Table des matières

Cours IV. Multiplicités de Serre 1
1. Anneaux réguliers 1
1.1. Suites régulières 1
1.2. Algèbre homologique pour les modules 4
1.3. Théorème de Serre (cas local) 9
1.4. Cas global 11
2. Multiplicités pour les cycles 12
3. Multiplicités pour les modules 13
Références 16

COURS IV
MULTIPLICITÉS DE SERRE

1. Anneaux réguliers

1.1. Suites régulières. —

IV.1.1.a. — Rappelons le lemme de Nakayama :

***Lemme IV.1* (de Nakayama)**. — *Soit A un anneau, M un A-module de type fini et $\mathfrak{a}$ un idéal inclut dans le radical de A. Si $M \otimes_A (A/\mathfrak{a}) = 0$, alors $M = 0$.*

On utilisera (en particulier) le corollaire suivant du lemme de Nakayama :

Corollaire IV.1.1. — *Soit A un anneau local de corps résiduel k et M un A-module de type fini. Considérons des éléments $u_1, \ldots, u_n$ de M et pour tout indice i, notons $\bar{u}_i$ l'image de u_i dans $M \otimes_A k$.*

Si $(\bar{u}_i)_i$ est une k-base de $M \otimes_A k$, alors la famille $(u_i)_i$ est génératrice dans M et il n'existe pas d'indice $m \in [1, n]$ tel que la famille $(u_i)_{i \neq m}$ soit génératrice.

En effet, si l'on pose $N = \sum_i A.u_i$, et $N_m = \sum_{i \neq m} A.u_i$ il suffit d'appliquer le lemme de Nakayama aux modules M/N et M/N_m.

Définition IV.1. — Soit A un anneau et M un A-module.

1. Soit x un élément de A. On dit que x est *M-régulier* si l'endomorphisme de A-module M
$$M \to M, v \mapsto x.v$$
est injectif.
2. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet d'éléments de A. Posons par commodité $x_0 = 0$. On dit que la suite $(x_1, \ldots, x_n)$ est *M-régulière* si pour tout indice $i \in [1, n]$, la classe de x_i dans $A/(x_0, \ldots, x_{i-1})$ est $(M/(x_0, \ldots, x_{i-1}).M)$-régulière

Lorsque $M = A$, A-régulier signifie encore régulier suivant la convention de l'exemple II.13, ou encore non diviseur de 0.

IV.1.1.b. — Si M est un A-module de type fini sur un anneau local noethérien, on pose $\dim(M) = \dim(\mathrm{Supp}(M))$ et on l'appelle la dimension de M.

Proposition IV.2. — *Soit A un anneau local noethérien d'idéal maxim $\mathfrak{m}$. Soit M un A-module de type fini. Pour toute suite M-régulière $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathfrak{m}$, on a :*

$$\dim(M/(x_1 \dots x_n).M) = \dim(M) - n.$$

Remarque IV.1. — On en déduit que la longueur d'une suite M-régulière est bornée par la dimension de M. Rappelons que l'on appelle profondeur du A-module M la borne supérieure des suites M-régulières. On la note $\mathrm{prof}(M)$. La proposition précédente montre donc qu'on a toujours : $\mathrm{prof}(M) \leq \dim(M)$. Rappelons au passage qu'on dit que M est *de Cohen-Macaulay* s'il y a égalité dans l'inéaglité précédente.

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas $n = 1$. Soit $\mathfrak{a}$ l'annulateur de M dans A de sorte que $\dim(M) = \dim(A/\mathfrak{a})$. Or $\mathrm{Supp}(M/x.M) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Supp}(A/(x))$ d'après la proposition III.1. Donc $\dim(M) = \dim(A/(\mathfrak{a} + (x)))$. Or, x est M-régulier, la multiplication par x est injective dans $A/\mathfrak{a}$. Autrement dit, x n'est pas diviseur de 0 dans $A/\mathfrak{a}$ ce qui implique l'égalité attendue compte tenu de l'exemple II.13. □

Remarquons la proposition suivante :

Proposition IV.3. — *Soit A un anneau noethérien, M un A-module de type fini, et x un élément de M. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *x est M-régulier.*
2. *x n'appartient pas à la réunion des idéaux premiers associés à M.*

Remarque IV.2. — On retrouve donc le fait énoncé dans la note de bas de page (7) page 11 du cours I.

Démonstration. — On montre la contraposée. Si x appartient à un idéal premier associé à M, $x \in \mathrm{Ann}_A(v)$ pour $v \in M$, donc $x.v = 0$ et x n'est pas M-régulier. Réciproquement, si $x.v = 0$ pour un élément non nul $v \in M$, $A.v \neq 0$, donc $\mathrm{Ass}(A.v) \neq \varnothing$ d'après III.4. Considérons un idéal premier $\mathfrak{p}$ associé à $A.v$. Alors, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(f.v)$ pour $f \in A$; notons que $xf.v = 0$: donc $x \in \mathfrak{p}$ et de plus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. □

IV.1.1.c. — Considérons un anneau local A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et un A-module M. On pose $M[t] := M \otimes_A A[t]$, vu comme un A-module.

Considérons un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathfrak{m}$, et notons $\underline{x}$ l'idéal de A engendré par les (x_i). Pour tout A-module M, on définit un morphisme de A-modules

$$\varphi : (M/\underline{x}.M)[t_1, ..., t_n] \to \bigoplus_{r \geq 0} \underline{x}^r.M/\underline{x}^{r+1}.M \tag{IV.1}$$

comme suit : pour u dans M et $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, posant $r = \sum_i \alpha_i$, on envoie un élément de la forme $u.t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}$ sur l'élément $\varphi_0(x) = (x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}).u$ de $\underline{x}^r.M$. Si u appartient à $\underline{x}.M$, $\varphi_0(x)$ appartient $\underline{x}^{r+1}.M$. Donc φ_0 induit bien un morphisme de la forme (IV.1).

Remarque IV.3. — Si l'on considère les deux membres de (IV.1) comme des A-modules gradués (t_i est de degré 1 et un élément de $\underline{x}^r.M/\underline{x}^{r+1}.M$ de degré r), le morphisme φ est homogène (de degré 0). Rappelons aussi que le membre de droite est encore le *gradué associé à la filtration $\underline{x}$-adique* de M (voir [**Ser65**, chap. II]).

Notons que par définition, φ est surjectif.

