Table des matières

COURS III
CYCLE ASSOCIÉ À UN MODULE

1. Compléments sur le support

Considérons à nouveau les notations de la section 2.3. La proposition suivante est évidente :

Proposition III.1. — *Soit A un anneau.*

1. *Pour toute suite exacte de A-modules*
$$0 \to N \to M \to M/N \to 0,$$
on a $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Supp}(N) \cup \operatorname{Supp}(M/N)$.
2. *Si M est somme de sous-A-modules $(M_i)_{i\in I}$,* $\operatorname{Supp}(M) = \cup_{i\in I} \operatorname{Supp}(M_i)$.
3. *Si M et N sont deux A-modules de type fini,*
$$\operatorname{Supp}(M \otimes_A N) = \operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(N)$$

Démonstration. — Les deux premiers points sont faciles. Pour le point (iii), notons que si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, $(M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_p} N_{\mathfrak{p}}$. Le point (iii) est donc un corollaire du lemme suivant, application standard du lemme de Nakayama :

Lemme III.2. — *Soit A un anneau local, M et N deux A-modules de type fini. Alors $M \otimes_A N = 0$ si et seulement si $M = 0$ ou $N = 0$.*

□

III.1.0.a. — Pour un A-module M et un élément $v \in M$, on note $A.v$ le sous-A-module de M engendré par v. On note simplement $\operatorname{Ann}_A(v)$ l'idéal annulateur du A-module $A.v$ et on l'appelle l'annulateur de v. On en déduit donc un isomorphisme canonique :

$$A/\operatorname{Ann}_A(v) \to A.v. \tag{III.1}$$

Corollaire III.2.1. — *Soit M un A-module de type fini d'annulateur $\mathfrak{a}$. Alors, Supp$(M) = V(\mathfrak{a})$.*

Démonstration. — En effet, M est somme d'une famille finie de A-modules de la forme $(A.v_i)_{i\in I}$ où v_i appartient à M. Si $\mathfrak{a}_i$ désigne l'annulateur du A-module $A.v_i$, on obtient par définition un isomorphisme canonique $A.v_i = A/\mathfrak{a}_i$ donc le support de $A.v_i$ est le fermé $V(\mathfrak{a}_i)$ de $\operatorname{Spec}(A)$. On en déduit de la proposition précédente et, du fait que I est fini, les égalités :

$$\operatorname{Supp}(M) = \cup_i V(\mathfrak{a}_i) = V(\cap_i \mathfrak{a}_i) = V(\mathfrak{a}).$$

□

III.1.0.b. — Considérons l'ensemble d'idéaux de A suivant

$$\Phi = \{Ann_A(v) \mid v \in M, v \neq 0\}.$$

On ordonne Φ par inclusion.

Définition III.1. — Avec la notation qui précède, on pose

$$\mathrm{Ass}_A(M) = \Phi \cap \mathrm{Spec}(A).$$

Un élément $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Ass}_A(M)$ est appelé un idéal premier *associé* à M.

Compte tenu de (III.1), on vérifie que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ si et seulement si M contient un sous-A-module isomorphe à $A/\mathfrak{p}$.

Exemple III.1. — Si M est un sous-A-module non nul de $A/\mathfrak{p}$ pour un idéal premier $\mathfrak{p}$, alors $\mathrm{Ass}(M) = \{p\}$.

On aura besoin des propriétés suivantes :

Proposition III.3. — *Soit M un A-module.*

1. *Pour tout suite exacte de A-modules*

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0,$$

on a : $\mathrm{Ass}(N) \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(N) \cup \mathrm{Ass}(M/N)$.

2. *Si A est noethérien, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A,* $\mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \mathrm{Ass}_A(M) \cap \mathrm{Spec}(A_p)$.

Démonstration. — On considère le point 1. L'inclusion $\mathrm{Ass}(N) \subset \mathrm{Ass}(M)$ est évidente. Soit $\mathfrak{p}$ un élément de $\mathrm{Ass}(M)$, E un sous-A-module de M tel que $E \simeq A/\mathfrak{p}$. Si $E \cap N = 0$, alors E est un sous-A-module de M/N : $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/N)$. Sinon, compte tenu de l'exemple III.1, $\mathrm{Ass}(E \cap N) = \{p\}$, ce qui montre que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(N)$ – puisque $\mathrm{Ass}(E \cap N) \subset \mathrm{Ass}(N)$.

