Table des matières

COURS VI
CORRESPONDANCES FINIES

Introduction

Dans ce cours, on introduit la catégorie des correspondances finies $\mathscr{L}_S^{cor}$ sur un schéma régulier S. Cette catégorie est obtenue en enrichissant la catégorie $\mathscr{L}_S$ des S-schémas lisses séparés de type fini. Une différence notable entre ces deux catégories est que la première est additive.

Mais nous verrons par ailleurs que l'on peut étendre les opérations vues dans le paragraphe V.4.0.i au contexte de la catégorie $\mathscr{L}_S^{cor}$.

1. Définition

Fixons un schéma régulier S.

Définition VI.1. — Soient X, Y des schémas dans $\mathscr{L}_S$. Une S-correspondance finie de X vers Y est un cycle $\alpha = \sum_{i \in I} n_i.x_i$ de $X \times_S Y$ tel que pour tout indice $i \in I$ vérifiant $n_i \neq 0$, x_i est envoyé sur un point générique de X par la projection évidente.

On note $c_S(X, Y)$ le groupe des S-correspondances finies de X vers Y.

On représentera une telle correspondance par le symbole

$$\alpha : X \bullet\!\!\rightarrow Y.$$

Exemple VI.1. — Considérons un morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathscr{L}_S$.

1. Puisque X/S est séparé, le graphe Γ_f de f est fermé dans $X \times_S Y$ (*cf.* V.3). De plus, le morphisme composé $\Gamma_f \to X \times_S Y \to X$ est un isomorphisme (*cf.* V.4.0.j). Il en résulte que le cycle associé $\langle \Gamma_f \rangle_{XY}$ est une correspondance finie.
2. Supposons que f soit fini pseudo-dominant. Le morphisme composé $\Gamma_f \to X \times_S Y \to Y$ est isomorphe à f, donc il est fini et pseudo-dominant. Il en résulte que le cycle $\langle \Gamma_f \rangle_{YX}$ est une correspondance finie de Y vers X. On la notera ${}^t f$ est on l'appellera la *transposée* de f.

2. Composition

VI.2.0.a. — On fixe à nouveau un schéma régulier S.

Pour simplifier les formules qui vont venir, on va adopter les conventions suivantes :

– Pour des S-schémas X et Y dans $\mathscr{L}_S$, on pose $XY = X \times_S Y$.

– Pour des S-schémas X, Y, Z dans $\mathscr{L}_S$, on note $p^Y_{XYZ} : XYZ \to Y$ le morphisme de projection canonique.

Notons pour la suite le lemme facile :

Lemme VI.1. — *Considérons un diagramme commutatif de morphismes de type fini*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

tel que T est intègre, q est fini et f est fini dominant.

Alors, p est fini.

Démonstration. — Considérons un ouvert affine non vide $U = \mathrm{Spec}(A)$ de X. Comme p est de type fini, $p^{-1}(U)$ est une réunion finie d'ouverts affines, et il suffit de montrer que pour un tel ouvert $V = \mathrm{Spec}(B)$, B est une A-algèbre finie.

Comme f est fini, $f^{-1}(V)$ est une réunion finie d'ouverts affines ; f étant de plus dominant, il existe donc un ouvert affine $W = \mathrm{Spec}(C)$ de Z tel que $W \to V$ est fini dominant.

On est donc ramené au diagramme suivant de morphismes d'anneaux :

$$\begin{tikzcd} C & & B; \arrow[ll, "\rho"'] \\ & A \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

comme W/V est dominant et V réduit, ρ est injectif (*cf.* V.13). Comme q et f sont finis, C est une A-algèbre finie et une B-algèbre finie. On en déduit que nécessairement, B est une A-algèbre finie ce qui conclut. □

VI.2.0.b. — Considérons des correspondances finies :

$$X \overset{\alpha}{\bullet\!\!\longrightarrow} Y, \; Y \overset{\beta}{\bullet\!\!\longrightarrow} Z.$$

On veut définir le produit de composition de β avec α par la formule suivante :

$$\beta \circ \alpha = p^{XZ}_{XYZ*}\left(p^{YZ*}_{XYZ}(\beta).p^{XY*}_{XYZ}(\alpha)\right). \tag{VI.1}$$

On utilise la définition II.26 pour les pullback par les morphismes plats p^{YZ}_{XYZ} et p^{XY}_{XYZ} et le produit d'intersection est considéré dans le schéma régulier XYZ. Si les supports de $p^{YZ*}_{XYZ}(\beta)$ et $p^{XY*}_{XYZ}(\alpha)$ ne se coupent pas, on convient que $\beta \circ \alpha = 0$.

Deux problèmes se posent dans cette formule :

1. L'intersection dans le membre de droite est-elle propre ?
2. Le support du cycle de XZ obtenu dans le second membre est-il fini et pseudo-dominant sur X ?

Pour résoudre ces deux problèmes, il suffit de considérer le cas où $\alpha = \langle U \rangle_{XY}$ et $\beta = \langle V \rangle_{YZ}$ pour des sous-schémas U et V respectivement fermés intègres dans XY et YZ. Soit m (resp. n) la codimension de U dans XY (resp. V dans YZ).

On introduit le diagramme de schémas suivant

$$\begin{tikzcd} U \times_Y V \arrow[r] \arrow[d, "q'"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & V \arrow[r] \arrow[d, "q"] & Z \\ U \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & Y & \\ X & & \end{tikzcd}$$

dans lequel le carré (1) est cartésien.

On considère le premier problème soulevé par la formule (VI.1). Or, d'après la définition du changement de base plat (*cf.* II.26), $p_{XYZ}^{XY*}(\alpha) = \langle UZ\rangle_{XYZ}$ et $p_{XYZ}^{YZ*}(\beta) = \langle XV\rangle_{XYZ}$. Notons que le sous-schéma intersection $UZ \cap XV$ est isomorphisme à $U \times_Y V$.

Comme X et Z sont plats sur S (*cf.* V.4.0.h), on déduit de la proposition II.17 les égalités suivantes :

$$\operatorname{codim}_{XYZ}(UZ) = \operatorname{codim}_{XY}(U) = m.$$
$$\operatorname{codim}_{XYZ}(XV) = \operatorname{codim}_{YZ}(V) = n.$$

Notons aussi que XV est de codimension pure n dans XYZ.