Théorème IV.4. — *Considérons les notations ci-dessus et supposons que M est un A-module de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$(x_1, ..., x_n)$ est M-régulière.*

(ii) *Le morphisme φ est un isomorphisme.*

La démonstration utilise particulièrement le *théorème de Krull* suivant :

Théorème IV.5. — *Soit A un anneau local noethérien, $\underline{x}$ un idéal propre de A (*i.e. *distinct de A) et M un A-module de type fini. Alors,*

$$\left(\bigcap_{r\geq 0} \underline{x}^r.M\right) = 0.$$

Voir [**Bou83**, III, §3, n° 2, cor. de prop. 5]. A l'aide de ce théorème, la démonstration se fait par récurrence sur n. Le lecteur peut vérifier le cas $n = 1$ – qui utilise déjà le théorème ci-dessus.

IV.1.1.d. — Soit A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Posons $k = A/\mathfrak{m}$. On associe classiquement à A une k-algèbre graduée :

$$gr^{\mathfrak{m}}(A) = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}.$$

Si l'on pose $M = \mathfrak{m}$ en tant que A-module, avec les notations du paragraphe IV.1.1.c, cette k-algèbre graduée n'est autre que le membre de droite de l'équation IV.1.

Théorème IV.6. — *Considérons les notations ci-dessus. Soit n la dimension de A. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n$.

(ii) *Il existe une suite A-régulière de longueur n d'éléments de $\mathfrak{m}$.*

(iii) *Il existe un isomorphisme homogène de degré* 0 *:*

$$k[t_1, \dots, t_n] \to gr^{\mathfrak{m}}(A).$$

De plus, sous ces conditions, toute suite $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathfrak{m}$ *dont les classe modulo* $\mathfrak{m}^2$ *sont k-linéairement indépendantes forme une suite régulière.*

L'équivalence entre (*ii*) et (*iii*) résulte du théorème précédent. Le fait que (*ii*) implique (*i*) résulte de IV.2 et du corollaire IV.1.1. Pour l'implication restante, on montre que si $(x_1, \dots, x_n)$ forme un système minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$, c'est nécessairement une suite M-régulière en démontrant que le morphisme associé (IV.1) est un isomorphisme (voir [**Mat86**, 14.2]).

Définition IV.2. — Un anneau local noethérien satisfaisant les conditions équivalentes du théorème précédent est appelé un anneau local *régulier*.

Remarque IV.4. — D'après [**Bou83**, III, §2, n° 2, cor. de prop. 1] (resp. [**Bou83**, V, §1, n° 5, prop. 15], un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est intègre (resp. normal) si et seulement si l'anneau $gr^{\mathfrak{m}}(A)$ est intègre (resp. normal). Il résulte donc du théorème précédent que si A est local régulier, il est intègre et intègralement clos.

On peut raffiner le théorème précédent :

Proposition IV.7. — *Soit A un anneau local régulier de dimension n,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal et $k = A/\mathfrak{m}$ son corps résiduel. Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal propre de A. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'anneau local $A/\mathfrak{a}$ est régulier.*
2. *L'idéal* $\mathfrak{a}$ *est engendré par une suite $(x_1, \dots, x_r)$ d'éléments de* $\mathfrak{m}$ *dont les classes $(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n)$ modulo* $\mathfrak{m}^2$ *sont k-linéairement indépendantes.*

Dans ces conditions, $(x_1, \dots, x_r)$ est une suite régulière et

$$\dim(A/\mathfrak{a}) = n - r.$$

C'est une conséquence du théorème précédent. Notons que le calcul de dimension résulte de la proposition IV.2.

1.2. Algèbre homologique pour les modules. —

IV.1.2.a. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie et $\mathcal{W}$ une classe de flèches de $\mathscr{C}$. On considère la catégorie $\Phi(\mathscr{C}, \mathcal{W})$ formée des couples $(\mathscr{D}, F)$ où $\mathscr{D}$ est une catégorie et $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur tel que si $f \in \mathcal{W}$, $F(f)$ est un isomorphisme. Les morphismes de $\Phi(\mathscr{C}, \mathcal{W})$ sont les transformations naturelles.

Définition IV.3. — Avec les notations ci-dessus, si $\Phi(\mathscr{C}, \mathcal{W})$ admet un objet initial, on appelle cet objet la localisation de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathcal{W}$. On note la catégorie correspondante $\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Le foncteur canonique

$$\pi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$$

s'appelle le foncteur de projection.

Remarque IV.5. — La localisation dans les catégories est une pure généralisation de la localisation dans les anneaux. En général, la catégorie localisée $\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ a la même classe d'objets que $\mathscr{C}$, seuls les morphismes changent. Si on utilise la théorie des classes pour fonder la théorie des catégories, la localisation d'une catégorie n'existe pas toujours, car les morphismes entre deux objets de la catégorie localisée ne forment pas nécessairement un ensemble. Il y a divers moyens logiques de palier à ce problème que nous ne verrons pas. On considèrera plutôt que la localisation de toute catégorie, par rapport à tout ensemble de flèches existe abstraitement (ce qui a lieu dans les anneaux). Plus tard, on verra que la théorie des catégories de modèles donnent un moyen de contrôler la taille des ensembles de morphismes dans une catégorie localisée – et même de les décrire.

IV.1.2.b. — Considérons toujours un couple $(\mathscr{C}, \mathcal{W})$ formée d'une catégorie et d'une classe de flèches, et considérons un foncteur

$$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}.$$

Si F envoie tout élément de $\mathcal{W}$ sur un isomorphisme de $\mathscr{D}$, on sait qu'il induit un unique foncteur $F : \mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathscr{D}$. La théorie des foncteurs dérivés permet de décrire la siutation lorsque cette propriété n'a plus nécessairement lieu.

Considérons la catégorie $\Phi(\mathscr{C}, \mathcal{W})/F$ formée des triplets (G, η) où $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est un foncteur qui envoie un élément de $\mathcal{W}$ sur un isomorphisme et $\eta : G \to F$ une transformation naturelle – autrement dit, on considère la « catégorie des objets de $\Phi(\mathscr{C}, \mathcal{W})$ au-dessus de F ».

Définition IV.4. — Le foncteur dérivé gauche de F par rapport à $\mathcal{W}$ est, s'il existe, l'objet final de la catégorie $\Phi(\mathscr{C}, \mathcal{W})/F$. On le note $\mathbf{L}F$.

Généralement, on considère plutôt le foncteur dérivé comme l'unique foncteur $\mathbf{L}F : \mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathscr{D}$ induit. Par définition, il est muni d'une transformation naturelle η que l'on représente par la 2-diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{C} \arrow[ld, "\pi"'] \arrow[dd, "F"] \\
\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}] \arrow[rd, "\mathbf{L}F"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & \\
 & \mathscr{D}
\end{tikzcd}$$

On se rappellera que le couple $(\mathbf{L}F, \eta)$ est universel pour cette propriété.

