})$ formée des complexes injectivement cofibrants. Le morphisme canonique
$$\mathsf{K}^{injf}(\mathscr{A}) \to \mathsf{D}(\mathscr{A})$$
est une équivalence de catégories.

Ainsi, la théorie de Quillen permet de généraliser l'algèbre homologique classique.

Remarque XIII.3. — On déduit de cet exemple le fait intéressant suivant : le morphisme canonique $\mathscr{L}_S^{cor} \to \mathscr{P}_S^{tr}$ induit un foncteur pleinement fidèle :
$$\mathsf{K}^b(\mathscr{L}_S^{cor}) \to \mathsf{D}(\mathscr{P}_S^{tr}).$$
En effet, tout complexe borné de préfaisceaux avec transferts représentables est projectivement cofibrant.

2.2. Foncteurs dérivés (survol). — Rappelons le lemme suivant :

Lemme XIII.6. — *Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories de modèles et*
$$F : \mathscr{C} \leftrightarrows \mathscr{D} : G \tag{XIII.3}$$
une adjontion de catégories.

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *F préserve les cofibrations et les cofibrations triviales.*

(ii) *F préserve les cofibrations et les équivalences faibles entre objets cofibrants.*

(iii) *G préserve les fibrations et les fibrations triviales.*

(iv) *G préserve les fibrations et les équivalences faibles entre objets fibrants.*

Définition XIII.4. — Sous les hypothèses du lemme précédent, on dit que (F, G) est une *adjonction de Quillen* si les conditions équivalentes (i)-(iv) sont vérifiées.

Le théorème suivant est encore du à Quillen :

Théorème XIII.7. — *Pour toute adjonction de Quillen de la forme* (XIII.3)*, il existe :*

(a) *un foncteur dérivé à gauche* $\mathbf{L}F : Ho(\mathscr{C}) \to Ho(\mathscr{D})$ *de* $\mathscr{C} \to \mathscr{D} \to Ho(\mathscr{D})$,

(b) *un foncteur dérivé à droite* $\mathbf{R}G : Ho(\mathscr{C}) \to Ho(\mathscr{D})$ *de* $\mathscr{D} \to \mathscr{C} \to Ho(\mathscr{C})$,

telle que :

1. *Pour tout objet cofibrant* A *de* $\mathscr{C}$*, le morphisme structural* $\mathbf{L}F(A) \to F(A)$ *est un isomorphisme.*
2. *Pour tout objet fibrant* X *de* $\mathscr{D}$*, le morphisme structural* $G(X) \to \mathbf{R}G(X)$ *est un isomorphisme.*

De plus, les fonteurs $(\mathbf{L}F, \mathbf{R}G)$ *sont adjoints.*

On peut encore ajouter le résultat suivant :

Proposition XIII.8. — *Considérons des adjonctions de Quillen :*

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{C}' \underset{G'}{\overset{F'}{\rightleftarrows}} \mathscr{C}''$$

Alors, $(F' \circ F, G \circ G')$ *est une adjonction de Quillen et les transformations naturelles canoniques :*

$$\mathbf{L}F' \circ \mathbf{L}F \to \mathbf{L}(F' \circ F)$$
$$\mathbf{R}(G \circ G') \to \mathbf{R}G \circ \mathbf{R}G'$$

sont des isomorphismes.

Exemple XIII.4. — Considérons l'adjonction de catégories

$$a^{tr} : \mathscr{P}_S^{tr} \leftrightarrows \mathscr{N}_S^{tr} : \mathcal{O}^{tr}.$$

Considérons les catégories $\mathsf{C}(\mathscr{P}_S^{tr})$ et $\mathsf{C}(\mathscr{N}_S^{tr})$ munies de leur structure injective de catégorie de modèles. Du fait que a^{tr} est exact, il préserve les quasi-isomorphismes. De plus, il préserve les cofibrations, puisque ce sont les monomorphismes. On en déduit des foncteurs dérivés :

$$a^{tr} : \mathsf{D}(\mathscr{P}_S^{tr}) \leftrightarrows \mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr}) : \mathbf{R}\mathcal{O}^{tr}.$$

Rappelons que a^{tr} se dérive trivialement. Par contre, $\mathbf{R}\mathcal{O}^{tr}$ se dérive en considérant une résolution injectivement fibrante.