Pour le point 2, on rappelle l'identification :

$$\mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}.$$

Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier tel que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Si il existe un sous-$A$-module E de M tel que $E \simeq A/\mathfrak{q}$, alors $E_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$; on en déduit l'inclusion $\mathrm{Ass}_A(M) \cap \mathrm{Spec}(A_p) \subset \mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$.

Réciproquement, soit $\mathfrak{q}$ un idéal de $A_\mathfrak{p}$ associé à $M_\mathfrak{p}$. Il existe donc $v \in M$ et $s \in (A - \mathfrak{p})$ tel que $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_{A_p}(\frac{x}{s})$. Puisque A est noethérien, $\mathfrak{q} = (f_1, \dots, f_n)$ pour des éléments $f_i \in A$. Par hypothèse, $f_i.\frac{x}{s} = 0$, donc il existe $g_i \in (A - \mathfrak{q})$ tel que $(f_i g_i).x = 0$. On considère l'élément $y = (g_1 \dots g_n).x$ de M. Par construction, $\mathfrak{q}.y = 0$. De plus, si $h.y = 0$, on en déduit que

$$h \in \mathrm{Ann}_{A_p}(x) = \mathrm{Ann}_{A_p}\left(\frac{x}{s}\right) = \mathfrak{q}.$$

Autrement dit, $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_A(y)$, ce qui conclut. □

Proposition III.4. — *Si A est un anneau noethérien, pour tout A-module M,* $\mathrm{Ass}_A(M) \neq \varnothing$.

Cela résulte du lemme suivant :

Lemme III.5. — *Considérant la notation de III.1.0.b, tout élément maximal de Φ est un idéal premier.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{a} = Ann_A(A.v)$ un tel élément maximal. Si $fg \in \mathfrak{a}$ et $f \notin \mathfrak{a}$, $f.v \neq 0$ et par maximalité de $\mathfrak{a}$, $Ann_A(f.v) = \mathfrak{a}$. Or, $g.(f.v) = 0$ par hypothèse ; donc $g \in Ann_A(f.v) = \mathfrak{a}$. □

Corollaire III.5.1. — *Soit A un anneau noethérien et M un A-module de type fini.*
Il existe une chaîne de sous A-modules

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M \tag{III.2}$$

telle que pour tout entier i, M_i/M_{i-1} est isomorphe à $A/\mathfrak{p}_i$ pour un idéal premier p_i.

Démonstration. — Notons que, puisque A est noethérien et M de type fini sur A, il n'existe pas de chaînes de sous-A-modules infinies de M.

Comme A est noethérien, on peut considérer un idéal premier $\mathfrak{p}$ associé à M d'après la proposition précédente. Alors, M contient un sous-module de la forme $N = A/\mathfrak{p}$. On peut itérer ce procédé en considérant le module quotient M/N, ce qui conclut. □

Corollaire III.5.2. — *Considérant une chaîne* (III.2) *comme dans la proposition précédente, alors :*

1. $\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} \subset \mathrm{Supp}(M)$.
2. $\mathrm{Supp}(M)^{(0)} \subset \mathrm{Ass}(M)$.

Démonstration. — On considère l'assertion 1 : d'après la proposition III.1,

$$\{\mathfrak{p}_i\} = \mathrm{Supp}(M_i/M_{i-1}) \subset \mathrm{Supp}(M_i) \subset \mathrm{Supp}(M).$$

Par ailleurs, on déduit de la première propriété de la proposition III.3 l'inclusion :

$$\mathrm{Ass}(M) \subset \cup_i \mathrm{Ass}(M_i/M_{i-1})$$

ce qui conclut la preuve de 1 puisque $\mathrm{Ass}(M_i/M_{i-1}) = \{\mathfrak{p}_i\}$.

Considérons l'assertion 2. Si $\mathfrak{p}$ est un élément minimal de $\mathrm{Supp}(M)$, alors $\mathrm{Supp}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$. Or, $\mathrm{Ass}(M_\mathfrak{p})$ est non vide d'après la proposition précédente. Donc $\mathrm{Ass}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ d'après le point 1. Il résulte donc du point 2 de la proposition III.3 que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. □

Corollaire III.5.3. — *Un A-module M sur un anneau noethérien A est de longueur finie si et seulement si il est de type fini et* $\mathrm{Supp}(M)$ *est fini.*

En effet, cela résulte de l'existence de la suite (III.2) du corollaire III.5.1 compte tenu de la caractérisation des modules de longueur finie II.9.