De manière analogue, on définit, s'il existe, le foncteur dérivé droit $\mathbf{R}F$ de F par rapport à $\mathcal{W}$, objet final de la catégorie $\Phi(\mathscr{C},\mathcal{W})\backslash F$, défini par le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[drr, "\pi"] \arrow[dd, "F"'] & & \\ & \arrow[r, phantom, "\overset{\eta}{\Longrightarrow}"] & \mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}] \arrow[dll, "\mathbf{R}F"] \\ \mathscr{D} & & \end{tikzcd}$$

Remarque IV.6. — Tout le sel de la localisation réside non seulemnt dans la possibilité de dériver certains foncteurs mais surtout dans celle de les calculer.

IV.1.2.c. — La catégorie $A-$mod des A-modules est abélienne. On note $\mathsf{C}(A)$ la catégorie des complexes à valeurs dans $A-$mod. Ses objets, en notation cohomologique, sont de la forme :

$$\dots \xrightarrow{d_K^{n-1}} K^n \xrightarrow{d_K^n} K^{n+1} \to \dots$$

tels que $d_K^n \circ d_K^{n-1} = 0$. Les morphismes d_K^n sont appelés les différentielles. On peut les voir comme un morphisme homogène de degré 1 d'objets gradués $d : K^* \to K^*$. On note $H^n(K^*) = \mathrm{Ker}(d_K^n)/\mathrm{Im}(d_K^{n-1})$. On passe de la notation cohomologique K^* à la notation homologique K_* en posant $K_n = K^{-n}$. Les différentielles forment alors un morphisme homogène de degré -1.

Un morphisme de complexes est donné par une suite de carrés commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & K^n \arrow[r, "d_K^n"] \arrow[d] & K^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & L^n \arrow[r, "d_L^n"] & L^{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

On dit que c'est un quasi-isomorphisme si le morphisme induit $H^n(K^*) \to H^n(L^*)$ est un isomorphisme. On note $\mathcal{W}_A$ la classe des quasi-isomorphismes.

Définition IV.5. — La catégorie dérivé $\mathsf{D}(A)$ des A-modules est la localisation de $\mathsf{C}(A)$ par rapport à la classe $\mathcal{W}_A$.

Exemple IV.1. — Considérons un morphisme d'anneaux $\rho : A \to B$, et $f_* : B-$mod $\to A-$mod le foncteur de restriction des scalaires. On en déduit un foncteur

$$\mathsf{C}(B) \to \mathsf{C}(A) \tag{IV.2}$$

obtenu en appliquant f_* termes à termes. Comme f_* est un foncteur exact, (IV.2) induit un unique foncteur

$$f_* : \mathsf{D}(B) \to \mathsf{D}(A)$$

d'après la propriété universelle des localisations.

Considérons encore le foncteur d'extension des scalaires $f^* : A-$mod $\to B-$mod.

De même, si ρ est plat, f^* est exact. Comme précédemment, il se prolonge de manière évidente, en l'appliquant termes à termes :

$$\phi : \mathsf{C}(A) \to \mathsf{C}(B). \tag{IV.3}$$

Si ρ est plat, ce foncteur préserve les quasi-isomorphismes. Dans ce cas, on déduit à nouveau de la propriété universelle des catégories dérivées un foncteur :

$$f^* : \mathsf{D}(A) \to \mathsf{D}(B).$$

Dans le cas général, on peut montrer que le foncteur f^* admet un foncteur dérivé gauche

$$\mathbf{L}f^* : \mathsf{D}(A) \to \mathsf{D}(B),$$

muni d'une transformation naturelle structurale[(1)]

$$\mathbf{L}f^* \circ \pi_A \to \pi_B \circ \phi.$$

Remarque IV.7. — Le foncteur f_* (resp. f^* pour ρ plat) est à la fois le dérivé gauche et droit du foncteur $\mathsf{C}(B) \to \mathsf{D}(A)$ déduit de (IV.2) (resp. $\mathsf{C}(A) \to \mathsf{D}(B)$). Lorsque ρ est plat, on peut encore écrire : $f^* = \mathbf{L}f^*$.

IV.1.2.d. — La catégorie A–mod est monoïdale symétrique fermée : le produit tensoriel de deux A-modules est bien connu, et le Hom interne entre deux A-modules M et N, noté $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N)$, est l'ensemble $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ des morphismes de M dans N, muni de sa structure évidente de A-module. Rappelons que ces foncteurs sont liés par l'isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) = \mathrm{Hom}_A(M, \underline{\mathrm{Hom}}_A(N,P)).$$

Ces structures s'étendent à la catégorie des A-modules. Considérons deux complexes K^* et L^*. Le produit tensoriel $K^* \otimes_A L^*$ est le complexe dont le terme de degré n est

$$\bigoplus_{p+q=n} C^p \otimes_A D^q$$

et la différentielle sur un élément $x \otimes y$ de $C^p \otimes_A D^q$ est donnée par la formule

$$d(x \otimes y) = d_K^p(x) \otimes y + (-1)^p.x \otimes d_L^q(y).$$

Le Hom interne $\underline{\mathrm{Hom}}_A(K^*, L^*)$ est le complexe dont le terme en degré n est

$$\prod_{p \in \mathbb{Z}} \underline{\mathrm{Hom}}_A(K^p, L^{p+n})$$

et la différentielle sur un élément $f = (f_p : K^p \to L^{p+n})_{p \in \mathbb{Z}}$ est donnée par la formule

$$d(f) = \big(d_D^{p+n} \circ f_p - (-1)^n.f_{p+1} \circ d_C^{p+1}\big)_{p \in \mathbb{Z}}.$$

On va admettre le théorème suivant :

Théorème IV.8. — *Pour tout anneau A, le bifoncteur*

$$\otimes_A : \mathsf{C}(A) \times \mathsf{C}(A) \to \mathsf{C}(A),$$
$$\textit{resp.}\ \underline{\mathrm{Hom}}_A : \mathsf{C}(A)^{op} \times \mathsf{C}(A) \to \mathsf{C}(A)$$

admet un foncteur dérivé à gauche (resp. à droite) par rapport à la classe $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{W}^{op} \times \mathcal{W}$) :

$$\otimes_A^{\mathbf{L}} : \mathsf{D}(A) \times \mathsf{D}(A) \to \mathsf{D}(A),$$
$$\textit{resp.}\ \mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_A : \mathsf{D}(A)^{op} \times \mathsf{D}(A) \to \mathsf{D}(A).$$

Notons que le produit tensoriel dérivé est symétrique d'après la propriété universelle des foncteur dérivés (gauches).

Remarque IV.8. — Si $\rho : A \to B$ est un morphisme d'anneau, le foncteur $\mathbf{L}f^*$ introduit dans l'exemple IV.1 satisfait la formule :

$$\mathbf{L}f^*(K^*) = K^* \otimes_A^{\mathbf{L}} B$$

où B est considéré comme un complexe de A-modules concentré en degré 0.