Du fait que $\mathcal{O}^{tr}$ est pleinement fidèle, on déduit formellement que $\mathbf{R}\mathcal{O}^{tr}$ est pleinement fidèle. Ainsi, $\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})$ s'identifie à la localisation de la catégorie $\mathsf{D}(\mathscr{P}_S^{tr})$ par la sous-catégorie localisante formée des complexes K tels que $a^{tr}(K)$ est quasi-isomorphe à 0.

2.3. Faisceaux avec transferts. — Rappelons qu'on dit qu'un carré commutatif de complexes de groupes abéliens

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & L' \arrow[d] \\ K \arrow[r, "f"] & L \end{tikzcd}$$

est *homotopiquement cartésien* si le morphisme induit sur les cônes $C(f) \to C(f')$ est un quasi-isomorphisme.

Définition XIII.5. — Soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts sur S. On dit que K vérifie la propriété de Brown-Gersten si pour tout carré Nisnevich distingué (définition VII.9)

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & V \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, "j"'] & X. \end{tikzcd} \qquad \text{(XIII.4)}$$

le carré $K(\Delta)$ est homotopiquement cartésien.

L'intérêt de cette définition réside dans le lemme suivant, qui est une généralisation, due à Morel-Voevodsky, d'un lemme de Brown-Gersten :

Théorème XIII.9. — *Soit K et L deux complexes de préfaisceaux avec transferts satisfaisant la propriété de Brown-Gersten, et $f : K \to L$ un morphisme de complexes. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $a^{tr}(f) : a^{tr}(F) \to a^{tr}(G)$ *est un quasi-isomorphisme (de complexes de faisceaux).*
2. *Pour tout S-schéma lisse X, $f_X : K(X) \to L(X)$ est un quasi-isomorphisme (autrement dit, f est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux).*

A partir de ce lemme et de l'exemple XIII.4, on obtient :

Corollaire XIII.9.1. — *La catégorie $\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}(\mathscr{P}_S^{tr})$ formée des complexes de préfaisceaux avec transferts satisfaisant la propriété de Brown-Gersten.*

Il en résulte que $DM^{eff}(S)$ est la localisation de la catégorie $\mathsf{D}(\mathscr{P}_S^{tr})$ par rapport à la sous-catégorie localisante engendrée par les complexes de la forme :

1. Pour tout S-schéma lisse X,
$$\dots 0 \to \mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{A}_X^1) \to \mathbb{Z}_S^{tr}(X) \to 0 \dots$$
2. Pour tout carré Nisnevich distingué Δ de la forme (XIII.4),
$$\dots 0 \to \mathbb{Z}_S^{tr}(W) \xrightarrow{\binom{g_*}{-k_*}} \mathbb{Z}_S^{tr}(U) \oplus \mathbb{Z}_S^{tr}(V) \xrightarrow{(j_*, f_*)} \mathbb{Z}_S^{tr}(X) \to 0 \dots$$

D'après la remarque XIII.3, le corollaire suivant est maintenant une conséquence formelle de la définition de $DM_{gm}^{eff}(S)$:

Corollaire XIII.9.2. — *Le foncteur* (IX.82)
$$DM_{gm}^{eff}(S) \to DM^{eff}(S)$$
est pleinement fidèle.

On dit qu'un morphisme de complexes de faisceaux avec transferts est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible si c'est un isomorphisme dans $DM^{eff}(S)$.

Théorème XIII.10. — *La catégorie $\mathsf{C}(\mathscr{N}_S^{tr})$ admet deux structures de catégorie de modèles telle que respectivement :*

1. *les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes (resp. les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles).*
2. *les fibrations sont les épimorphismes de complexes dont le noyau vérifie la propriété de Brown-Gersten (resp. la propriété de Brown-Gersten et d'invariance par homotopie).*

Les complexes cofibrants sont les mêmes pour ces deux structures. Tout complexe borné dont les composantes sont de la forme $\mathbb{Z}_S^{tr}(X)$ pour un S-schéma lisse X est cofibrant.

