Table des matières

COURS V
MORPHISMES DE SCHÉMAS : PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES ET TOPOLOGIQUES

Suivant le parti pris de ce cours, on se restreint dans ces rappels aux schémas et anneaux noethériens.

1. Morphismes quasi-finis

Définition V.1. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme de type fini.

Nous dirons que f est quasi-fini si pour tout point x de X, l'image inverse $f^{-1}(\{x\})$ est un ensemble fini.

Une immersion (entre schémas noethériens), un morphisme fini, sont de manière évidente des morphismes quasi-finis.

Le théorème fondamental pour les morphismes quasi-finis, dû à Grothendieck, est suivant ce dernier une forme du « Main theorem » de Zariski :

Théorème V.1. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est quasi-fini.*

(ii) *Il existe une factorisation de f sous la forme*

$$Y \xrightarrow{j} \bar{Y} \xrightarrow{\bar{f}} X$$

tel que j est une immersion ouverte et $\bar{f}$ un morphisme fini.

Voir [**EGA3**, 4.4.5].

2. Morphismes séparés et nets

V.2.0.a. — Rappelons que la catégorie des schémas admet des produits fibrés. Si $f : X \to S$ est un morphisme de schémas, on définit le morphisme diagonal de X/S comme le produit de S-morphismes

$$\delta_{X/S} : X \xrightarrow{1_X \times_S 1_X} X \times_S X.$$

Posons $\delta = \delta_{X/S}$. Si $p : X \times_S X \to X$ désigne la première projection, de la relation $p \circ \delta = 1$, on déduit que δ est un homéomorphisme sur son image. De plus, pour tout point x de X, $x' = \delta(x)$, on a encore la relation suivante entre les fibres de ces morphismes

$$\delta_x \circ p_{x'} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X\times_S X,x'} \to \mathcal{O}_{X,x}.$$

qui montre que $\delta_{x'}$ est surjectif. On peut montrer que ces conditions entrainent que δ est une immersion dans le sens de la définition II.11 – *cf.* [**EGA1**, 4.2.2].

Définition V.2. — Avec les notations précédentes, on appelle $\delta_{X/S}$ l'*immersion diagonale* du S-schéma X. On appelle sous-schéma diagonal de X/S le sous-schéma de $X \times_S X$ qui correspond à cette immersion. On le note $\Delta_{X/S}$.

Nous dirons qu'un morphisme de type fini $f : X \to S$ est *séparé* (resp. *net*) si $\delta_{X/S}$ est une immersion fermée (resp. ouverte) – autrement dit, $\Delta_{X/S}$ est fermé (resp. ouvert) dans $X \times_S X$.

Remarque V.1. — Dans [**EGA1**, 5.4], Grothendieck ne demande pas la condition de type finitude sur les morphismes séparés (pas plus qu'il ne l'énonce pour les seuls schémas noethériens).

On peut vérifier formellement à partir des propriétés des produits fibrés la proposition suivante :

Proposition V.2. —
1. *Une immersion est un morphisme net et séparé.*
2. *Les morphismes séparés (resp. nets) sont stables par composition, changement de base et produit fibré.*
3. *Si un composé de morphismes de schémas gf est séparé (resp. net) alors f est séparé (resp. net).*

V.2.0.b. — Soit S un schéma et $f : Y \to X$ un morphisme de S-schémas. On définit le *morphisme graphe* de f comme le produit de S-morphismes :

$$\gamma_f : Y \xrightarrow{1_Y \times_S f} Y \times_S X.$$

On vérifie formellement que le carré ci-dessous est alors cartésien :

(V.1)
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\gamma_f"] \arrow[d, "f"'] & Y \times_S X \arrow[d, "f \times_S 1_X"] \\ X \arrow[r, "\delta_{X/S}"] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

Il en résulte donc que γ_f est une immersion. On note souvent Γ_f son image et on l'appelle le *graphe* du S-morphisme f. Du carré cartésien précédent, on déduit facilement :

Proposition V.3. — *Considérons les notations ci-dessus. Si X/S est séparé (resp. net), alors γ_f est une immersion fermée (resp. ouverte).*

Rappelons qu'une section $s : S \to X$ d'un S-schéma X est une section du morphisme structural de X/S. Il en résulte formellement que le graphe de s est isomorphe à s via l'isomorphisme canonique $S \times_S X = X$.

Corollaire V.3.1. — *Une section d'un S-schéma X séparé (resp. net) est une immersion fermée (resp. ouverte).*

V.2.0.c. — Soit A un anneau, I un idéal. Du fait que A est noethérien, I est de type fini. Il en résulte que $I \otimes_A A/I = I/I^2$ est un A/I-module de type fini. On posera $N_Z(X) = I/I^2$, vu comme un A/I-module, et on l'appelera le *module conormal* associé à I.

Proposition V.4. — *Considérons les notations ci-dessus. On pose $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Z = \mathrm{Spec}(A/I)$ et on note $i : Z \to X$ l'immersion fermée canonique. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *i est une immersion ouverte.*

(ii) *Z est une composante connexe de X.*

(iii) *Le module conormal $N_Z(X)$ est nul.*

(iv) $Z \cap \operatorname{Supp}(I) = \emptyset$.

Démonstration. — Le fait que (*i*) est équivalent à (*ii*) est immédiat.