2. Définition

III.2.0.c. — Soit A un anneau noethérien, $X = \mathrm{Spec}(A)$. Soit M un A-module de type fini. On pose $V(M) = \mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}_A(M))$ vu comme un fermé de X.

Les idéaux premier associés à M correspondent bijectivement à des fermés irréductibles de $Z(M)$ par l'application

$$\mathrm{Ass}(M) \to \text{fermé}(V(M)), \mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p}).$$

On dit encore que qu'un fermé de la forme $V(\mathfrak{p})$ pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$ est associé à M.

On a vu que les composantes irréductibles de $V(M)$ sont associées à M.[1] Notons que si $\mathfrak{p}$ est un point générique de $V(M)$, alors $\mathrm{Supp}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$: donc $M_\mathfrak{p}$ est de longueur finie d'après III.5.3.

[1] On fera attention qu'il peut exister des fermés de $V(M)$ qui sont associés à M sans être des composantes irréductibles. On les appelle des *composantes immergées* de M.

Définition III.2. — Avec les notations précédentes, on définit le *cycle fondamental* associé à M comme le cycle de X suivant :

$$z_A(M) = \sum_{\mathfrak{p} \in V(M)^{(0)}} \lg(M_\mathfrak{p}).\mathfrak{p}.$$

On le note encore $z(M)$ s'il n'en résulte pas de confusion.

Avec cette définition, il est évident que si $Z = V(\mathfrak{a})$ est un fermé de X, $z(A/\mathfrak{a}) = \langle Z \rangle_X$.

Exemple III.2. — Supposons que M soit un A-module plat de type fini (non nul).

Alors, $\mathrm{Supp}(M)$ est un ouvert de A : pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$, $M \otimes_A A_\mathfrak{p}$ est non nul, plat sur $A_\mathfrak{p}$; il est donc libre de la forme $A_\mathfrak{p}^n$ pour $n > 0$. Notons au passage que $n = \dim_{\kappa(p)}(M \otimes_A \kappa(p))$. Il existe donc un élément $f \in A - \mathfrak{p}$ tel que $M \otimes_A A_f = A_f^n$. On obtient alors $D(f) \subset \mathrm{Supp}(M)$.

On en déduit que $\mathrm{Supp}(M)$ est une composante connexe Ω de X et de plus :

$$z(M) = \sum_{\mathfrak{p} \in \Omega^{(0)}} [\dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \,.\, \lg(A_\mathfrak{p})].\mathfrak{p}.$$

Proposition III.6. — *Soit $\rho : A \to B$ un morphisme plat, $f : Y \to X$ le morphisme de schémas associé, et M un A-module de type fini.*

Alors, $f^*(z_A(M)) = z_B(M \otimes_A B)$.

Remarque III.1. — Cette proposition généralise la proposition II.15 du cours précédent.

Démonstration. — On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme III.7. — *Avec les hypothèses de la proposition, $V(M \otimes_A B) = f^{-1}(V(M))$.*

Considérons un élément $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$, $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{q})$, et $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ la fibre de f en $\mathfrak{q}$. Rappelons que c'est un morphisme fidèlement plat (*cf.* II.11). Alors :

$$(M \otimes_A B)_\mathfrak{q} = M \otimes_A B \otimes_B B_\mathfrak{q} = (M \otimes_A A_\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} B_\mathfrak{q} = M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} B_\mathfrak{q}.$$

On en déduit donc : $(M \otimes_A B)_\mathfrak{q} = 0 \Leftrightarrow M_\mathfrak{p} = 0$, ce qui prouve l'égalité attendue.

Dès lors, quitte à remplacer A par $A/\mathrm{Ann}_A(M)$, on peut supposer que $X = \mathrm{Supp}(M)$ et $Y = \mathrm{Supp}(M \otimes_A B)$. Soit $\mathfrak{q}$ un point générique de Y. Rappelons que, puisque f est plat, $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{q})$ est un point générique de X. En particulier, les deux cycles de l'équation à démontrer sont supportés aux points génériques de Y. Calculant maintenant la multiplicité de ces deux cycles au point $\mathfrak{q}$, on se ramène à prouver l'égalité des entiers suivants :

$$\lg\big((M \otimes_A B)_\mathfrak{q}\big) = \lg(M_\mathfrak{p}).\lg\big((A/\mathfrak{p} \otimes_A B)_\mathfrak{q}\big).$$