On décompose le carré (1) en deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} U \times_Y V \arrow[r] \arrow[d, "q'"'] & XV \arrow[r] \arrow[d, "q''"'] & V \arrow[d, "q"] \\ U \arrow[r, "i"] & XY \arrow[r, "p_{XY}^{Y}"] & Y \end{tikzcd}$$

où l'on a noté i l'immersion fermée canonique. Or, q est fini pseudo-dominant, donc il résulte du théorème V.17 qu'il est universellement ouvert. En particulier, q'' est encore universellement ouvert. On déduit donc du théorème V.17 que pour toute composante irréductible W de $U \times_Y V$,

$$\operatorname{codim}_{XV}(W) = \operatorname{codim}_{XY}(U) = m.$$

Or, XYZ est régulier, donc en particulier caténaire (*cf.* IV.14). Par définition d'un schéma caténaire (*cf.* II.18), on en déduit l'égalité suivante :

$$\operatorname{codim}_{XYZ}(W) = \operatorname{codim}_{XYZ}(XV) + \operatorname{codim}_{XV}(W) = n + m$$

où l'on a utilisé que XV est *purement* de codimension n dans XYZ. Autrement dit, les cycles $\langle XV\rangle$ et $\langle UZ\rangle$ s'intersectent proprement, et le premier problème est résolu.

Considérons maintenant le deuxième point. Soit W une composante irréductible de $U \times_Y V$. On introduit les morphismes composés suivants :

$$q_W : W \to U \xrightarrow{p} X$$
$$f : W \to XYZ \xrightarrow{p_{XYZ}^{XZ}} XZ$$

Par hypothèse, p et q sont finis et pseudo-dominants. Le théorème V.17 déjà cité implique que q' est fini et pseudo-dominant. On en déduit que q_W est fini et pseudo-dominant (*i.e.* W est surjectif sur une composante irréductible de X). Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q_W"'] & & XZ. \arrow[dl, "p_{XZ}^{X}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Or, p_{XZ}^X est séparé ; il résulte donc de la proposition V.9 que le morphisme f est fini. D'après la proposition V.15, la partie $T = f(W) = p_{XYZ}^{XZ}(W)$ de XZ est fermée. Si on la munie de sa structure réduite de sous-schéma, et si l'on applique le lemme VI.1 au diagramme commutatif obtenu par corestriction de f

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q_W"'] & & T \arrow[dl, "p_T"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

on obtient que p_T est fini. Notons que T est intègre ; puisque q_W est surjectif sur une composante irréductible de X, il en est de même de p_T.

Revenant maintenant à la définition du pushout p_{XYZ*}^{XZ}, on obtient que le support du membre de droite de (VI.1) est réunion des fermés de la forme $T = p_{XYZ}^{XZ}(W)$ où W est une composante irréductible de $U \times_Y V$. On peut donc conclure finalement que ce support est fini et pseudo-dominant.

Définition VI.2. — Avec les notations qui précèdent, on définit la correspondance finie composée de β et α comme le cycle $\beta \circ \alpha$ de $X \times_S Z$ définit par la formule (VI.1).

Le produit de composition des correspondances finies fait donc intervenir un calcul de multiplicité qui utilise la formule des Tor (*cf.* definition IV.10) de Serre. Suivant la méthode de Serre, on exprime (dans le cas affine) ce produit de composition à l'aide des modules comme suit :

Proposition VI.2. — *Supposons que* $S = \mathrm{Spec}(A)$ *est un schéma affine régulier.*

Considérons des A*-algèbres lisses de type fini* B, C *et* D *et posons* $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(C)$, $Z = \mathrm{Spec}(D)$.

Soit M *un* $B \otimes_A C$*-module (resp.* N *un* $C \otimes_A D$*-module) et* m *(resp.* n*) un entier naturel tel que le cycle* $\alpha = z^m_{XY}(M)$ *(resp.* $\beta = z^n_{YZ}(N)$*) soint un élément de* $c_S(X, Y)$ *(resp.* $c_S(Y, Z)$*).*

Alors,

$$\beta \circ \alpha = p^{XZ}_{XYZ*}\left(z^{n+m}_{XYZ}(N \otimes^{\mathbf{L}}_B M)\right)$$

où M *et* N *sont vus comme des* B*-modules par restriction des scalaires, le complexe* $N \otimes^{\mathbf{L}}_B M$ *est vu comme un complexe de* $B \otimes_A C \otimes_A D$*-modules.*

Remarque VI.1. — Considérant les notations de VI.2.0.b sous les hypothèses de cette proposition, l'égalité précédente exploite donc le fait géométrique $U \times_Y V = XV \cap UZ$ – le schéma U (resp. V) étant le support de α (resp. β).

Démonstration. — Notons BCD le produit tensoriel des A-algèbres B, C et D. Appliquant le corollaire IV.19.1 à l'intersection des cycles $z^n_{XYZ}(B \otimes_A N)$ et $z^m_{XYZ}(M \otimes_A D)$, on obtient

$$\beta \circ \alpha = p^{XZ}_{XYZ*}\left(z^{n+m}\left((B \otimes_A N) \otimes^{\mathbf{L}}_{BCD} (M \otimes_A D)\right)\right)$$

où l'on a posé BCD le produit tensoriel évident. Dès lors, la proposition résulte de la version dérivée des formules (III.2.0.d) – rappelons que B et D sont des A-algèbres plates. □

Proposition VI.3. —

1. *Considérons des correspondances finies :*

$$X \overset{\alpha}{\bullet\!\!\longrightarrow} Y \overset{\beta}{\bullet\!\!\longrightarrow} Z \overset{\gamma}{\bullet\!\!\longrightarrow} T.$$

   Alors, $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$.

2. *Considérons un morphisme* $f : X \to Y$ *de* $\mathscr{L}_S$ *et* $\langle \Gamma_f \rangle$ *la correspondance finie de* X *vers* Y *qui lui est associée dans l'exemple VI.1. Alors, pour tout correspondance finie* $\beta : Y \bullet\!\!\longrightarrow Z$*, le pullback de* β *par* $f \times_S Z$ *est propre et on a l'égalité :*

$$\beta \circ \langle \Gamma_f \rangle = (f \times_S Z)^*(\beta)$$

   avec les notations de la définition V.6.