Si l'on traduit (i), on obtient :

$$\forall \mathfrak{p} \in Z, \exists f \in A \mid \mathfrak{p} \in D(f), D(f) \subset Z$$

Or, $D(f) \subset Z$ équivaut à $I \otimes_A A_f = 0$. Comme I est de type fini, $\operatorname{Supp}(I)$ est fermé (*cf.* III.2.1). En particulier, $I \otimes_A A_f = 0$ équivaut à $D(f) \cap \operatorname{Supp}(I) = \emptyset$ et on obtient l'équivalence entre (i) et (iii).

Or d'après la proposition III.1, $\operatorname{Supp}(N_Z(X)) = \operatorname{Supp}(I) \cap \operatorname{Supp}(A/I)$ ce qui montre immédiatement l'équivalence entre (iii) et (iv). □

V.2.0.d. — Considérons une A-algèbre de type fini B, correspondant à un morphisme d'anneaux $\rho : A \to B$ et à un morphisme de schémas $X \to S$. Alors, le morphisme diagonal de X/S est le spectre du morphisme

$$m : B \otimes_A B \to B, b \otimes_A b' \mapsto bb'.$$

Ce morphisme est trivialement surjectif, donc X/S est trivialement séparé.(1) Soit I le noyau de m. Alors, $\Omega_{B/A} = I/I^2$ est un B-module de type fini que l'on appelle encore le module cotangent de B/A. La proposition précédente admet immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire V.4.1. — *Considérons les notations précédentes. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\operatorname{Spec}(B)/\operatorname{Spec}(A)$ *est net.*

(ii) $\Omega_{B/A} = 0$.

On dit encore que B est une A-algèbre nette.

Remarque V.2. — Soit B une A-algèbre.

1. Pour toute A-algèbre A', $\Omega_{B/A} \otimes_A A' = \Omega_{B \otimes_A A'/A'}$.
2. Pour tout morphisme surjectif $B \to B_0$ de A-algèbres, il existe un épimorphisme canonique

$$\Omega_{B/A} \to \Omega_{B_0/A}.$$

V.2.0.e. — Pour abréger, on dira qu'un k-schéma X est fini séparable si il existe une suite finie $(L_i)_{i \in I}$ d'extensions de corps finies séparables de k telle que $X = \sqcup_{i \in I} \operatorname{Spec}(L_i)$.

Proposition V.5. — *Soit A un anneau local de corps résiduel k et B une A-algèbre de type fini. Les conditions suivantes sont équivalences :*

(i) *B/A est nette.*

(ii) *$B \otimes_A k/k$ est nette.*

(iii) *Le k-schéma* $\operatorname{Spec}(B \otimes_A k)$ *est fini séparable.*

---

(1) Plus généralement, tout morphisme affine est séparé. Rappelons qu'un morphisme de schémas $f : Y \to X$ est *affine* si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert affine U tel que $f^{-1}(U)$ est un ouvert affine de Y – un morphisme fini est affine d'après la définition II.10. On en déduit l'assertion, car le fait d'être séparé se vérifie localement sur X.

Démonstration. — L'équivalence entre (i) et (ii) résulte facilement du lemme de Nakayama en utilisant la remarque précédente.

On est donc ramené au cas où $A = k$. Le fait que (iii) implique (ii) résulte facilement des propriétés des extensions séparables. Pour la réciproque, quitte à faire une suivant la cloture algébrique de k, on peut supposer que k est algébriquement clos. Il s'agit de montrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de B, $B_{\mathfrak{p}} = k$. On peut donc supposer que B est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Si B est finie sur k, de dimension n, on déduit de (ii) le fait que B est un facteur direct de $B \otimes_k B$. Or, $B \otimes_k B$ est un anneau artinien et

$$(B \otimes_k B)_{red} = B_{red} \otimes_k B_{red} = k.$$

On en déduit que le nilradical de $B \otimes_k B$ est maximal : $B \otimes_k B$ est local. Nécessairement, $B \simeq B \otimes_k B$. Cela implique que $n = 1$ et conclut.

Dans le cas général, d'après [**Bou83**, V, §3, n$^\text{o}$ 4, th. 3], $B/\mathfrak{m}$ est de dimension finie sur k. Or pour tout entier $n > 0$, $B/\mathfrak{m}^n$ admet une suite de composition dont les quotients sont isomorphes à $B/\mathfrak{m}$: donc $B/\mathfrak{m}^n$ est de dimension finie sur k. Comme $B/\mathfrak{m}^n$ est nette sur k d'après la remarque V.2, on en déduit $B/\mathfrak{m}^n = k$. Or B est un anneau local noethérien ; par application du théorème d'intersection de Krull IV.5,

$$\cap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n = 0.$$

On en déduit donc que $B = k$. □

V.2.0.f. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas. Rappelons que pour tout point x de X, on définit la fibre de f en x comme le $\kappa(x)$-schéma $Y \times_X \operatorname{Spec}(\kappa(x))$. On la note simplement $f^{-1}(x)$.

Corollaire V.5.1. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de type fini de schémas. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est net.*

(ii) *Pour tout point $x \in X$, le $\kappa(x)$-schéma $f^{-1}(x)$ est fini séparable.*

En effet, la condition d'être nette est locale et l'on se ramène donc au cas affine. On notera en particulier qu'un morphisme net est quasi-fini.

3. Morphismes étales

Suivant [**Bou83**, II, §2, n$^\text{o}$ 1, def. 2], si A est un anneau et f un élément de A, on note $A[f^{-1}]$ la localisation de l'anneau A par rapport à f (ou encore au système multiplicatif des puissances de f).