On rappelle la manière de calculer ces foncteurs dans le cas particulier de la définition suivante :

[(1)]que l'on a tendance à oublier.

Définition IV.6. — Soit M et N deux A-modules. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$\operatorname{Tor}_n^A(M,N) = H_n(M \otimes_A^{\mathbf{L}} N)$$
$$\operatorname{Ext}_A^n(M,N) = H^n(\mathbf{R}\,\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N)).$$

On les appelle respectivement les foncteurs Tor et Ext de la catégorie abélienne $A-\mathrm{mod}$.

Remarque IV.9. — La symétrie du produit tensoriel se traduit par la formule : $\operatorname{Tor}_n^A(M,N) = \operatorname{Tor}_n^A(N,M)$.

IV.1.2.e. — On dit qu'un A-module M est *projectif* si le foncteur $\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,.)$ est exact. Dans ce cas, le foncteur en une variable $\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,.)$ se dérive trivialement et on montre que :

$$\mathbf{R}\,\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,L^*) = \underline{\operatorname{Hom}}_A(M,L^*).$$

On dira qu'un complexe K^* borné supérieurement est *projectivement cofibrant* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, K^n est projectif. Dans ce cas, on peut encore vérifier que le foncteur

$$\underline{\operatorname{Hom}}_A(K^*,.) : \mathsf{C}(A) \to \mathsf{C}(A)$$

préserve les quasi-isomorphismes et on obtient :

$$\mathbf{R}\,\underline{\operatorname{Hom}}_A(K^*,L^*) = \underline{\operatorname{Hom}}_A(K^*,L^*).$$

Le premier lemme de l'algèbre homologique, du à Cartan-Eilenberg, affirme la chose suivante :

Lemme IV.9. — *Pour tout A-module M, il existe un complexe P_* concentré en degrés positifs (en notation* homologique*), projectivement cofibrant, et un morphisme de complexes*

$$P_* \to M \tag{IV.4}$$

qui est un quasi-isomorphisme.

On dit encore que (IV.4) est une *résolution projective* de M. Il en résulte aussitôt que le morphisme induit

$$\mathbf{R}\,\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N) \to \mathbf{R}\,\underline{\operatorname{Hom}}_A(P_*,N)$$

est un quasi-isomorphisme, par définition des foncteurs dérivés. On en déduit donc :

$$\operatorname{Ext}_A^n(M,N) = H^n(\underline{\operatorname{Hom}}_A(P_*,N)).$$

Notons qu'on a obtenu deux résultats au passage, qui n'était pas évident d'après le théorème abstrait cité précédemment :

1. Pour tous A-modules M, N, $\operatorname{Ext}_A^n(M,N) = 0$ si $n < 0$.
2. Pour tous A-modules M, N, $\operatorname{Ext}_A^0(M,N) = \underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N)$.
3. Pour tout A-module M, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) M est projectif.
   (ii) pour tout A-module N et tout entier $n > 0$, $\operatorname{Ext}_A^n(M,N) = 0$.
   (iii) pour tout A-module N et tout entier $n > 0$, $\operatorname{Ext}_A^1(M,N) = 0$.

Le point 2 vient du fait que $\underline{\operatorname{Hom}}_A(.,N)$ est exact à droite : il en résulte que la suite de A-modules

$$0 \to \underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N) \to \underline{\operatorname{Hom}}_A(P_0,N) \to \underline{\operatorname{Hom}}_A(P_1,N) \to \dots$$

est exact. Le point 3 vient du fait que $\operatorname{Ext}_A^*(M,N)$ est un δ-foncteur en N : toute suite exacte

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

induit une suite exacte longue :

$$0 \to \underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N') \to \underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N) \to \underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N'') \to \operatorname{Ext}_A^1(M,N') \to \dots$$

Remarque IV.10. — Dans la suite du cours, la notion de δ-foncteur sera remplacée par la notion de foncteur triangulé.

Suivant Cartan et Eilenberg, on introduit la terminologie suivante :

Définition IV.7. — Soit A un anneau noethérien et M un A-module de type fini. On définit la *dimension projective* de M, notée $\mathrm{dh}_A(M)$ comme la borne supérieure de l'ensemble d'entiers :

$$\{p \in \mathbb{N} \mid \exists N \in A-\mathrm{mod}, \mathrm{Ext}^p(M,N) \neq 0\}.$$

On définit la dimension homologique (globale) de A comme l'entier :

$$\mathrm{gldh}(A) = \sup_{M \in A\text{-mod}^{tf}} \big(\mathrm{dh}_A(M)\big).$$

Evidemment, $\mathrm{dh}_A(M) = 0$ équivaut à dire que M est projectif. De plus, si on se donne une suite exacte courte de A-modules

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

tel que $\mathrm{dh}_A(M) < \mathrm{dh}_A(M'')$, alors $\mathrm{dh}_A(M') = \mathrm{dh}_A(M'') + 1$. En particulier, on peut voir le résultat suivant :

Proposition IV.10. — *Soit A un anneau et M un A-module. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $dh_A(M) \leq n$.
2. *Il existe une résolution projective de M de la forme :*

$$0 \to M_n \to \ldots \to M_0 \to M \to 0$$

IV.1.2.f. — Si M est un A-module plat, on obtient encore pour tout complexe de A-module L^* :

$$M \otimes^{\mathbf{L}}_A L^* = M \otimes_A L^*.$$

Plus généralement, si K^* est un complexe borné supérieurement tel que pour tout entier n, K^n est plat sur A, on peut vérifier que le foncteur $K^* \otimes_A .$ préserve les quasi-isomorphismes de complexes et on obtient :

$$K^* \otimes^{\mathbf{L}}_A L^* = K^* \otimes_A L^*.$$

Rappelons pour terminer le lemme facile suivant :

Lemme IV.11. — *Soit A un anneau et M un A-module. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est projectif.*

(ii) *M est facteur direct d'un A-module libre.*

(indication : considérer la surjection canonique $A^I \to M$ où I est l'ensemble sous-jacent à M.) Il en résulte que si M est projectif, il est plat sur A. En conséquence, étant donné un A-module M et une résolution projective de la forme (IV.4), on obtient :

$$\mathrm{Tor}^A_n(M,N) = H_n(P_* \otimes_A N). \tag{IV.5}$$

Comme dans le cas des foncteurs Ext, on a obtenu les renseignements suivants :

1. Pour tous A-modules M, N, $\mathrm{Tor}^A_n(M,N) = 0$ si $n < 0$.
2. Pour tous A-modules M, N, $\mathrm{Tor}^A_0(M,N) = M \otimes_A N$.
3. Pour tout A-module M, M est plat sur A si et seulement si pour tout A-module N et tout entier $n > 0$, $\mathrm{Tor}^A_n(M,N) = 0$.