3. *Pour toute* S*-correspondance finie* $\alpha : X \bullet\!\!\longrightarrow Y$ *et tout morphisme* $g : Y \to Z$ *dans* $\mathscr{L}_S$*, on obtient :*

$$\langle \Gamma_g \rangle_{YZ} \circ \alpha = (g \times_S X)_*(\alpha)$$

   avec les notations de l'exemple VI.1 appliqué à g.

Démonstration. — On considère le premier point. Posons $\alpha' = p^{XY*}_{XYZT}(\alpha)$, $\beta' = p^{YZ*}_{XYZT}(\beta)$, $\gamma' = p^{ZT*}_{XYZT}(\gamma)$. Alors, utilisant la formule de changement de base de la proposition II.18, la compatibilité du changement de base plat avec le produit d'intersection (paragraphe IV.2.0.d) et la formule de projection du corollaire IV.21.1, on obtient l'égalité :

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = p^{XT}_{XYZT*}\left(\gamma'.(\beta'.\alpha')\right).$$

Mais par ailleurs, les mêmes formules permettent d'écrire :

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = p^{XT}_{XYZT*}\left((\gamma'.\beta').\alpha'\right).$$

Ainsi, l'associativité du produit d'intersection (*cf.* IV.20). permet de conclure.

Le point 2 résulte de la définition du pullback par un morphisme dans $\mathscr{L}_S$ et du fait que

$$p^{XY*}_{XYZ}(\langle \Gamma_f \rangle) = \langle \Gamma_{f \times_S Z} \rangle$$

où $\Gamma_{f\times_S Z}$ désigne le schéma graphe du Z-morphisme $f \times_S Z$.

Considérons le dernier point. On peut supposer que $\alpha = \langle U \rangle_{XY}$ pour un schéma intègre U. De même, on peut supposer par additivité que Y est intègre.

Il s'agit de prouver une égalité entre cycles de XZ. On peut donc raisonner localement en chaque point de XZ pour la démontrer. On se ramène ainsi au cas où S, X, Y, Z sont affines d'anneaux respectifs A, B, C et D.

Si I (resp. J) est l'idéal de U (resp. Γ_f) dans $XY = \mathrm{Spec}(BC)$ (resp. $YZ = \mathrm{Spec}(CD)$), on pose $M = BC/I$ (resp. $N = CD/J$). On obtient ainsi $\alpha = z^m_{XY}(M)$ et $\langle \Gamma_g \rangle = z^n_{YZ}(N)$. La proposition VI.2 implique donc :

$$g \circ \alpha = p^{XZ}_{XYZ*}\left(z^{n+m}(N \otimes^{\mathbf{L}}_B M)\right).$$

Or, puisque le morphisme canonique $\Gamma_g \to Y$ est un isomorphisme, $M|_B$ est un B-module libre de rang 1, donc plat. Il en résulte que $N \otimes^{\mathbf{L}}_B M = N \otimes_B M$, ce que l'on traduit géométriquement par la formule :

$$g \circ \alpha = p^{XZ}_{XYZ*}\left(\langle \Gamma_g \times_Y U \rangle_{XYZ}\right).$$

Or, $\Gamma_g \times_Y U$ est à support dans $\Gamma_g \times_S X$. A travers l'isomorphisme $\epsilon : \Gamma_g \to Y$, la restriction du morphisme p^{XZ}_{XYZ} à $\Gamma_g \times_S X$ correspond au morphisme $g \times_S X$. la formule à démontrer résulte donc de la formule précédente compte tenu de l'isomorphisme ϵ. □

VI.2.0.c. — Les points 2 et 3 de cette proposition montre que l'on peut définir la correspondance identité d'un schéma X de $\mathscr{L}_S$ comme le cycle $\langle \Delta_{X/S} \rangle$, puisque $\Delta_{X/S}$ est encore le graphe du morphisme de schéma 1_X.

Définition VI.3. — On définit la catégorie des correspondances finies (associée à $\mathscr{L}_S$) sur un schéma régulier S comme la catégorie dont les objets sont les S-schémas lisses séparés de type fini et les morphismes sont les S-correspondances finies. On la note $\mathscr{L}^{cor}_S$.

La naturalité du changement de base par un morphisme de $\mathscr{L}_S$ (*cf.* paragraphe V.4.0.l, 2) montre grâce au point 2 que l'association $f \mapsto \langle \Gamma_f \rangle$ définit un foncteur (égal à l'identité sur les objets) :

$$\gamma : \mathscr{L}_S \to \mathscr{L}^{cor}_S.$$

On l'appellera simplement le *foncteur graphe*. Notons que ce foncteur est fidèle ; pour abréger les formules, si f est un morphisme de $\mathscr{L}_S$, on notera simplement f la S-correspondance finie $\gamma(f) = \langle \Gamma_f \rangle$.

Par ailleurs, la catégorie $\mathscr{L}^{cor}_S$ admet des sommes finies, tout comme la catégorie $\mathscr{L}_S$, et le foncteur γ commute aux sommes finies. La situation concernant les produits est notablement différente :

Lemme VI.4. — *La catégorie $\mathscr{L}^{cor}_S$ est additive.*

Démonstration. — Les correspondances finies de X vers Y forment un groupe $c_S(X, Y)$ et la composition est biadditive par définition. La catégorie $\mathscr{L}^{cor}_S$ admet un objet initial, le schéma vide $\varnothing$. C'est aussi un objet final, car il existe une unique correspondance finie $X \bullet\!\!\rightarrow \varnothing$ – soit le cycle associé au sous-schéma fermé $\varnothing$ de $X \times_S \varnothing = \varnothing$.