Définition V.3. — Soit A un anneau noethérien.

Considérons un polynôme unitaire $f \in A[t]$ et posons $A_0 = A[t]/(f)$. Soit $\bar{g}$ un élément de A_0. On dit que f vérifie le *critère jacobien* dans $A_0[\bar{g}^{-1}]$ si la classe du polynôme dérivé f' dans A_0 est inversible dans $A_0[\bar{g}^{-1}]$.

On dit qu'une A-algèbre B est *étale standard* si elle est A-isomorphe à une A-algèbre de la forme $A_0[\bar{g}^{-1}]$ comme ci-dessus.

Evidemment, une immersion ouverte est un morphisme étale. De plus, on voit facilement que les morphismes étales sont stables par changement de base et par composition. Notons de plus la conséquence suivante de la définition :

Proposition V.6. — *Soit B une A-algèbre étale standard.*

1. *B est de type fini (en tant que A-algèbre).*

2. *B est plate que A-module.*

Démonstration. — Le premier point est immédiat. Le deuxième l'est tout autant si l'on note que pour un polynôme unitaire $f \in A[t]$ de degré n, le A-module $A[t]/(f)$ est libre de rang n. □

On peut adopter la définition suivantes des morphismes étales de type fini – qui d'habitude est plutôt présentée comme une caractérisation.

Définition V.4. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme de type fini.

Soit y un point de Y. On dit que *f est étale en y* si, il existe un voisinage ouvert affine $V = \operatorname{Spec}(B)$ (resp. $U = \operatorname{Spec}(A)$) de y dans Y (resp. $x = f(y)$ dans X) telle que la A-algèbre B correspondante soit étale standard.

On dit que f est *étale* s'il l'est en tous points de Y.

De même, on dira qu'une A-algèbre de type fini B est étale si $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ est étale dans le sens précédent. Bien sûr, si B est étale standard, elle est étale.

Comme corollaire immédiat de cette proposition, notons le point suivant :

Proposition V.7. — *Un morphisme étale de schémas est plat.*

Le premier exemple de A-algèbre étale standard résulte de la proposition suivante :

Proposition V.8. — *Soit k un corps et B une k-algèbre de type fini.*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *B/k est étale.*

(i') *B/k est étale standard.*

(ii) *B/k est nette.*

(ii') *Le k-schéma* $\operatorname{Spec}(B)$ *est fini séparable.*

Démonstration. — L'équivalence entre (i) et (i') résulte de la définition. De même, la condition (ii') n'est mise là que pour mémoire : (ii) $\Leftrightarrow$ (ii') d'après V.5.

Le fait que (ii') implique (i') résulte essentiellement du fait que toute extension de corps séparable est monogène. Montrons la réciproque. On écrit avec les notations de la définition précédente pour $A = k$, $A_0 = k[t]/(f)$ pour un polynôme unitaire $f \in k[t]$ et on considère un élément $g \in k[t]$ dont la classe $\bar{g}$ dans A_0 vérifie $B = A_0[\bar{g}^{-1}]$ et tel que f vérifie le critère jacobien par rapport à B.

Notons que ce critère s'exprime encore par l'existence de polynômes $h, k \in k[t]$ et d'un entier $n \geq 0$ tels que

$$hf' + kf = g^n \tag{V.2}$$

Considérons la décomposition en éléments simples

$$f = \prod_{i \in I} f_i^{n_i}$$

de f dans l'anneau factoriel $k[t]$. Alors, si l'on pose $Q_i = \prod_{j \neq i} f_j^{n_j} f_i^{n_i - 1}$, on obtient :

$$f' = \sum_{i \in I} n_i . Q_i f_i'.$$

Dès lors, la relation (V.2) montre que pour tout $k \in I$, si f_k ne divise pas g, $n_k = 1$. En effet, le cas contraire implique une contradiction d'après la formule (V.2).

Si l'on pose $I' = \{i \in I \mid f_i \nmid g\}$, on en déduit donc

$$A_0[\bar{g}^{-1}] = (\prod_{i \in I'} k[t]/(f_i))[\bar{g}^{-1}].$$

Il reste à montrer que pour tout indice $i \in I'$, f_i est un polynôme séparable sur k. Or la relation (V.2) fournit une relation de la forme

$$Q_i f_i' + l f_i = g^n$$

pour $l \in k[t]$; comme f_i ne divise pas g, il ne divise pas f_i', ce qui conclut. □

Les deux propositions précédentes fournissent donc le résultat suivant :

Corollaire V.8.1. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de type fini. Considérons les conditions suivantes :*

(i) *f est étale.*

(ii) *f est plat et net.*

Alors, (i) $\Rightarrow$ (ii).

Remarque V.3. — Un résultat important[(2)] est le fait que ces deux conditions sont mêmes équivalentes (*cf.* [**Ray70**, V, th. 1]). Cette réciproque utilise d'ailleurs de manière essentielle le « Main theorem » de Zariski (*cf.* V.1), mais il me semble que nous n'aurons pas à l'utiliser dans ce cours.