C'est la proposition II.12 appliquée au morphisme plat local d'anneaux locaux artiniens $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ et au $A_\mathfrak{p}$-module $M_\mathfrak{p}$. $\square$

III.2.0.d. — Soit $\rho : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

On définit le foncteur *d'extension* (de la base) associé à ρ comme suit :

$$A-\mathrm{mod} \to B-\mathrm{mod}, M \mapsto M \otimes_A B.$$

Si N est un B-module, on note $N|_A$ le groupe abélien N vu comme un A-module à travers ρ. On définit le foncteur *de restriction* (de la base) associé à ρ comme suit :

$$A-\mathrm{mod} \to B-\mathrm{mod}, N \mapsto N|_A.$$

On vérifie encore facilement la relation suivante :

$$\mathrm{Hom}_A(M, N|_A) = \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N).$$

Autrement dit, le foncteur d'extension est *adjoint à gauche* du foncteur de restriction.

Par ailleurs, on vérifie aussi facilement les propriétés suivantes :

1. Pour tout A module M et tout B-module N,

$$M \otimes_A (N|_A) = ((M \otimes_A B) \otimes_B N)|_A. \tag{III.3}$$

2. Soit $A \to C$ un morphisme d'anneaux, et posons $D = C \otimes_A B$ de sorte qu'on obtient des morphismes d'anneaux :

$$\begin{tikzcd} D & C \arrow[l] \\ B \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Alors, pour tout B-module N,

$$(N|_A) \otimes_A C = (N \otimes_B D)|_C. \tag{III.4}$$

Ces formules sont de simples applications de la transitivité du produit tensoriel.

Proposition III.8. — *Soit $\rho : A \to B$ un morphisme fini, et $f : Y \to X$ le morphisme de schémas associé.*

Alors, pour tout B-module de type fini M,

$$f_*\big(z(M)\big) = z(M|_A).$$

Démonstration. — Considérons d'abord le cas où ρ est surjective, ce qui revient à dire que $B = A/\mathfrak{a}$, Y est un sous-schéma fermé de X. Alors, $V(M) = V(M|_A)$. De plus, pour tout $\mathfrak{p} \in V(M)^{(0)}$, $\lg_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \lg_{A_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}(M_\mathfrak{p})$ ce qui conclut dans ce cas.

Soit $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(\rho)$. Le morphisme ρ se factorise comme suit :

$$A \to A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\rho'} B.$$

D'après le cas traité précédemment, on est donc ramené au cas de ρ' (par fonctorialité des opérations $?|_A$ et f_*). Autrement dit, on peut supposer que ρ est injective. On utilise le lemme suivant :

Lemme III.9. — *Dans les conditions de la proposition, si ρ est injective,*

$$\rho^{-1}(\mathrm{Ass}(M)) = \mathrm{Ass}(M|_A).$$

Notons que pour tout élément v de M, on a tautologiquement la relation :

$$\rho^{-1}(\mathrm{Ann}_B(v)) = \mathrm{Ann}_A(v).$$

Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B associé à M, alors $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_B(v)$ pour un élément $v \in M$, et la relation précédente montre que $\rho^{-1}(\mathfrak{q})$ est l'annulateur de v dans A ; d'où l'inclusion $\rho^{-1}(\mathrm{Ann}_B(v)) \subset \mathrm{Ann}_A(v)$.

Réciproquement, considérons idéal $\mathfrak{p}$ associé à $M|_A$; soit $v \in M$ tel que $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(v)$. On pose $\mathfrak{b} = \mathrm{Ann}_B(v)$, qui vérifie donc $\rho^{-1}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{p}$. D'après le théorème de Cohen-Seidenberg (*cf.* [**Bou83**, V, §2, n° 1, th. 1]), il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B tel que $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{b}$ et $\rho^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Quitte à réduire $\mathfrak{q}$, on peut supposer que $\mathfrak{q}$ est minimal parmis les idéaux premiers contenant $\mathfrak{b}$. On en déduit $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(B/\mathfrak{b}) \subset \mathrm{Ass}(B)$, ce qui conclut.