Considérons deux schémas X et Y dans $\mathscr{L}_S$ et posons $Q = X \sqcup Y$. On dispose des immersions ouvertes et fermées canoniques : $i : X \to Q$ et $j : Y \to Q$. Mais par ailleurs, on peut définir des S-correspondances finies :

$$p : Q \bullet\!\!\to X$$
$$q : Q \bullet\!\!\to Y$$

en posant $p = \langle \Delta_{X/S} \rangle_{QX}$, $q = \langle \Delta_{Y/S} \rangle_{QY}$. On peut alors vérifier facilement les relations suivantes :

$$pi = 1_X,\ qj = 1_Y,\ pj = 0,\ qi = 0,\ ip + jq = 1_Q$$

qui montrent que Q est à la fois la somme et le produit de X et Y dans la catégorie $\mathscr{L}_S^{cor}$. □

VI.2.0.d. — Si $f : X \to Y$ est un morphisme fini pseudo-dominant dans $\mathscr{L}_S$, on notera simplement ${}^t f$ la S-correspondance finie $\langle \Gamma_f \rangle_{YX}$ qui lui est associée (*cf.* example VI.1). On peut décrire la composition avec ce type de correspondance finie, d'une manière tout à fait analogue[(1)] à ce qu'on a obtenu dans la proposition VI.3 :

Proposition VI.5. — 1. *Pour tout S-correspondance finie $\alpha : X \bullet\!\!\to Y$ et tout morphisme fini pseudo-dominant $g : Z \to Y$ dans $\mathscr{L}_S$, on a :*

$${}^t g \circ \alpha = (g \times_S X)^*(\alpha).$$

2. *Pour tout S-correspondance finie $\beta : Y \bullet\!\!\to Z$ et tout morphisme fini pseudo-dominant f : $Y \to X$ dans $\mathscr{L}_S$, on a :*

$$\beta \circ {}^t f = (f \times_S Z)_*(\beta).$$

Démonstration. — La démonstration de ces deux points est identique à la celle des points 2 et 3 de la proposition VI.3. □

Remarque VI.2. — On en déduit en particulier que pour deux morphismes finis pseudo-dominants $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dans $\mathscr{L}_S$, ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.

On obtient facilement la formule des traces suivantes :

Proposition VI.6. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme pseudo-dominant dans $\mathscr{L}_S$. Considérons $(Y_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles (donc connexes) de Y. Pour tout indice $i \in I$, on note d_i le degré résiduel de f au point générique de Y_i.*

Alors, $f \circ {}^t f = \sum_{i \in I} d_i . \nu_i$, où ν_i est le projecteur de Y sur Y_i (cf. lemme VI.4).

Démonstration. — Pour calculer la composée de l'énoncé, on est amené suivant le calcul donné dans le paragraphe VI.2.0.b à considérer le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_f \times_Y \Gamma_f & \longrightarrow & \Gamma_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_f & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

Or ce carré est formé d'isomorphismes. On déduit donc de la proposition VI.2 la formule suivante :

$$f \circ {}^t f = p^{XX}_{XYX*}(\langle \Gamma_f \times_Y \Gamma_f \rangle_{XYX}).$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer une image directe. Or, p^{XX}_{XYX} envoie surjectivement $\Gamma_f \times_Y \Gamma_f$ sur la diagonale de X. La restriction de p^{XX}_{XYX} à ce sous-schéma fermé est donc isomorphe au morphisme $f : Y \to X$ ce qui permet de conclure. □

---

(1) Plus précisément, *duale*.

Remarque VI.3. — Cette proposition est liée à la formule des traces qu'on a déjà vue dans le cas des morphismes plats finis (*cf.* proposition II.20). Nous verrons plus tard que les correspondances finies agissent sur les groupes de Chow, et que la formule précédente est dans ce cas une généralisation de celle de *loc. cit.* au cas d'un morphisme non nécessairement plat.

Notons pour terminer la formule de changement de base suivante :

Proposition VI.7. — *Considérons un carré cartésien dans* $\mathscr{L}_S$

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

tel que f *est fini pseudo-dominant. Alors,*

$$^t f \circ p = q \circ {}^t g.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer la formule suivante, qui est formellement équivalente à la précédente : On montre la formule équivalente suivante :

$$(1_Y \circ {}^t f) \circ p = (1_Y \circ q) \circ {}^t g.$$

Or pour cette dernière, si l'on applique les formules des propositions VI.3 et VI.5, on est ramené à la formule 4 du paragraphe V.4.0.l, appliquée au cycle $\alpha = \langle \Delta_{Y/S} \rangle_{YY}$ et au carré cartésien de $\mathscr{L}_Y$

$$\begin{tikzcd} YY' \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "g'"'] & YY \arrow[d, "f'"] \\ YX' \arrow[r, "p'"] & YX \end{tikzcd}$$

obtenu par changement de base suivant $Y \to S$. □

3. Structure monoïdale

VI.3.0.e. — On aimerait faire du produit dans $\mathscr{L}_S$ une structure monoïdale dans $\mathscr{L}_S^{cor}$. Sur les objets, ce produit tensoriel correspondra au produit des S-schémas. Le problème est de définir le produit tensoriel des correspondances.

Considérons des correspondances finies :

$$\alpha : X \bullet\!\!\to Y, \quad \beta : X' \bullet\!\!\to Y'.$$

Le produit tensoriel de α et β doit être une correspondance finie de la forme $XX' \bullet\!\!\to YY'$. On la définit par la formule :

$$\alpha \otimes_S \beta = p^{XY*}_{XYX'Y'}(\alpha).p^{X'Y'*}_{XYX'Y'}(\beta). \tag{VI.2}$$

Comme dans le cas du produit de composition, il nous faut justifier que cette formule a bien un sens.

On se réduit pour cela au cas où $\alpha = \langle U \rangle_{XY}$ (resp. $\beta = \langle V \rangle_{X'Y'}$) pour un sous-schéma fermé intègre U (resp. V). Soit $p : U \to X$ la projection évidente ; par définition, le morphisme p est fini pseudo-dominant.