Notons le résultat suivant :

Proposition IV.12. — *Soit A un anneau local noethérien, de corps résiduel k et M un A-module de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est projectif.*

(ii) *M est libre.*

(iii) $\mathrm{Tor}_1^A(M, k) = 0$.

Démonstration. — On considère une suite $(x_1, ..., x_n)$ d'éléments de M qui induisent une k-base de $M \otimes_A k$ et $A^n \xrightarrow{\varphi} M$ le morphisme corespondant. D'après le corollaire IV.1.1, φ est surjectif. Notons N son noyau. On obtient une suite exacte longue :

$$\ldots \to \mathrm{Tor}_1^A(M, k) \to N \otimes_A k \to k^n \xrightarrow{\varphi \otimes_A k} M \otimes_A k \to 0$$

qui implique par hypothèse que $N \otimes_A k = 0$, d'où $N = 0$ d'après le lemme de Nakayama. □

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire IV.12.1. — *Sous les hypothèses de la proposition précédente, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{dh}_A(M) \leq n$.

(ii) *Pour tout A-module N,* $\mathrm{Tor}_p(M, N) = 0$ *is* $p > n$.

(iii) $\mathrm{Tor}_{n+1}(M, k) = 0$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que (iii) implique (i). Considèrons une résolution

$$0 \to M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \to \ldots \to M_0 \xrightarrow{d_1} M \xrightarrow{d_0} 0$$

telle que M_i est libre pour $i < n$. On pose $Z_i = \mathrm{Ker}(d_i)$, de sorte que $Z_0 = M$. Pour $i > 0$, la suite exacte courte

$$0 \to Z_i \to M_i \to Z_{i-1} \to 0$$

montre que $\mathrm{Tor}_r(Z_i, k) = \mathrm{Tor}_{r+1}(Z_{i-1}, k)$ si $r > 0$. On en déduit $\mathrm{Tor}_1(M_n, k) = \mathrm{Tor}_{n+1}(Z_0, k) = 0$, et le corollaire précédent montre que M_n est libre. La proposition IV.10 permet donc de conclure. □

Corollaire IV.12.2. — *Sous les hypothèses de la proposition précédente, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{gldh}(A) \leq n$.

(ii) $\mathrm{Tor}_{n+1}(k, k) = 0$.

En effet, d'après ce qui précède, la condition (ii) entraine que k admet une résolution par un complexe formé de A-modules libres et concentré en degré $[0, n]$. Donc, pour tout A-module (de type fini), $\mathrm{Tor}_{n+1}(M, k) = 0$, et on obtient (i) par une nouvelle application du corollaire précédent.

1.3. Théorème de Serre (cas local). —

IV.1.3.a. — On rappelle la théorie du complexe de Koszul. Si A est un anneau et x un élément de A, on définit un complexe $K_*^A(x)$ appelé complexe de Koszul associé à x, en posant

$$K_n^A(x) = \begin{cases} A & \text{si } n = 0, 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec pour seule différentielle non nulle $d_1^A : A \to A$ étant le morphisme de multiplication par x.

Si $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est une suite d'éléments de a, on pose :

$$K_*^A(\underline{x}) = K_*^A(x_1) \hat{\otimes}_A \ldots \hat{\otimes}_A K_*^A(x_n)$$

où $\hat{\otimes}_A$ désigne le produit tensoriel de complexes (voir définition du paragraphe IV.1.2.d).

Si M est un A-module enfin, on pose : $K_*^A(\underline{x}, M) = K_*^A(\underline{x}) \otimes_A M$. On pose enfin, pour tout entier $i \geq 0$,

$$H_i(\underline{x}, M) := H_i(K_*^A(\underline{x}, M)).$$

L'intérêt du complexe de Koszul réside dans la proposition suivante :

Proposition IV.13. — *Considérons les notations précédentes. On suppose que A est local noethérien et M est un A-module de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\underline{x}$ est M-régulière.*

(ii) *pour tout $i > 0$, $H_i(\underline{x}, M) = 0$.*

Voir [**Ser65**, IV-5, prop. 3].

Corollaire IV.13.1. — *Soit A un anneau local régulier d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et $\underline{x}$ une suite régulière de paramètres de $\mathfrak{m}$.*

Alors le morphisme canonique

$$K_*^A(\underline{x}) \to A/\mathfrak{m}$$

est un quasi-isomorphisme.

Ainsi, $K_*^A(\underline{x})$ est une résolution de $A/\mathfrak{m}$ par des A-modules libres. De plus, $K_*^A(\underline{x})$ est concentré en degrés $[0, n]$.

Nous arrivons au point d'orgue de ce cours, le théorème suivant dû à Serre (*cf.* [**Ser65**, IV-37, th. 9]) :

***Théorème IV.14* (Serre)**. — *Soit A un anneau local noethérien. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est régulier.*

(ii) $\mathrm{gldh}(A)$ *est fini.*

De plus, sous ces conditions, $\mathrm{gldh}(A) = \dim(A)$*, et pour tous A-modules de type fini M et N,*

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = 0$$

si $i > \dim(A)$.

Nous n'utiliserons que le fait que (i) implique (ii). Or, cela résulte simplement du corollaire précédent combiné au corollaire IV.12.2. L'addendum résulte du corollaire IV.12.1.

Remarque IV.11. — On déduit de ce théorème une généralisation du théorème des syzygies de Hilbert au cas d'un anneau local régulier A de dimension n : pour tout A-module de type fini M, et toute suite exacte de A-modules

$$0 \to N \to L_{n-1} \to \ldots \to L_0 \to M \to 0$$

tel que L_i est libre de type fini, N est libre de type fini.

Le théorème précédent admet les corollaire fondamentaux suivants :

Corollaire IV.14.1. — *Soit A un anneau local régulier, $\mathfrak{p}$ un idéal premier. Alors, $A_\mathfrak{p}$ est régulier.*

En effet, de manière évidente, $\mathrm{gldh}(A_\mathfrak{p}) \leq \mathrm{gldh}(A)$.

Corollaire IV.14.2. — *Soient A et B deux anneaux locaux noethériens et $\rho : A \to B$ un morphisme plat local. Alors, si B est régulier, A est régulier.*

En effet, on a déjà vu que B est alors fidèlement plat sur A. Du fait que $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)\otimes_A B = \mathrm{Tor}_i^B(M\otimes_A B, N\otimes_A B)$, on en déduit donc

$$\mathrm{gldh}(A) \leq \mathrm{gldh}(B).$$

Remarque IV.12. — On peut aussi montrer que si A est local régulier, alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$,

$$\dim(A) = \dim(A_{\mathfrak{p}}) + \dim(A/\mathfrak{p}).$$

Voir à ce propos [**Ser65**, IV-37, cor. 2 et IV-24, cor. 4].(2) Du corollaire précédent, il résulte donc que A est un anneau caténaire (voir définition II.18).