Corollaire V.8.2. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme étale. Si X est régulier (resp. normal, réduit) alors Y est régulier (resp. normal, réduit). La réciproque est vraie si f est surjectif.*

Démonstration. — Soit y un point de Y, d'anneau local B. Notons encore A l'anneau local de X en $x = f(y)$ et considérons le morphisme local induit par f :

$$\rho : A \to B.$$

D'après V.7, ρ est plate. Soit $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{n}$) l'idéal maximal de A (resp. B), $k = A/\mathfrak{m}$ (resp. $L = B/\mathfrak{n}$). La k-algèbre $B \otimes_A k$ est étale de type fini (c'est la fibre de f en x). D'après le corollaire précédent, la fibre de f en x est séparée de type fini sur k. Il en résulte que $B \otimes_A k = L$, ce qui équivaut à dire que $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \otimes_A B$. Rappelons qu'on a associé à A dans IV.1.1.d une k-algèbre graduée :

$$gr^{\mathfrak{m}}(A) = \oplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}.$$

On en déduit donc :

$$gr^{\mathfrak{m}}(A) \otimes_k L = gr^{\mathfrak{n}}(B).$$

Il est donc évident d'après le théorème IV.6 que A est régulier si et seulement si B est régulier. Cela prouve la proposition (et le cas des hypothèses respectives réduit, normal résultent des rappels de la remarque IV.4). □

Remarque V.4. — Si $f : Y \to X$ est étale surjectif, il est fidèlement plat d'après ce qui précède. On a donc déjà obtenu la partie réciproque du corollaire précédent dans ce cas (*cf.* IV.15).

Tout comme il y a une dualité évidente entre les morphismes nets et séparés, il y a une dualité entre les morphismes finis et les morphismes étales qu'on illustre par la proposition suivante :

Proposition V.9. — *Considérons un diagramme commutatif de schémas*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & X. \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Alors :

- *Si p est séparé : q fini (resp. séparé) implique f fini (resp. séparé).*

(2) Dû à Grothendieck évidemmment, comme toute la théorie rappelée ici.

- *Si p est net : q étale (resp. net) implique f étale (resp. net).*

Démonstration. — La preuve est très facile une fois qu'on a remarqué que f admet la factorisation suivante :

$$Y \xrightarrow{\gamma_f} Y \times_S X \xrightarrow{\pi} X$$

où γ_f est le graphe de f et π la projection canonique. En effet, on peut considérer les carrés cartésiens suivants :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\gamma_f"] \arrow[d] & Y \times_S X \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\delta"] & X \times_S X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \times_S X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "q"] & S. \end{tikzcd}$$

où δ est le morphisme diagonal de X/S. On conclut alors aisément. □

Un morphisme à la fois étale et fini est appelé un *revêtement étale.*[3]

4. Morphismes lisses

V.4.0.g. — Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}})$ et on l'appelle l'*espace affine* de dimension n. Si X est un schéma quelconque, on pose encore $\mathbb{A}^n_X = \mathbb{A}^n \times X$, munit de sa projection canonique $p : \mathbb{A}^n_X \to X$.

Définition V.5. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas de type fini.

Soit y un point de Y. On dit que f est *lisse en y* si il existe un voisinage ouvert V de y dans Y et un X-morphisme étale $V \to \mathbb{A}^n_X$.

On dit que f est *lisse* s'il l'est en tous points de Y.

Si f est le spectre d'un morphisme d'anneau $A \to B$, on dit encore que B est une A-algèbre lisse de type fini si f est lisse de type fini.

V.4.0.h. — Un morphisme étale est évidemment lisse. De plus, un morphisme de type fini est étale si et seulement si il est lisse et quasi-fini.

Un morphisme lisse est plat, compte tenu de V.7 et du fait trivial que $\mathbb{A}^n_X$ est plat sur X.

On voit facilement que les morphismes lisses sont stables par changement de base, composition et produit fibré.

Notons enfin que, combinant le corollaire V.8.2 et la remarque IV.14, on obtient :

Proposition V.10. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme lisse de type fini. Si Y est régulier (resp. réduit, normal) alors Y est régulier (resp. réduit, normal)*

V.4.0.i. — Considérons un schéma régulier S. On note $\mathscr{L}_S$ la catégorie des *S-schémas lisses séparés de type fini.* Cette catégorie possède de bonnes propriétés, que l'on peut comparer par exemple à celles qu'on a dégagées pour la catégorie des A-modules.

Elle possède bien sûr des sommes finies et des produits fibrés, et tous ses objets sont des schémas réguliers ; mais ce sont surtout les foncteurs qui les relient qui vont nous intéresser. Soit $f : T \to S$ un morphisme de schémas réguliers. Alors, on obtient un foncteur de changement de base :

$$f^* : \mathscr{L}_S \to \mathscr{L}_T, (X/S) \mapsto (X \times_S T/T).$$

Si f est lisse séparé de type fini, on obtient un foncteur de restriction :

$$f_\sharp : \mathscr{L}_T \to \mathscr{L}_S, (X \to T) \mapsto (X \to T \xrightarrow{f} S).$$

[3] La notion de revêtement étale a fondée en quelque sorte la refonte de la géométrie algébrique effectuée par Grothendieck. Son étude est axiomatisée dans la théorie du *groupe fondamental.*

Notons que les propriétés suivantes, analogues de celles énoncées dans le paragraphe III.2.0.d, sont immédiates à partir de la propriété universelle des produits fibrés :

1. $\mathrm{Hom}_T(Y, f^*X) = \mathrm{Hom}_S(f_\sharp Y, X)$ – $f_\sharp$ adjoint à gauche de f^*.
2. $f_\sharp(f^*X \times_T Y) = X \times_S (f_\sharp Y)$.
3. Considérons un carré cartésien de schémas
$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & S' \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "p"] & S. \end{tikzcd}$$
tel que p est lisse séparé de type fini. Alors, $f^*p_\sharp(Y) = q_\sharp g^*(Y)$.