Montrons d'abord que l'intersection en jeu est propre. Notons que l'intersection de $UX'Y'$ et XYV dans $XYX'Y'$ est simplement le S-schéma produit UV. On pose $n = \mathrm{codim}_{XY}(U)$ et

$m = \mathrm{codim}_{X'Y'}(V)$. Considérons les carrés cartésiens suivants :

$$\begin{tikzcd} UV \arrow[r] \arrow[d, "p''"'] & UX'Y' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & U \arrow[d, "p"] \\ XV \arrow[r, "i'_X"] & XX'Y' \arrow[r, "p^X_{XX'Y'}"] & X, \end{tikzcd}$$

où i'_X est l'immersion fermée évidente. On déduit du théorème V.17 appliqué au morphisme fini pseudo-dominant p (X est régulier) que p' est fini pseudo-dominant. Appliquant le même théorème à p', on obtient que pour toute composante irréductible W de UV,

$$\mathrm{codim}_{UX'Y'}(W) = \mathrm{codim}_{XV}(XX'Y') = m.$$

Or, $XYX'Y'$ est régulier, donc caténaire (*cf.* remarque IV.14). Comme $UX'Y'$ est purement de codimension n dans $XYX'Y'$, on obtient l'égalité

$$\mathrm{codim}_{XYX'Y'}(W) = \mathrm{codim}_{XYX'Y'}(UX'Y') + \mathrm{codim}_{UX'Y'}(W) = n + m$$

et cela conclut.

Enfin, le théorème *loc. cit.* montre que p'' est fini pseudo-dominant, et donc que $UV \to XX'$ est fini pseudo-dominant.

Définition VI.4. — Avec les notations qui précèdent, on définit le produit tensoriel de α et β comme le cycle $\alpha \otimes_S \beta$ de $XYX'Y'$ dans la formule VI.2.

D'après la commutativité (resp. l'associativité) du produit d'intersection des cyles – *cf.* formule (I4) du paragraphe IV.2.0.d (resp. proposition IV.20) – ce produit tensoriel est symétrique (resp. associatif). Il est de plus bifonctoriel :

Proposition VI.8. — *Considérons des S-correspondances finies :*

$$\alpha : X \to Y, \quad \alpha' : Y \to Z$$
$$\beta : X' \to Y', \quad \beta' : Y' \to Z'$$

Alors,

$$(\alpha' \circ \alpha) \otimes^{tr}_S (\beta' \circ \beta) = (\alpha' \otimes^{tr}_S \beta') \circ (\alpha \otimes^{tr}_S \beta). \tag{VI.3}$$

Démonstration. — On démontre cette formule comme on a démontré l'associativité du produit de composition des correspondances finies (*cf.* proposition VI.3) : pour calculer les deux membres de (VI.3), on peut tirer tous les cycles dans $XYZX'Y'Z'$ et repousser le résultat dans $XZX'Z'$; on est alors ramené à l'associativité du produit d'intersection (*cf.* proposition IV.20). □

On a donc obtenu la proposition suivante :

Proposition VI.9. — *La catégorie $\mathscr{L}^{cor}_S$ munie du produit tensoriel*

$$[X] \otimes^{tr}_S [Y] = [X \times_S Y]$$

pour X et Y des schémas dans $\mathscr{L}_S$ et du produit des correspondances de la définition VI.4 est monoïdale symétrique.

Le foncteur graphe $\gamma : \mathscr{L}_S \to \mathscr{L}^{cor}_S$ est de plus monoïdal, où $\mathscr{L}_S$ est muni de sa structure monoïdale définie par le produit des S-schémas.

Démonstration. — Il ne reste plus qu'à démontrer l'assertion concernant le foncteur γ. Etant donné des morphismes $f : X \to Y$ et $g : X' \to Y'$ dans $\mathscr{L}_S$, on doit montrer :

$$[\Gamma_f] \otimes^{tr}_S [\Gamma_g] = [\Gamma_{f \times_S g}].$$

Cela résulte facilement de la formule des Tor et du fait que le morphisme de projection $\Gamma_f \to S$ est lisse, donc plat. Les détails sont laissés au lecteur. □

Remarque VI.4. — Reprenant la démonstration précédente, on déduit de plus que pour des morphismes finis pseudo-dominants $f : Y \to X$, $g : Y' \to X'$ dans $\mathscr{L}_S$, on a la relation suivante :

$$^t f \otimes_S {}^t g = {}^t(f \times_S g),$$

le morphisme $f \times_S g$ étant encore fini et pseudo-dominant d'après le théorème V.17.

Rappelons la définition abstraite suivante :

Définition VI.5. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie monoïdale symétrique, avec pour produit tensoriel $\otimes$ et pour objet unité $\mathbb{1}$.

Soit X un objet de $\mathscr{C}$. On dit que X est *fortement dualisable* si il existe un objet $X^\vee$ de $\mathscr{C}$ et des morphismes

$$\mu : X \otimes X^\vee \to \mathbb{1}$$
$$\eta : \mathbb{1} \to X^\vee \otimes X$$

tels que les morphismes composés suivants

$$\text{(VI.4)} \qquad \begin{gathered} X \otimes X^\vee \otimes X \xrightarrow{\mu\otimes 1} X \xrightarrow{1\otimes\eta} X \otimes X^\vee \otimes X \\ X^\vee \otimes X \otimes X^\vee \xrightarrow{1\otimes\mu} X \xrightarrow{\eta\otimes 1} X^\vee \otimes X \otimes X^\vee \end{gathered}$$

sont l'identité.

Lorsque de telles données sont associées à X, on dit que $X^\vee$ est un *dual fort* de X. On dira encore que X est *fortement autodual* si X est un dual fort de lui-même.

Pour tout couple (Y, Z) d'objets de $\mathscr{C}$, on déduit des relations ci-dessus que les morphismes suivants

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X \otimes Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X^\vee \otimes X \otimes Y, X^\vee \otimes Z) \xrightarrow{(\eta\otimes 1_Y)^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X^\vee \otimes Z)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X^\vee \otimes Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X \otimes Y, X \otimes X^\vee \otimes Z) \xrightarrow{(\mu\otimes 1_Z)_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X \otimes Y, Z)$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Autrement dit, le foncteur $X \otimes .$ est adjoint à gauche du foncteur $X^\vee \otimes .$ Ainsi, le triplet $(X^\vee, \mu, \eta)$ détermine $X^\vee$ à isomorphisme unique près.

VI.3.0.f. — Revenons maintenant à la situation de la catégorie monoïdale $\mathscr{L}_S^{cor}$, l'unité de la structure monoïdale étant l'objet $[S]$.