Ainsi, la catégorie $DM^{eff}(S)$ est la catégorie homotopique associée à une catégorie de modèles sur $\mathsf{C}(\mathscr{N}_S^{tr})$. On appelle cette dernière la *structure $\mathbb{A}^1$-locale.* L'autre structure de catégorie de modèles considérée dans le théorème précédent est appelée la *structure Nisnevich locale.*

XIII.2.3.a. — Le même théorème est vrai si l'on remplace $\mathscr{N}_S^{tr}$ par $\mathscr{N}_S$ et $\mathbb{Z}_S^{tr}(X)$ par $\mathbb{Z}_S(X)$. Or, le foncteur graphe $\gamma : \mathscr{L}_S \to \mathscr{L}_S^{cor}$ induit une adjonction de catégories :

$$\gamma^* : \mathscr{N}_S \leftrightarrows \mathscr{N}_S^{tr} : \gamma_*.$$

Le foncteur γ^* est caractérisé par la propriété : $\gamma^*(\mathbb{Z}_S(X)) = \mathbb{Z}_S^{tr}(X)$.

Considérons les catégories $\mathsf{C}(\mathscr{N}_S)$ et $\mathsf{C}(\mathscr{N}_S^{tr})$ munies de leur structure Nisnevich locale. Notons que d'après le corollaire IX.12.4, le foncteur γ_* est exact : il préserve donc les quasi-isomorphismes. Par ailleurs, de manière évidente, il préserve les objets fibrants et donc les fibrations. Ainsi, (γ^*, γ_*) est une adjonction de Quillen.

Considérons un S-schéma lisse X et un complexe K de faisceaux avec transferts. Comme $\mathbb{Z}_S(X)$ est cofibrant, $\mathbf{L}\gamma^*(\mathbb{Z}_S(X)) = \mathbb{Z}_S^{tr}(X)$. Comme γ_* est exact, $\mathbf{R}\gamma_*(K) = \gamma_*(K)$. Par adjonction, on en déduit donc :

Corollaire XIII.10.1. — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on obtient un isomorphisme canonique :*

$$H^i_{Nis}(X, \gamma_* K) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathscr{N}_S)}(\mathbb{Z}_S(X), \gamma_* K[i]) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathscr{N}_S)}(\mathbb{Z}_S^{tr}(X), K[i]).$$

XIII.2.3.b. — Considérons un morphisme $f : T \to S$ entre Σ-schémas lisses. Alors, l'adjonction

$$f^* : \mathscr{N}_S^{tr} \leftrightarrows \mathscr{N}_T^{tr} : f_*$$

est une adjonction de Quillen pour la structure Nisnevich locale (resp. $\mathbb{A}^1$-locale) : il est évident que f_* respecte les objets fibrants, et donc les fibrations. Il résulte du lemme XIII.9 que f_* préserve les quasi-isomorphismes (resp. $\mathbb{A}^1$-équivalences) entre complexes fibrants. On conclut d'après le lemme XIII.6.

On en déduit donc des foncteurs dérivés :

$$\mathbf{L}f^* : DM^{eff}(S) \leftrightarrows DM^{eff}(T) : \mathbf{R}f_*$$

Notons que par définition, $\mathbf{L}f^*(M_S(X)) = M_T(X \times_S T)$.

Le même raisonnement s'applique dans le cas où f est lisse. On en déduit alors des foncteurs dérivés :

$$\mathbf{L}f_\sharp : DM^{eff}(T) \leftrightarrows DM^{eff}(S) : \mathbf{R}f^* = f^* = \mathbf{L}f^*.$$

Par définition, pour tout T-schéma lisse Y, $\mathbf{L}f_\sharp(M_T(Y)) = M_S(Y)$.