1.4. Cas global. —

Corollaire IV.14.3. — *Soit A un anneau noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier.*
2. *Pour tout idéal premier $\mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{m}}$ est régulier.*
3. $\mathrm{gldh}(A)$ *est finie*

Cela résulte du fait élémentaire : $\mathrm{gldh}(A) = \sup_{\mathfrak{m}} \mathrm{gldh}(A_{\mathfrak{m}})$ (*cf.* [**Ser65**, IV-32, cor. 2]).

Remarque IV.13. — De la remarque IV.12, on déduit donc qu'un schéma régulier est caténaire.

Définition IV.8. — Sous les conditions équivalentes du corollaire précédent, on dit que A est *régulier.*

On dit plus généralement qu'un schéma noethérien X est *régulier* si pour tout point x de X, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier.

IV.1.4.a. — Considérons un morphisme plat de schémas $f : Y \to X$. On dit que f est *fidèlement plat* s'il est de plus surjectif. Ainsi, lorsque f est le spectre d'un morphisme d'anneaux, $A \to B$ dire que f est fidèlement plat équivaut à dire que B/A est fidèlement plate. On dérive facilement du corollaire IV.14.2 et de la définition précédente le résultat suivant :

Proposition IV.15. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme fidèlement plat. Alors, si Y est régulier, X est régulier.*

Remarque IV.14. — On peut dériver de cette définition que si A est régulier, $A[t]$ est régulier (*cf.* [**Ser65**, IV-43, prop. 25]). On en déduit donc :

1. Si k est un corps, l'anneau $k[t_1, ..., t_n]$ est régulier ; on peut en déduire que le théorème de Serre permet de redémontrer le théorème classique des syzygies de Hilbert.
2. Comme tout quotient d'un anneau caténaire est caténaire, on déduit de IV.13 que toute A-algèbre de type fini est caténaire. On dit encore que A est *universellement caténaire.* De même, si X est un schéma régulier, tout X-schéma de type fini est caténaire.

(2) C'est évident si $\mathfrak{p}$ peut être engendré par une suite régulière d'après IV.2. Le cas général requiert un travail sur la profondeur des modules que nous n'avons pas fait (voir *loc. cit.*)

2. Multiplicités pour les cycles

IV.2.0.b. — On aborde maintenant le problème central de la théorie de l'intersection dans un schéma régulier X.

On veut construire le produit $\alpha.\beta$ de deux cycles α et β avec (au moins) les propriétés suivantes :

(I1) Le cycle $\alpha.\beta$ est bilinéaire en α et en β.

(I2) Si α (resp. β) est p-codimensionnel (resp. q-codimensionnel), alors $\alpha.\beta$ est $(p+q)$-codimensionnel.

(I3) $\mathrm{Supp}(\alpha.\beta) \subset \mathrm{Supp}(\alpha) \cap \mathrm{Supp}(\beta)$.

On déduit des propriétés 2 et 3 que l'on peut écrire :

$$\alpha.\beta = \sum_x m_x(\alpha.\beta).x$$

où x parcourt les points génériques de $\mathrm{Supp}(\alpha) \cap \mathrm{Supp}(\beta)$. On appellera l'entier $m_x(\alpha.\beta)$ la *multiplicité d'intersection de α et β en x.*

La propriété 1 nous ramène donc à définir un produit d'intersection dans le cas où $\alpha = \langle Z \rangle_X$ et $\beta = \langle T \rangle_X$.

***Proposition IV.16* (Serre).** — *Pour tous sous-schéma fermés Z et T de X, on a :*

$$\mathrm{codim}_X(Z) + \mathrm{codim}_X(T) \geq \mathrm{codim}_X(Z \cap T).$$

Evidemment, l'inégalité peut être stricte dans le cas où $Z = T$ est non vide et différent d'une composante irréductible. On fera attention que cette inégalité n'est pas vraie sans l'hypothèse de régularité, même sur un corps.(3)

Si dans la proposition précédente, l'inégalité est stricte, il n'y a aucune chance de réaliser les conditions 2 et 3 ci-dessus. Ceci motive la définition classique suivante :

Définition IV.9. — Soit $\alpha = \sum_i n_i.\langle Z_i \rangle$ et $\beta = \sum_j m_j.\langle T_j \rangle$ deux cycles sous forme normale.

On dit que α et β se coupent proprement si pour tous indice (i, j),

$$\mathrm{codim}_X(Z_i) + \mathrm{codim}_X(T_j) = \mathrm{codim}_X(Z_i \cap T_j).$$

Notons le lemme facile suivant :

Lemme IV.17. — *Soit A un anneau noethérien, M et N deux A-modules. Alors, pour tout $i \geq 0$,*

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{Tor}_i^A(M, N)) \subset \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Supp}(N).$$

Il y a égalité si $i = 0$ et M, N sont de type fini.

Démonstration. — Cela résulte du fait que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, et tout $i \geq 0$, $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)_\mathfrak{p} = \mathrm{Tor}_i^{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p})$. L'addendum est un rappel de la proposition III.1. □

IV.2.0.c. — Considérons deux sous-schémas fermés intègres Z et T de X, de codimension respective p et q, tels que les cycles $\alpha = \langle Z \rangle_X$ et $\beta = \langle T \rangle_X$ s'intersectent proprement.

Soit x un point générique de $Z \cap T$. On pose $A = \mathcal{O}_{X,x}$. Notons encore $M = \mathcal{O}_{Z,x}$ et $N = \mathcal{O}_{T,x}$, vus comme des A-modules – ils sont de la forme $M = A/\mathfrak{p}$ et $N = A/\mathfrak{q}$ pour $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$.

Comme x est un point générique de $Z \times_X T$, le lemme précédent montre que pour tout $i \geq 0$, $\mathrm{Supp}(\mathrm{Tor}_i^A(M, N)) \subset \{x\}$. Ainsi, $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$ est un A-module de longueur finie (*cf.* III.5.3).

(3) Contre-exemple (que j'ai appris de O. Gabber) X (resp. Z, T) est le spectre de la k-algèbre $k[x, y, z, w]/(xy - zw)$, (resp. $k[x, y, z, w]/(xy - zw, x, z)$, $T = k[x, y, z, w]/(xy - zw, y, w)$).

Définition IV.10. — Adoptant les notations et hypothèses précédentes, on défini la multiplicité de Serre de α et β en $x \in (Z \cap T)^{(p+q)}$ comme l'entier :

$$m_x(\alpha.\beta) = \sum_{i=0}^{p+q} (-1)^i . \lg_A \big(\operatorname{Tor}_i^A(M, N) \big).$$

On convient que $m_x(\alpha.\beta) = 0$ si $x \notin (Z \cap T)^{(p+q)}$.