Proposition VI.10. — *Soit $X \xrightarrow{p} S$ un morphisme étale fini, et $\delta : X \to X \times_S X$ le morphisme diagonal associé.*

Alors, $[X]$ est fortement autodual, avec pour morphismes de dualité les morphismes composés suivants :

$$[X] \otimes_S [X] = [X \times_S X] \xrightarrow{{}^t\delta} [X] \xrightarrow{p} [S] = \mathbb{1}.$$
$$[S] \xrightarrow{{}^t p} [X] \xrightarrow{\delta} [X \times_S X] = [X] \otimes_S [X].$$

Démonstration. — Il s'agit de vérifier les relations (VI.4). Pour la première relation, on justifie le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \big((p \circ {}^t\delta) \otimes 1_X\big) \circ \big(1 \otimes (\delta \circ {}^t p)\big) &\overset{(1)}{=} (p \times_S 1_X) \circ {}^t(\delta \times_S 1_X) \circ (1_X \times_S \delta) \circ {}^t(1_X \times_S p) \\ &\overset{(2)}{=} (p \times_S 1_X) \circ \delta \circ {}^t\delta \circ {}^t(1_X \times_S p) \\ &\overset{(3)}{=} 1_{X \times_S X}; \end{aligned}$$

l'égalité (1) résulte de la proposition VI.9 et de la remarque VI.4, l'égalité (2) résulte de la proposition VI.7 et l'égalité (3) de la remarque VI.2. La deuxième relation se montre de manière analogue. □

Remarque VI.5. — En particulier, pour tout triplet (X, Y, Z) de schémas dans $\mathscr{L}_S$ tels que X/S est étale fini, on obtient un isomorphisme canonique :

$$c_S\,(X \times_S Y, Z) \simeq c_S\,(Y, X \times_S Z)\,.$$

4. Fonctorialité

On étudie dans cette sous-section la fonctorialité de la catégorie $\mathscr{L}_S^{cor}$ par rapport à S.

4.1. Restriction. —

VI.4.1.a. — Soient S et T des schémas réguliers, et $p : T \to S$ un morphisme lisse séparé de type fini.

Pour des schémas X et Y dans $\mathscr{L}_T$, on introduit le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \times_T Y \arrow[r, "\delta_{XY}"] \arrow[d] & X \times_S Y \arrow[d, "(1)"] \\
T \arrow[r, "\delta_{T/S}"] & T \times_S T
\end{tikzcd}$$

où le morphisme $\delta_{T/S}$ est le morphisme diagonal de T/S et (1) est le produit des morphismes structuraux évidents. Par définition, $\delta_{T/S}$ est une immersion fermée et il en est de même de δ_{XY}.

Etant donnée une T-correspondance finie $\alpha \in c_T\,(X, Y)$, on vérifie grâce au lemme VI.1 que le support du cycle $\delta_{XY*}(\alpha)$ est fini et pseudo-dominant sur X. C'est donc un élément de $c_S\,(X, Y)$.

Proposition VI.11. — *Considérons des schémas X, Y et Z dans $\mathscr{L}_T$ ainsi que les notations introduites ci-dessus.*

1. *Soit $f : X \to Y$ un T-morphisme. On note $\Gamma_{f/T}$ (resp. $\Gamma_{f/S}$) son graphe en tant que T-morphisme (resp. S-morphisme). Alors, $\delta_{XY*}\big(\langle \Gamma_{f/T}\rangle_{X \times_T Y}\big) = \langle \Gamma_{f/S}\rangle_{X \times_S Y}$.*
2. *Pour toutes correspondances finies $\alpha \in c_T\,(X, Y)$ et $\beta \in c_T\,(Y, Z)$, on a l'égalité suivante :*

$$\delta_{XZ*}(\beta \circ \alpha) = \delta_{YZ*}(\beta) \circ (\delta_{XY*}(\alpha).$$

Démonstration. — La première affirmation résulte facilement du carré cartésien de schémas suivant :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\gamma_{f/T}"] \arrow[d, equal] & Y \times_T X \arrow[d, "\delta_{XY}"] \\
Y \arrow[r, "\gamma_{f/S}"] & Y \times_S X
\end{tikzcd}$$

où $\gamma_{f/S}$ (resp. $\gamma_{f/T}$) est le graphe de f vu comme S-morphisme (resp. T-morphisme).

Pour la deuxième égalité, on fait introduit les notations du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& X \times_T Y \arrow[dl, equal] & & X \times_T Y \times_T Z \arrow[ll, "q_{XYZ}^{XY}"'] \arrow[rr, "q_{XYZ}^{YZ}"] \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] \arrow[dd, "\delta_{XYZ}"] & & Y \times_T Z \arrow[dr, equal] & \\
X \times_T Y \arrow[dr, "\delta_{XY}"'] & & X \times_T Y \times_S Z \arrow[ll, "p"'] \arrow[dr, "c"'] & & X \times_S Y \times_T Z \arrow[rr, "q"] \arrow[dl, "d"] & & Y \times_T Z \arrow[dl, "\delta_{YZ}"] \\
& X \times_S Y & & X \times_S Y \times_S Z \arrow[ll, "p_{XYZ}^{XY}"] \arrow[rr, "p_{XYZ}^{YZ}"'] & & Y \times_S Z, &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches horizontales sont les projections canoniques évidentes et les autres flèches sont des immersions fermées.