V.4.0.j. — Soit S un schéma régulier et $f : Y \to X$ dans $\mathscr{L}_S$. Comme X/S est séparé, le morphisme graphe associé à f
$$\gamma_f : Y \to Y \times_S X$$
est une immersion fermée. On note Γ_f son image dans $Y \times_S X$, vu comme un sous-schéma fermé. Notons qu'il résulte de cette définition que le morphisme composée
$$\Gamma_f \xrightarrow{\gamma} Y \times_S X \xrightarrow{p^Y_{YX}} Y \tag{V.3}$$
est un isomorphisme. Donc Γ_f est un S-schéma lisse, par suite régulier et même réduit.

Proposition V.11. — *Dans les conditions précédentes, pour tout fermé irréductible Z de X,*
$$\mathrm{codim}_X(Z) \geq \mathrm{codim}_Y(Z \times_X Y).$$
De plus, il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si les cycles $\langle Z\rangle$ et $\langle \Gamma_f\rangle$ de $Y \times_S X$ s'intersectent proprement.

Démonstration. — Considérons le diagramme formé de carrés cartésiens :
$$\begin{tikzcd} Y \times_X Z \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \Gamma_f \times_X Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \times_S Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "i"] \\ Y \arrow[r, "\sim", "(1)"'] & \Gamma_f \arrow[r, "\gamma"] & Y \times_S X \arrow[r, "p^X_{YX}"] & X \end{tikzcd}$$
où la flèche (1) est l'isomorphisme réciproque de (V.3), et i l'immersion canonique.

Notons que puisque Y/S est plat (*cf.* paragraphe V.4.0.h), on déduit de la proposition II.17 l'égalité :
$$\mathrm{codim}_X(Z) = \mathrm{codim}_{Y \times_S X}(Y \times_S Z).$$
Le diagramme montre en particulier que $Y \times_X Z = (X \times_S Z) \cap \Gamma_f$, l'intersection étant prise dans $Y \times_S X$. On déduit donc de la proposition IV.16 l'inégalité :
$$\mathrm{codim}_{Y \times_S X}(Y \times_S Z) \leq \mathrm{codim}_{Y \times_S X}(Y \times_S Z) - \mathrm{codim}_{Y \times_S X}(\Gamma_f). \tag{V.4}$$
Or $Y \times_S X$ est régulier, donc il est caténaire (voir remarque IV.14). On en déduit l'égalité suivante :
$$\mathrm{codim}_{Y \times_S X}(\Gamma_f \times_X Z) = \mathrm{codim}_{Y \times_S X}(\Gamma_f) + \mathrm{codim}_{\Gamma_f}(\Gamma_f \times_S Z).$$
Or le diagramme précédent montre que $\mathrm{codim}_{\Gamma_f}(\Gamma_f \times_S Z) = \mathrm{codim}_Y(Z \times_S Y)$. Ainsi, l'inégalité V.4 permet de montrer l'inégalité de la proposition et la dernière assertion en résulte. □

V.4.0.k. — Dans la définition qui suit, et surtout dans la section sur les correspondances, on omettra le signe $\times_S$ dans les produits cartésiens de la catégorie $\mathscr{L}_S$. De plus, on notera conventionnellement p^Y_{XY} le morphisme de projection canonique de XY sur Y.

Définition V.6. — Considérons un morphisme $f : Y \to X$ dans $\mathscr{L}_S$.

Soit $\alpha = \sum_{i \in I} n_i \langle Z_i \rangle_X$ un cycle de X sous forme normale. On dit que le pullback de α par f est propre si pour tout indice $i \in I$,

$$\operatorname{codim}_X(Z_i) = \operatorname{codim}_Y(Z_i \times_X Y).$$

Sous cette condition, on définit le pullback de α suivant f comme le cycle de X suivant :

$$f^*(\alpha) = p^Y_{YX*}\left(\langle \Gamma_f \rangle_{YX} . p^{X*}_{YX}(\alpha)\right).$$

Remarque V.5. — Le cycle intersection apparaissant dans la définition est à support dans Γ_f et l'on sait que la restriction de p^Y_{YX} à Γ_f est un isomorphisme. L'image directe de cette définition est donc purement formelle : elle ne change donc pas les multiplicités du cycles intersection.

On déduit grâce au corollaire IV.19.1 et aux formules la proposition suivante :

Proposition V.12. — *Considérons un anneau régulier A et posons $S = \operatorname{Spec}(A)$. Soit $\rho : B \to C$ un morphisme de A-algèbres lisses de type fini, $f : Y \to X$ le morphisme de S-schémas associé.*

Soit M un B-module de type fini. On note Z (resp. T) le support dans M (resp. $M \otimes_B C$). Considérons un entier $p \geq 0$ telle que les inégalités suivantes ont lieu :

(V.5) $$\operatorname{codim}_X(Z) \geq p, \quad \operatorname{codim}_Y(T) \geq p.$$

Alors, on obtient les propriétés suivantes :

1. *Le complexe de C-modules $M \otimes^{\mathbf{L}}_B C$ est parfait.*
2. *Le pullback de $z^p(M)$ le long de f est propre.*
3. $f^*(z^p(M)) = z^p(M \otimes^{\mathbf{L}}_B C)$.