On déduit formelllement à partir de ces définitions le résultat suivant : pour tout carré cartésien de S-schéma lisses

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & S' \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "p"] & S. \end{tikzcd}$$

tel que p est lisse séparé de type fini et f est un morphisme dans $\mathscr{L}_\Sigma$, il existe une isomorphisme naturel :

$$\mathbf{L}q_\sharp \mathbf{L}g^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}f^* \mathbf{L}p_\sharp.$$

Citons enfin le résultat suivant :

Proposition XIII.11. — *Les bifoncteurs respectifs suivants :*

$$\otimes_S^{tr} : \mathsf{C}(\mathscr{N}_S^{tr}) \times \mathsf{C}(\mathscr{N}_S^{tr}) \to \mathsf{C}(\mathscr{N}_S^{tr})$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_S : \mathsf{C}(\mathscr{N}_S^{tr})^{op} \times \mathsf{C}(\mathscr{N}_S^{tr}) \to \mathsf{C}(\mathscr{N}_S^{tr})$$

admettent des foncteurs dérivés respectivement à gauche et à droite par rapport aux $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles.

Ce résultat s'obtient à l'aide le la structure de catégorie de modèles du théorème XIII.10. Ainsi, pour tous S-schémas lisse X et Y, et tout complexe K invariant par homotopie et vérifiant la propriété de Brown-Gersten, on obtient :

1. $M_S(X) \otimes_S^{tr,\mathbf{L}} M_S(Y) = M_S(X \times_S Y)$.
2. Le complexe $\mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_S(M_S(X), K)$ est $\mathbb{A}^1$-équivalent au complexe de faisceaux avec transferts

$$\mathscr{L}_S^{cor} \to \mathsf{C}(\mathscr{A}b), Z/S \mapsto K(X \times_S Z).$$

Plus généralement, le foncteur $DM_{gm}^{eff}(S) \to DM^{eff}(S)$ est monoïdal symétrique.

3. Catégorie stable

Il est possible d'inverser le motif $\mathbb{Z}(1)$ pour le produit tensoriel dérivé de $DM^{eff}(S)$. On obtient ainsi une catégorie triangulée monoïdale symétrique ainsi que des foncteurs adjoints :

$$\Sigma^\infty : DM^{eff}(S) \leftrightarrows DM(S) : \Omega^\infty$$

tel que Σ^∞ est monoïdal symétrique et l'objet $\Sigma^\infty \mathbb{Z}_S(1)$ est inversible pour le produit tensoriel. J'appelle les objets de $DM(S)$ des *spectres motiviques.*

Notons que la catégorie $DM(S)$ est même la catégorie homotopique(3) universelle vérifiant ces propriétés.

Citons à ce propos le théorème suivant du à Voevodsky :

***Théorème XIII.12* (Simplification).** — *Si k est un corps parfait, le foncteur Σ^∞ : $DM^{eff}(k) \to DM(k)$ est pleinement fidèle.*

Par construction, le foncteur pleinement fidèle

$$DM_{gm}^{eff}(S) \to DM^{eff}(S)$$

se prolonge en un foncteur pleinement fidèle :

$$DM_{gm}(S) \to DM(S).$$

Un objet de $DM(S)$ qui est dans l'image de ce foncteur est dit *constructible.* Citons au passage le résultat suivant :

Proposition XIII.13. — *Soit $\mathcal{M}$ un spectre motivique sur S. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathcal{M}$ est constructible.*

(ii) *$\mathcal{M}$ est un objet compact de $DM(S)$.*(4)

Si de plus S est le spectre d'un corps de caractéristique 0, *ces conditions sont équivalentes à la suivante :*

(iii) *$\mathcal{M}$ est fortement dualisable.*

Si l'on travaille dans $DM(S) \otimes \mathbb{Q}$, les conditions (i) et (ii) sont équivalentes à (iii) en supposant simplement que S est le spectre d'un corps.

(3) *i.e.* la catégorie homotopique associée à une catégorie de modèles. La propriété d'universalité fait référence aux adjontions de catégories homotopiques qui sont les foncteurs dérivés d'une adjonction de Quillen.

(4) *i.e.* le foncteur $\mathrm{Hom}_{DM(S)}(\mathcal{M}, .)$ commute aux sommes directes.

Références

[Hov99] M. Hovey – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Org04] F. Orgogozo – « Isomotifs de dimension inférieure ou égale à un », *Manuscripta Math.* **115** (2004), no. 3, p. 339–360.

2009-2010

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* `deglise@math.univ-paris13.fr`
Url : `http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/`