Alors, on obtient la deuxième assertion de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\delta_{XZ*}\big(q^{XZ}_{XYZ}\big)_*\Big({q^{YZ}_{XYZ}}^*(\beta).{q^{XY}_{XYZ}}^*(\alpha)\Big) &= p^{XZ}_{XYZ*}\delta_{XYZ*}\Big({q^{YZ}_{XYZ}}^*(\beta).{q^{XY}_{XYZ}}^*(\alpha)\Big)\\
&= p^{XZ}_{XYZ*}d_*b_*\Big(b^*q^*(\beta).a^*p^*(\alpha)\Big)\\
&= p^{XZ}_{XYZ*}d_*\Big(q^*(\beta).b_*a^*p^*(\alpha)\Big)\\
&= p^{XZ}_{XYZ*}d_*\Big(q^*(\beta).d^*c_*p^*(\alpha)\Big)\\
&= p^{XZ}_{XYZ*}\Big(d_*q^*(\beta).c_*p^*(\alpha)\Big)\\
&= p^{XZ}_{XYZ*}\Big({p^{YZ}_{XYZ}}^*\delta_{YZ*}(\beta).{p^{XY}_{XYZ}}^*\delta_{XY*}(\alpha)\Big)
\end{aligned}$$

en utilisant le fonctorialité du pushout et du pullback (plat) ainsi que les formules de projections (3) et (4) du paragraphe V.4.0.l. □

Définition VI.6. — Avec les notations de VI.4.1.a, on définit un foncteur de restriction :

$$\begin{aligned}
f_\sharp : \mathscr{L}^{cor}_T &\to \mathscr{L}^{cor}_S\\
(X \to T) &\mapsto (X \to T \xrightarrow{f} S)\\
(\alpha : X \bullet\!\!\to Y) &\mapsto \delta_{XY*}(\alpha).
\end{aligned}$$

La formule $(fg)_\sharp = f_\sharp g_\sharp$, pour des morphismes lisses séparés de type fini f et g, est évidente d'après cette définition. Par ailleurs, si $f^0_\sharp : \mathscr{L}_T \to \mathscr{L}_S$ désigne le foncteur de restriction définit dans le paragraphe V.4.0.i, le premier point de la proposition précédente, montre que le diagramme de foncteurs suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}_T \arrow[r, "f^0_\sharp"] \arrow[d, "\gamma_T"'] & \mathscr{L}_S \arrow[d, "\gamma_S"] \\
\mathscr{L}^{cor}_T \arrow[r, "f_\sharp"] & \mathscr{L}^{cor}_S .
\end{tikzcd}$$

4.2. Changement de base. —

VI.4.2.a. — On considère un schéma régulier Σ et un morphisme $f : T \to S$ dans $\mathscr{L}_\Sigma$.

Pour des schémas X et Y dans $\mathscr{L}_S$, on note toujours $XY = X \times_S Y$ et $p^Y_{XY} : XY \to Y$ la projection canonique.

On posera de plus $X_T = X \times_S T$, et l'on notera $f_X : X_T \to X$ le morphisme induit par f.

De même, on pose $XY_T = (X \times_S Y) \times_S T$ et on note

$$q^Y_{XY} : XY_T \to Y_T$$

le morphisme de projection canonique.

Considérons une S-correspondance finie $\alpha \in c_S\,(X, Y)$. On va définir le changement de base de α suivant f par la formule suivante :

$$\alpha_T = f^*_{XY}(\alpha) \tag{VI.5}$$

en utilisant le pullback de la définition V.6, f_{XY} étant un morphisme de $\mathscr{L}_\Sigma$. Comme on l'a fait pour le produit de composition, on doit montrer que cette formule a bien un sens et que le résultat est une T-correspondance finie.

On se ramène au cas où $\alpha = \langle U\rangle_{XY}$ pour un sous-schéma fermé intègre U de XY. Posons $n = \mathrm{codim}_{XY}(U)$. Pour montrer que l'intersection en jeu est propre, il faut montrer que le schéma $f_{XY}^{-1}(U) = U \times_S T = U_T$ est de codimension n.

Considérons la factorisation canonique de $f_X : X_T \to X$ sous la forme :

$$X_T \xrightarrow{\gamma} X_T X \xrightarrow{\pi} X$$

où γ est le graphe de f vu comme S-morphisme. On considère les carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
U_T \arrow[r, hook, "m''"] \arrow[d, hook, "n''"'] & U' \arrow[r] \arrow[d, hook, "n'"] & U \arrow[d, hook, "n"] \\
XY_T \arrow[r, hook, "m'"] \arrow[d] & X_T XY \arrow[r] \arrow[d] & XY \arrow[d, "p^X_{XY}"] \\
X_T \arrow[r, hook, "m"] & X_T X \arrow[r, "\pi"] & X,
\end{tikzcd}$$

où les entiers m, m', m'', n, n' et n'' désignent les codimensions des immersions fermées considérées. Puisque π (resp. p^X_{XY}) est plat, on en déduit que $n' = n$ (resp. $m = m'$). Puisque U/X est fini pseudo-dominant et X régulier, on déduit du théorème V.17 que $U'/X_T X$ est fini pseudo-dominant, par une nouvelle application du théorème résultant du fait que $X_T X$ est régulier, que $m' = m''$.

Enfin, puisque $X_T XY$ est régulier, il est caténaire (*cf.* remarque IV.14). On en déduit (raisonnant sur chaque composante irréductible) que $n' + m'' = m' + n''$. Ceci implique $n = n''$, comme attendu.

Enfin, appliquant à nouveau le théorème V.17, U_T est fini pseudo-dominant sur X_T, ce qui montre que $\alpha_T \in c_T\,(X_T, Y_T)$.

Proposition VI.12. — *Considérons les notations précédentes. Alors, pour toute T-correspondances finies $\alpha \in c_S\,(X, Y)$ et $\beta \in c_S\,(Y, Z)$, on a :*

$$\beta_T \circ \alpha_T = (\beta \circ \alpha)_T.$$

Démonstration. — On reprend les notations de VI.4.2.a pour les projections canoniques. Alors, on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
(f^*_{YZ}\beta) \circ (f^*_{XY}\alpha) &= q^{XZ}_{XYZ*}\big({q^{YZ}_{XYZ}}^*(f^*_{YZ}\beta).{q^{XY}_{XYZ}}^*(f^*_{XY}\alpha)\big) \\
&= q^{XZ}_{XYZ*}\Big(f^*_{XYZ}({p^{YZ}_{XYZ}}^*\beta).f^*_{XYZ}({p^{XY}_{XYZ}}^*\alpha)\Big) \quad (1) \\
&= q^{XZ}_{XYZ*}f^*_{XYZ}\Big(({p^{YZ}_{XYZ}}^*\beta).({p^{XY}_{XYZ}}^*\alpha)\Big) \quad (2) \\
&= f^*_{XZ}\left(p^{XZ}_{XYZ*}\Big(({p^{YZ}_{XYZ}}^*\beta).({p^{XY}_{XYZ}}^*\alpha)\Big)\right). \quad (3)
\end{aligned}$$

où les égalités résultent toutes des formules du paragraphe V.4.0.l : l'égalité (1) résulte de la fonctorialité du pullback (formule 2), l'égalité (2) de la compatibilité du pullback avec le produit d'intersection (formule 1) et l'égalité (3) de la formule de changement de base (formule 4). □