Démonstration. — La propriété 1 résulte du fait que B est régulier, donc de dimension cohomologique globale finie (*cf.* IV.14.3) – cela implique que M admet une résolution bornée par des B-modules projectifs que l'on peut supposer de type fini.

Introduisons quelques notations afin de calculer le membre de gauche apparaissant dans le point 3. Notons $D = C \otimes_A B$, de sorte que $\operatorname{Spec}(D) = YX$. Le morphisme graphe de f est alors le spectre du morphisme suivant :

$$D = C \otimes_A B \to C, c \otimes_A b \mapsto c\rho(b).$$

Si l'on note I le noyau de ce morphisme, $\Gamma_f = \operatorname{Spec}(D/I)$. Notons que le morphisme canonique $C \to D/I$ est un isomorphisme

Puisque Y est régulier, il est somme disjointe de ses composantes irréductibles et par additivité, on peut supposer que Y est intègre, autrement dit C est intègre. Il en résulte que Γ_f est intègre. Soit q sa codimension dans YX.

Si l'on pose $N = D/I$, vu comme un D-module de type fini, on obtient par définition :

$$f^*(z^p(M)) = p^Y_{YX*}(z^q(N).z^p(M \otimes_B D)).$$

On se trouve alors dans les conditions d'application du corollaire IV.19.1. Cela implique donc le point 2, d'après la proposition V.11. Par ailleurs, on obtient d'après cette même proposition :

$$z^q(N).z^p(M \otimes_B D) = z^{p+q}(N \otimes^{\mathbf{L}}_D (M \otimes_B D)).$$

Or, dans la catégorie dérivée $\mathsf{D}(B)$, on obtient :

$$N \otimes^{\mathbf{L}}_D (M \otimes_B D)|_B = N|_B \otimes^{\mathbf{L}}_B M = C|_B \otimes^{\mathbf{L}}_B M.$$

Par ailleurs, le foncteur de restriction $\mathsf{D}(C) \to \mathsf{D}(B)$ est conservatif. On en déduit donc un isomorphisme :

$$N \otimes^{\mathbf{L}}_D (M \otimes_B D)|_C = C \otimes^{\mathbf{L}}_B M = M \otimes^{\mathbf{L}}_B C.$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme IV.21 pour conclure. □

Corollaire V.12.1. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme dans $\mathscr{L}_S$. Si f est plat, tout cycle de X a un pullback propre suivant f est ce pullback coincide avec le pullback plat (cf. II.26).*

V.4.0.l. — On en déduit aussi, suivant la méthode déjà vue dans le cours précédent, les formules suivantes lorsqu'elles sont bien définies :

1. $f^*(\alpha.\beta) = f^*(\alpha).f^*(\beta)$.
2. $g^* f^*(\alpha) = (fg)^*(\alpha)$.
3. Si le support de α est fini relativement à f, $f_*(\alpha.f^*(\beta)) = f_*(\alpha).\beta$.
4. Pour tout carré cartésien dans $\mathscr{L}_S$

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "p"] & X, \end{tikzcd}$$

si le support de α est fini relativement à f, $p^* f_*(\alpha) = g_* q^*(\alpha)$.

5. Propriétés topologiques

Définition V.7. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas.

On dit que f est dominant si l'ensemble $f(Y)$ est dense dans X. On dit que f est pseudo-dominant si pour toute composante irréductible T de Y, $f(T)$ est dense dans une composante irréductible de X.

Remarque V.6. — On peut traduire ces conditions en termes de points :

– f est dominant si $X^{(0)}$ est dans l'image de f.

– f est pseudo-dominant si $f\left(Y^{(0)}\right) \subset X^{(0)}$, ce qui équivaut à dire que $Y^{(0)} \subset f^{-1}\left(X^{(0)}\right)$.

Le lemme II.16 montre en particulier que tout morphisme plat est pseudo-dominant.

Notons le lemme facile suivant :

Lemme V.13. — *Soit $\rho : A \to B$ un morphisme d'anneaux, et $f : Y \to X$ le morphisme de schémas associé. Soit $\mathfrak{a}$ le noyau de ρ. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est dominant.*

(ii) *$\mathfrak{a}$ est inclut dans le nilradical de A.*(4)

En particulier, si A est réduit, (i) est encore équivalente à :

(ii') ρ est injectif.

Démonstration. — Rappelons que $Y = V(0_B)$. Or, $\overline{f(V(0_B))} = V(f^{-1}(0_B)) = V(\mathfrak{a})$. Comme $X = V(0_A)$, on conclut d'après le point 5 de la proposition II.1. □

Définition V.8. — Soit $f : Y \to X$.

On dit que f est *fermé* (resp. *ouvert*) si pour toute partie fermée (resp. ouverte) E de Y, l'image $f(E)$ est fermée (resp. ouverte) dans X. On dit que f est *universellement fermé* (resp. *universellement ouvert*) si pour tout morphisme de schémas $X' \to X$, le morphisme induit $Y \times_X X' \to X'$ est fermé (resp. ouvert).

On dit que f est *propre* si f est de type fini, séparé et universellement fermé.

(4) rappel : il s'agit du radical de 0 dans A, ou encore l'ensemble des éléments nilpotents de A – *cf.* II.2.

On vérifie facilement que les morphismes universellements fermés (resp. universellement ouverts) sont stables par composition, changement de base et produits. Des propriétés analogues des morphismes séparés de type fini, on déduit que les morphismes propres satisfont les mêmes propriétés de stabilité.