Soient $\alpha = \sum_i n_i.\langle Z_i \rangle$ et $\beta = \sum_j m_j.\langle T_j \rangle)$ deux cycles de X qui se coupent proprement. On pose, pour tout $x \in X$:

$$m_x(\alpha.\beta) = \sum_{i,j} n_i m_j . m_x(\langle Z_i \rangle, \langle T_j \rangle).$$

On en déduit donc une définition du produit d'intersection de deux cycles α et β se coupant proprement qui satisfait les propriétés de IV.2.0.b.

IV.2.0.d. — On en déduit par ailleurs facilement les propriétés suivantes :

(I4) $\alpha.\beta = \beta.\alpha$.

(I5) Pour tout morphismes plat $f : Y \to X$ de schémas réguliers,

$$f^*(\alpha.\beta) = f^*(\alpha).f^*(\beta).$$

3. Multiplicités pour les modules

Pour conclure cette partie sur les multiplicités, il nous reste quelques formules à obtenir concernant le produit d'intersection. On interprète ici la méthode de Serre pour arriver à ce résultat comme une réduction de ces formules à une formule analogue dans la catégorie dérivée $\mathsf{D}(A)$.

Définition IV.11. — Soit A un anneau local régulier.

Nous dirons qu'un complexe C_* de A-modules est *parfait* si pour entier $i \in \mathbb{Z}$, le A-module $H_i(C_*)$ est de type fini, nul sauf pour un nombre finie de valeur de i.

Etant donné un tel complexe parfait C_*, on définit un élément de $K_0'(A)$ par la formule :

$$\chi(C_*) = \sum_i (-1)^i . [H^i(C_*)]$$

Etant donné un quasi-isomorphisme $C_* \to D_*$ entre deux complexes parfaits, il est évident que $\chi(C_*) = \chi(D_*)$. Si l'on note $\mathsf{D}_c^b(A)$ la sous-catégorie de la catégorie dérivée $\mathsf{D}(A)$ formée des complexes parfaits, on en déduit un foncteur canonique :

$$\mathsf{D}_c^b(A) \to K_0'(A), C_* \mapsto \chi(C_*).$$

Considérant finalement le foncteur z^n défini dans le cours précédent (*cf.* définition III.2 et numéro III.3.0.g), on en déduit un foncteur :

$$\mathsf{D}_c^b(A) \to Z^n(X)$$

que l'on notera encore abusivement z^n.

Exemple IV.2. — Considérant les notations de IV.2.0.c, on obtient la formule synthétique :

$$\alpha.\beta = z^{p+q}(M \otimes_A^L N).$$

Notons par ailleurs le lemme suivant :

Lemme IV.18. — *Soit A un anneau noethérien et M un A-module de type fini. Alors, il existe une suite $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$ d'idéaux premier de A tels que dans $K_0'(X)$, la relation suivante a lieu :*

$$[M] = \sum_{i=1}^{n} [A/\mathfrak{p}_i].$$

Il suffit en effet d'appliquer le corollaire III.5.1 du cours précédent au A-module M. Considérant la suite des A-modules M_i, on obtient par définition de $K_0'(X)$, pour tout entier i,

$$[M_i] - [M_{i+1}] + [A/\mathfrak{p}_i] = 0$$

et le somme de ces relations donne le résultat.

IV.3.0.e. — Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de l'anneau local régulier A, $n = \dim(A)$. Supposons donnés deux A-modules de type fini M et N tels que $M \otimes_A N$ est (non nul) de longueur finie(4) Alors, d'après le lemme IV.17, tous les $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$ ont leur support dans $\{\mathfrak{m}\}$ et sont donc de longueur finie.

Définition IV.12. — Sous les hypothèses précédentes, on définit la multiplicité d'intersection de M et N en $\mathfrak{m}$ comme l'entier :

$$\chi(M, N) = \sum_{i=0}^{\dim(A)} (-1)^i . \lg_A \big(\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \big).$$

IV.3.0.f. — Notons que cet entier est encore caractérisé par la relation :

$$z^n(M \otimes_A^{\mathbf{L}} N) = \chi(M, N).\mathfrak{m}$$

Soit p (resp. q) la codimension du support de M (resp. N) dans X. On s'intéresse au problème de savoir quand a lieu la relation : $z^n(M \otimes_A^{\mathbf{L}} N) = z^p(M).z^q(N)$. D'après la proposition IV.16 et notre hypothèse sur M et N, la relation suivante a toujours lieu :

$$p + q \geq n$$

Les propriétés attendues du produit d'intersection nous conduisent donc au théorème suivant :

Théorème IV.19. — *Considérons les hypothèses de IV.3.0.e. Alors, si $p + q > n$,*

$$\chi(M, N) = 0.$$

Ce théorème a été prouvé par Serre si A contient un corps ou si A est non ramifié (*cf.* [**Ser65**, chap. V]). Il a ensuite été prouvé indépendamment par Roberts et Gillet-Soulé.(5)

Comme corollaire immédiat de cette proposition, on a le résultat suivant :

Corollaire IV.19.1. — *Soit A un anneau régulier, $X = \mathrm{Spec}(A)$, et p, q deux entiers positifs. Soit M et N deux A-modules de type fini. Notons Z (resp. T) le support de M (resp. N). On suppose que les inégalités suivantes ont lieu :*

$$\text{(IV.6)} \qquad \mathrm{codim}_X(Z) \geq p, \quad \mathrm{codim}_X(T) \geq q, \quad \mathrm{codim}_X(Z \cap T) \geq p + q.$$

Alors, on a les propriétés suivantes :

1. *Le complexe de A-modules $M \otimes_A^{\mathbf{L}} N$ est parfait.*
2. *Les cycles $z^p(M)$ et $z^q(N)$ se coupent proprement.*
3. $z^p(M).z^q(N) = z^{p+q}(M \otimes_A^{\mathbf{L}} N)$.

Démonstration. — Pour le premier point, puisque A est régulier, le corollaire IV.14.3 montre que $M \otimes_A^{\mathbf{L}} N$ est cohomologiquement borné. Par ailleurs, si M est de type fini, on peut trouver une résolution projective de M par des A-modules libres de type fini et cela conclut (d'après le calcul (IV.5)).

Le deuxième point résulte des inégalités (IV.6).

Enfin, pour le troisième point, on se ramène à calculer la multiplicité des deux cycles en un point $\mathfrak{p}$ de $X^{(p+q)}$. Par définition, les calculs ont lieu dans l'anneau local $A_\mathfrak{p}$ donc on peut supposer

(4) Il revient au même de demander que $\mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Supp}(N) = \{x\}$.