On déduit de ce lemme que $f(Z(M)) = Z(M|_A)$. Quitte à remplacer Y par $Z(M)$ et X par $Z(M|_A)$, on peut maintenant supposer que le support de M est Y et celui de $M|_A$ est X. Soit $\mathfrak{p}$ un point générique de X. Calculant les multiplicités en $\mathfrak{p}$ des deux cycles de l'équation à prouver, on se ramène à montrer l'égalité des entiers :

$$\lg(M_\mathfrak{p}) = \sum_{\mathfrak{q} \in Y^{(0)}} [\kappa(\mathfrak{q}) : \kappa(\mathfrak{p})]. \lg(M_\mathfrak{q}).$$

Cela résulte maintenant de la proposition II.10 appliquée au morphisme $A_p \to B \otimes_A A_p$ et au $(B \otimes_A A_p)$-module $M \otimes_A A_p$. $\square$

Remarque III.2. — Grâce aux deux propositions précédentes, la formule de projection II.18 du cours précédent se ramène aisément à la formule (triviale) (III.4).

3. Groupe de Grothendieck

III.3.0.e. — Soit A un anneau. La catégorie $A-\mathrm{mod}^{tf}$ des A-modules de type fini est essentiellement petite. On considère l'ensemble [mod A] des classes d'isomorphismes de mod A, et $\mathbb{Z}$.[mod A] le groupe abélien libre engendré.

Soit $\mathcal{R}$ le sous-groupe de $\mathbb{Z}.[A-\mathrm{mod}^{tf}]$ engendré par les éléments

$$[N] - [M] + [M/N]$$

pour toute suite exacte

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

de A-modules.

Définition III.3. — Avec les notations qui précèdent, on définit le groupe de K-théorie de l'anneau A comme suit :

$$K'_0(A) = \mathbb{Z}.[A-\mathrm{mod}^{tf}]/\mathcal{R}.$$

On note encore $[M]$ la classe d'un A-module de type fini M dans $K'_0(A)$. Notons que $[M]+[N] = [M \oplus N]$.

III.3.0.f. — Pour les questions de fonctorialités, il sera plus commode de poser $X = \mathrm{Spec}(A)$ et de noter $K'_0(A) = K'_0(X)$. Soit $\rho : A \to B$ un morphisme d'anneaux, et $f : Y \to X$ le morphisme de schémas associé. Si f est fini, le foncteur de restriction induit un morphisme

$$f_* : K'_0(Y) \to K'_0(X).$$

Si f est plat, le foncteur d'extension induit un morphisme

$$f^* : K'_0(X) \to K'_0(Y).$$

III.3.0.g. — Soit $p \geq 0$ un entier. On note $F^p K'_0(X)$ le sous-groupe de $K'_0(X)$ engendré par les classes $[M]$ de A-modules de type fini M tel que $\mathrm{codim}_X(V(M)) \geq n$.

Pour un tel A-module M, on note $z^n(M)$ la projection du cycle $z(M)$ dans le facteur direct $Z^n(X)$ des cycles de X. Vu que tout point $\mathfrak{p} \in X^{(n)}$ qui appartient à $V(M)$ est nécessairement un point générique, on en déduit donc :

$$z^n(M) = \sum_{\mathfrak{p} \in X^{(n)}} \mathrm{lg}(M_\mathfrak{p}).\mathfrak{p}.$$

Puisque les fonctions longueurs sont additives sur les suites exactes de A-modules (*cf.* II.14, point 5), la fonction z^n se factorise et induit un morphisme

$$z^n : F^n K'_0(X) \to Z^n(X).$$

Si $\alpha = \sum_{i \in I} n_i.\mathfrak{p}_i$ est un cycle n-codimensionnel, l'élément

$$\sigma(\alpha) = \sum_{i \in I} n_i.[A/\mathfrak{p}_i]$$

appartient à $F^p K'_0(X)$ est vérifie $z^n(\sigma(\alpha)) = \alpha$. On obtient finalement une suite exacte :

$$F^{n+1} K'_0(X) \to F^n K'_0(X) \xrightarrow{z^n_X} Z^n(X) \to 0.$$

Notons que, d'après la proposition II.17 et le lemme III.7, le foncteur $f^* : K'_0(X) \to K'_0(Y)$ associé à un morphisme plat $f : Y \to X$ de schémas affines envoie $F^n K'_0(Y)$ sur $F^n K'_0(X)$. La proposition III.6 montre que z^n_X est fonctoriel par rapport à f^*.

Références

[Bou83] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4 - Chapitres 5 à 7 - Chapitres 8 et 9*, Masson, 1985 - 1985 - 1983.

2009-2010

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* deglise@math.univ-paris13.fr
Url : http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/