Exemple V.1. — Une immersion ouverte (resp. fermée) est universellement ouverte (resp. propre).

En utilisant la même démonstration que pour la proposition V.9, l'exemple précédent donne la proposition suivante :

Proposition V.14. — *Considérons un diagramme commutatif de schémas (noethériens)*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & X. \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Alors :
- Si p est séparé : q propre implique f propre.

On a déjà vu qu'un morphisme fini f est séparé (note de bas de page (1) page 3) que f est séparé. On obtient en fait la propriété plus forte suivante :

Proposition V.15. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas.*
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *f est fini.*

(ii) *f est propre quasi-fini.*

Démonstration. — (ii) $\Rightarrow$ (i) : C'est une conséquence du « Main Theorem » de Zariski : d'après celui-ci, f admet une factorisation sous la forme

$$Y \xrightarrow{j} \bar{Y} \xrightarrow{\bar{f}} X$$

où j est une immersion ouverte et $\bar{f}$ un morphisme fini. Or la proposition précédente implique que j est propre ; c'est donc une immersion fermée, soit un morphisme fini ce qui conclut.
(i) $\Rightarrow$ (ii) : Le morphisme f étant de type fini, et séparé d'après de point rappelé en préambule à la proposition, il suffit de montrer qu'il f est propre.

Soit T une partie fermée de Y, munie de sa structure réduite. Posons $Z = \overline{f(T)}$, vu comme sous-schéma fermé de X muni de sa structure réduite. Le morphisme induit $f_0 : Z \to T$ par f est encore fini d'après V.9 et il suffit de montrer que f_0 est surjectif.

Cette dernière condition est locale en T. Comme f_0 est fini, on peut supposer que Z et T sont affine, et f_0 est le spectre d'un morphisme fini $\rho : A \to B$. Comme A est réduit et f_0 est dominant, ρ est injectif (lemme V.13). Le fait que f_0 est surjectif est donc un cas particulier du théorème de Cohen-Seidenberg (*cf.* [**Bou83**, V, §2, n$^{\text{o}}$ 1, th. 1]) – puisque fini implique entier. □

V.5.0.m. — Soit X un schéma. Rappelons qu'on a mis une relation d'ordre partielle sur les points de X (*cf.* II.1.3.b). Notons une propriété caractéristique de cette relation : si E est une partie ouverte (resp. fermée) de X, pour tout $x \leq x'$ (resp. $x \geq x'$), $x \in E$ implique $x' \in E$.

Si x est un point de X, on a défini l'anneau local de X en x en considérant un voisinage ouvert affine $\mathrm{Spec}(A)$ de x dans X, et en posant $\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier de A correspondant à x. Du morphisme canonique $A \to A_{\mathfrak{p}}$ et de l'immersion ouverte choisie $\mathrm{Spec}(A) \to X$, on déduit un morphisme de schémas :

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X. \tag{V.6}$$

On peut vérifier que ce morphisme ne dépend pas du choix de Spec(A). Par ailleurs, son image est formée des générisations de x ; autrement dit, c'est l'ensemble :

$$\{x' \in X \mid x' \geq x\}.$$

On dit que le schéma local Spec$(\mathcal{O}_{X,x})$ est le *schéma localisé* de X en x. On le notera encore parfois $X_{(x)}$.(5)

Considérons un morphisme de schémas $f : Y \to X$. Alors, f respecte la relation d'ordre sur les ensembles de points sous-jacents. De plus, considérant un point $y \in Y$ et $x = f(y)$, le morphisme induit (*cf.* définition II.9)

$$\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

définit un diagramme commutatif de schémas :

$$\begin{tikzcd} Y_{(y)} \arrow[r, "f_y"] \arrow[d] & X_{(x)} \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

A l'aide de ce jeu sur l'ordre des points d'un schéma, on peut déduire une partie de la proposition suivante :

Proposition V.16. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme. Considérons les conditions suivantes :*

(i) *f est ouvert.*

(ii) *Pour tout $y \in Y$, $x = f(y)$, le morphisme induit $Y_{(y)} \to X_{(x)}$ est surjectif.*

(iii) *Pour tout fermé irréductible Z de X, $f^{-1}(Z) \to Z$ est pseudo-dominant.*

Alors, (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). De plus, (i) implique les autres conditions. La réciproque est vraie si f est de type fini.

Voir [**1.10.4**, EGA4]. L'implication difficile est : (ii) et (iii) impliquent (i) ; cela résulte du théorème de constructibilité de Chevaley. On donne ci-dessous la preuve des autres implications pour illustration.

Démonstration. — Notons que d'après le préambule à la proposition, la condition (ii) se traduit formellement comme suit :

(ii') $\forall y \in Y, \forall x' \geq f(y), \exists y' \in Y | y' \geq y,\ f(y') = x'$.