(5) Je donne la référence pour la preuve de Gillet-Soulé, qui est plus proche de l'esprit de ce cours : [**GS87**].

que A est local noethérien et $Z \cap T = \{\mathfrak{p}\}$. Le membre de droite n'est alors pas autre chose que $\chi(M,N).\mathfrak{p}$. Or, du fait de suite exacte longue de cohomologie induite par $\mathrm{Tor}_*(M,.)$ pour une suite exacte courte de modules, la fonction $\chi(M,.)$ se factorise par le groupe $K'_0(A)$. D'après le lemme IV.18, on peut donc supposer par linéarité que $[N]=[A/\mathfrak{q}]$, pour un idéal premier $\mathfrak{q}$ de A. De même on peut supposer $[M]=[A/\mathfrak{p}]$ et la formule à prouver devient tautologique. □

Remarque IV.15. — On obtient une preuve plus conceptuelle si l'on utilise la théorie des catégories triangulées. En effet, $\mathsf{D}^b_c(A)$ est une catégorie triangulée et l'on montre facilement que la fonction

$$\chi : \mathsf{D}^b_c(A) \to K'_0(A)$$

envoie un triangle distingué

$$K \to E \to F \to K[1]$$

sur la relation $[K]-[E]+[F]=0$. Or le bifoncteur $\otimes^{\mathbf{L}}_A$ respecte les triangles distingués. Il en résulte que dans la preuve précédente, $\chi(M,N)$ ne dépend que des classes de M et N dans $K'_0(A)$.

On en déduit facilement la généralisation suivante :

Corollaire IV.19.2. — *Soit A un anneau régulier, $X=\mathrm{Spec}(A)$, et p, q deux entiers positifs. Soit C_* et D_* deux complexes parfaits de A-modules. Notons Z_i (resp. T_j) le support de $H_i(C_*)$ (resp. $H_j(D_*)$). On suppose que les inégalités suivantes ont lieu pour tout couple d'indices (i,j) :*

(IV.7) $$\mathrm{codim}_X(Z_i) \geq p, \quad \mathrm{codim}_X(T_j) \geq q, \quad \mathrm{codim}_X(Z_i \cap T_j) \geq p+q.$$

Alors, on a les propriétés suivantes :

1. *Le complexe de A-modules $C_* \otimes^{\mathbf{L}}_A D_*$ est parfait.*
2. *Les cycles $z^p(C_*)$ et $z^q(D_*)$ se coupent proprement.*
3. *La relation suivante entre cycles de X a lieu :*

$$z^p(C_*).z^q(D_*) = z^{p+q}(C_* \otimes^{\mathbf{L}}_A D_*).$$

Dès lors :

Proposition IV.20. — *Soit X un schéma régulier et α, β et γ des cycles de X se coupant proprement deux à deux. Alors,*

$$\alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma.$$

Démonstration. — Puisqu'il s'agit d'identifier certaines multiplicités d'intersection, on peut se placer dans l'anneau local d'un point de X. Autrement dit, on se ramène au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$, A un anneau local régulier. On se ramène par linéarité au cas où les cycles sont de codimension pure, et on écrit $\alpha = z^p_A(M)$, $\beta = z^q_A(N)$, $\gamma = z^r_A(P)$, $n=p+q=r$. Alors, l'équation devient d'après le corllaire précédent :

$$z^n((M \otimes^{\mathbf{L}}_A N) \otimes^{\mathbf{L}}_A P) = z^n(M \otimes^{\mathbf{L}}_A (N \otimes^{\mathbf{L}}_A P))$$

qui résulte de l'associativité du produit tensoriel dans la catégorie dérivée $D^b_c(A)$. □

Notre dernière formule utiise la définition et le lemme suivants :

Définition IV.13. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas, T un sou-schéma de Y. On dira que T est *fini relativement* à f si $f|_T$ est un morphisme fini.

Lemme IV.21. — *Soit* $f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *un morphisme de schémas affines réguliers. Soit* T *un sous-schéma fermé de* $\mathrm{Spec}(B)$ *fini relativement à* f.

On suppose que T *est de codimension pure* p *dans* Y *et* $f(T)$ *est de codimension pure* q *dans* X.

Considérons un complexe parfait D *de* B*-modules tel que pour tout entier* $i \in \mathbb{Z}$*, le support de* $H_i(D)$ *est inclut dans* T*. Alors,* $f_*(D) = D|_A$ *est un complexe parfait de* A*-module et l'on a :*

$$f_*(z^p(D)) = z^q(f_*(D)).$$

Démonstration. — Notons que $f_*H^i(D) = H^i(f_*(D))$. La première assertion en résulte immédiatement. Par additivité, on se ramène au cas où D est un B-module de type fini M. Puisque $\mathrm{Supp}(M) \subset T$, on peut supposer que $Y = T$, et donc que f est fini. Raisonnant localement en un point de $f(T)$, on peut supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. De même, on peut supposer que B est semi-local quitte à travailler au voisinage des points $f^{-1}(\mathfrak{m})$. Dès lors, la formule résulte de la proposition II.10. □

Corollaire IV.21.1. — *Soit* $f : Y \to X$ *un morphisme plat de schémas réguliers,* α *un cycle de* Y *et* β *un cycle de* X*. On suppose que le support de* α *est fini relativement à* f.

Alors, dès que les intersections en jeu sont propres, on a la formule :

$$f_*(\alpha.f^*(\beta)) = f_*(\alpha).\beta.$$

Démonstration. — On se ramène au cas où $\alpha = \langle T \rangle$ et T est un schéma intègre. Soit q la codimension de T dans Y et q' la codimension de $f(T)$ dans X.

On se ramène encore au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$ et on écrit $\alpha = z^q_B(N)$, $\beta = z^p_A(M)$. Alors, grâce au lemme précédent, on peut calculer les deux membres de l'équation à prouver :

$$z_A^{p+q'}\big(f_*(N \otimes_B^{\mathbf{L}} f^*(M))\big) = z_A^{p+q'}\big(f_*(N) \otimes_A^{\mathbf{L}} M\big).$$

On s'est donc ramené à prouver une formule dans la catégorie dérivée $\mathsf{D}^b_c(A)$ qui résulte facilement de la formule (III.4) du numéro III.2.0.d après avoir pris une résolution projective de M. □

Références

[Bou83] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4 - Chapitres 5 à 7 - Chapitres 8 et 9*, Masson, 1985 - 1985 - 1983.

[GS87] H. Gillet & C. Soulé – « Intersection theory using Adams operations », *Invent. Math.* **90** (1987), no. 2, p. 243–277.

[Mat86] H. Matsumura – *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, Translated from the Japanese by M. Reid.

[Ser65] J.-P. Serre – *Algèbre locale. Multiplicités*, Cours au Collège de France, 1957–1958, rédigé par Pierre Gabriel. Seconde édition, 1965. Lecture Notes in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

2009-2010

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* deglise@math.univ-paris13.fr
Url : http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/