(i) $\Rightarrow$ (ii') : soit $y \in Y$ et $x' \geq f(y)$. Soit V un voisinage ouvert affine de y dans Y. Alors, $f(V)$ est ouvert dans X, et contient $f(y)$; par suite, il contient nécessairement x' d'après le préliminare à la proposition, ce qui conclut.
(ii') $\Rightarrow$ (iii) : On considère $Z = \overline{\{x\}} \subset X$. Soit y un point générique de $f^{-1}(Z)$. Alors, $f(y) \in Z$, ce qui implique $f(y) \leq x$. D'après (ii'), il existe $y' \in Y$ tel que $y' \geq y$ et $f(y') = x$. Comme y est maximal dans $f^{-1}(Z)$, $y = y'$ ce qui conclut.
(iii) $\Rightarrow$ (ii') : Soit $y \in Y$ et $x' \geq f(y)$. On pose $Z = \overline{\{x'\}}$. Alors, y appartient à $f^{-1}(Z)$. Soit y' le point générique de la composante irréductible de $f^{-1}(Z)$ contenant y. D'après (iii), $f(y') = x'$ ce qui conclut. $\square$

Remarque V.7. — On a déjà vu une preuve de (ii) $\Rightarrow$ (iii) cachée dans la preuve du lemme II.16 : un morphisme plat satisfait (ii) et (iii). D'ailleurs, (ii) est donné précisément par la proposition II.11. Un morphisme plat de type fini est donc ouvert, et même universellement ouvert.

(5) On peut remarquer que le morphisme (V.6) est un monomorphisme de schémas et un homéomorphisme sur son image. C'est encore une limite projective d'immersion ouverte.

Un théorème clé dans la théorie des correspondances finies que nous allons présenter est le suivant :

Théorème V.17. — *Soit X un schéma régulier, et $f : Y \to X$ un morphisme fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est pseudo-dominant.*

(ii) *f est ouvert.*

(iii) *f est universellement ouvert.*

De plus, lorsque ces conditions sont satisfaites, pour tout fermé irréductible Z de X, toute composante irréductible T de $f^{-1}(Z)$ domine Z et vérifie l'égalité :

$$\mathrm{codim}_X(Z) = \mathrm{codim}_Y(T).$$

On va faire appel au résultat suivant :

Lemme V.18. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de type fini de schémas (noethériens). Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f est universellement ouvert.*

(b) *Pour tout entier $n \geq 0$, le morphisme $f \times \mathbb{A}^n : \mathbb{A}^n_Y \to \mathbb{A}^n_X$ est ouvert*

Ce lemme résulte des méthodes de passage à la limite projective développée dans [**EGA4**, §8] ; elle est expliquée dans la remarque [**EGA4**, (14.3.3.1), (i)]).

Démonstration. — Le fait que (iii implique (ii) et que (ii) implique (i) est évident.

Il suffit donc de montrer que (i) $\Rightarrow$ (iii). D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que pour tout $n \geq 0$, le morphisme $f \times \mathbb{A}^n : \mathbb{A}^n_Y \to \mathbb{A}^n_X$ est ouvert. Or ce morphisme est encore fini pseudo-dominant. On est donc ramené à prouver l'implication : (i) $\Rightarrow$ (ii).

Pour cela, on utilise le critère (ii) de la proposition V.16. Soit y un point de Y, $x = f(y)$, et montrons que $Y_{(y)} \to X_{(x)}$ est surjectif. Quitte à faire un changement de base le long de $X_{(x)} \to X$, on peut pour cela supposer que X est un schéma local de point fermé x. Alors, $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau local régulier, donc en particulier, normal. Soit T une composante irréductible de Y contenant y. Il suffit de démontrer que $T_{(y)} \to X_{(x)}$ est surjectif. Or, par hypothèse, T est fini dominant sur X, donc T est affine et le morphisme $T \to X$ induit par f correspond à un morphisme injectif fini $\rho : A \to B$ avec B intègre. On doit montrer que pour l'idéal premier $\mathfrak{q}$ correspondant à y, le morphisme $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{q}) \to \mathrm{Spec}(A)$ est surjectif. Or cela résulte du second théorème de Cohen-Seidenberg (*cf.* [**Bou83**, V, §2, n° 4, th. 3]). Notons qu'on obtient au passage que $\dim(B_\mathfrak{q}) = \dim(A)$, ce qui prouve la dernière assertion. □

Remarque V.8. —

1. Ainsi, un morphisme fini pseudo-dominant sur un schéma régulier partage une partie des bonnes propriétés des morphismes plats que nous avons déjà utilisées (pour définir le pullback plat des cycles). Nous utiliserons particulièrement le fait qu'un tel morphisme reste pseudo-dominant après tout changement de base.
2. Dans le théorème précédent, il suffit que X soit géométriquement unibranche. On dit qu'un schéma X est *géométriquement unibranche* si pour tout point $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre et sa normalisation est un anneau intègre.
3. Pour illustrer le point précédent, donnons l'exemple suivant : soit D_1 (resp. D_2) la droite d'équation $\{x = 0\}$ ($\{y = 0\}$) dans l'espace affine $\mathrm{Spec}(k[x, y])$ sur un corps k (ou un anneau). On pose $X = D_1 \cup D_2 = \mathrm{Spec}(k[x, y]/(xy))$, $Y = D_1 \sqcup D_2$. Le morphisme évident $Y \to X$ est fini et pseudo-dominant. Pourtant, $Y \times_X Y = D_1 \sqcup D_2 \sqcup D_1 \cap D_2 \sqcup D_2 \cap D_1$ n'est pas pseudo-dominant sur Y, puisque $D_1 \cap D_2 = \{(0, 0)\}$. Evidemment, X n'est pas géométriquement unibranche.

Références

[Bou83] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4 - Chapitres 5 à 7 - Chapitres 8 et 9*, Masson, 1985 - 1985 - 1983.

[Ray70] M. Raynaud – *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 169, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

2009-2010

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* `deglise@math.univ-paris13.fr`
Url : `http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/`