Définition VI.7. — Suivant les notations de la proposition précédente, on associe à f un foncteur de changement de base :

$$\begin{aligned}
f^* : \mathscr{L}^{cor}_S &\to \mathscr{L}^{cor}_T \\
X/S &\mapsto X_T/T \\
(\alpha : X \bullet\!\!\to Y) &\mapsto \alpha_T.
\end{aligned}$$

On résume les propriétés de ce foncteur de changement de base dans la proposition suivante :

Proposition VI.13. — *Considérons les hypothèses de la définition précédente.*

1. *Le foncteur f^* est symétrique monoïdal.*
2. *Soit $f_0^* : \mathscr{L}_S \to \mathscr{L}_T$ le foncteur de changement de base introduit dans V.4.0.i. Alors, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}_S \arrow[r, "\gamma_S"] \arrow[d, "f_0^*"'] & \mathscr{L}_S^{cor} \arrow[d, "f^*"] \\ \mathscr{L}_T \arrow[r, "\gamma_T"] & \mathscr{L}_T^{cor}. \end{tikzcd}$$

3. *Soit $g : W \to T$ un morphisme de $\mathscr{L}_\Sigma$. Alors, on a un isomorphisme canonique de foncteurs :*

$$(f \circ g)^* \simeq g^* \circ f^*.$$

Démonstration. — 1. Pour deux S-correspondances finies $\alpha \in c_S(X, Y)$ et $\beta \in c_S(X', Y')$, on justifie ce premier point par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}(\alpha \otimes^{tr} \beta)_T &= f^*_{XX'YY'}\left({p^{XY}_{XX'YY'}}^*(\alpha).{p^{X'Y'}_{XX'YY'}}^*(\beta)\right)\\ &= \left(f^*_{XX'YY'}{p^{XY}_{XX'YY'}}^*(\alpha)\right).\left(f^*_{XX'YY'}{p^{X'Y'}_{XX'YY'}}^*(\beta)\right)\\ &= \left({q^{XY}_{XX'YY'}}^*(\alpha_T)\right).\left({q^{X'Y'}_{XX'YY'}}^*(\beta)\right).\end{aligned}$$

(Voir le paragraphe V.4.0.l pour une justification).

2. Pour tout S-morphisme $f : X \to Y$, on a un isomorphisme canonique de schémas, $\Gamma_{f_T} \to \Gamma_f \times_S T$. Dès lors, ce point résulte de la formule des Tor permettant de calculer (VI.5) dans le cas $\alpha = \langle \Gamma_f \rangle_{XY}$ et du fait que Γ_f est plat sur S.

3. Bien sûr, pour un S-schéma lisse X, on a un isomorphisme canonique de schémas : $X_W \simeq (X_T)_W$. Le point résulte simplement de la fonctorialité du pullback compte tenu de cet isomorphisme (*cf.* V.4.0.l, formule 2). □

4.3. Restriction et changement de base. — On obtient facilement la proposition suivante :

Proposition VI.14. — *Soit $f : T \to S$ un morphisme lisse séparé de type fini. Alors, le foncteur $f_\sharp : \mathscr{L}_T^{cor} \to \mathscr{L}_S^{cor}$ est adjoint à gauche functeur $f^* : \mathscr{L}_S^{cor} \to \mathscr{L}_T^{cor}$.*

Démonstration. — Soit X (resp. Y) un schéma de $\mathscr{L}_S$ (resp. $\mathscr{L}_T$). Notons que $Y \times_S X \simeq Y \times_T (X \times_S T)$ – c'est la formule 2 du paragraphe V.4.0.i. On en déduit donc par définition des correspondances finies un isomorphisme

$$c_S(f_\sharp(Y), X) \xrightarrow{\sim} c_T(Y, f^*(X))$$

et l'on vérifie facilement qu'il est naturel en X (resp. Y) par rapport aux S-correspondances (resp. T-correspondances) finies. □

VI.4.3.a. — Considérons l'adjonction $(f_\sharp, f^*)$ obtenue dans la proposition précédente. Rappelons qu'on lui associe deux transformations naturelles :

$$\begin{aligned} a(p_\sharp, p^*) &: 1 \to f^* f_\sharp \\ a'(p_\sharp, p^*) &: f_\sharp f^* \to 1 \end{aligned}$$

appelés respectivement l'unité et la counité de l'adjonction et telles que les composées suivantes soient l'identité :

$$f_\sharp \xrightarrow{a(p_\sharp, p^*)} f_\sharp f^* f_\sharp \xrightarrow{a'(p_\sharp, p^*)} f_\sharp$$

$$f^* \xrightarrow{a'(p_\sharp, p^*)} f^* f_\sharp f^* \xrightarrow{a(p_\sharp, p^*)} f^*.$$

Remarque VI.6. — 1. La transformation naturelle $a'(p_\sharp, p^*)$ évaluée en un S-schéma X dans $\mathscr{L}_S$ est le morphisme de projection canonique :

$$X \times_S T \to X.$$

2. Considérons un T-schéma Y dans $\mathscr{L}_T$. Alors, le morphisme de projection $Y \times_S T \to Y$ admet une section canonique $Y \to Y \times_S T$ qui n'est autre que l'évaluation de $a(p_\sharp, p^*)$ en Y.

VI.4.3.b. — Considérons un carré cartésien de schémas

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & T \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "p"] & S \end{tikzcd}$$

dans $\mathscr{L}_\Sigma$ tel que p est lisse séparé de type fini.

Les morphismes d'unité et de counité permettent de construire une transformation naturelle canonique :

$$q_\sharp g^* \xrightarrow{a'(p_\sharp, p^*)} q_\sharp g^* p^* p_\sharp \simeq q_\sharp q^* f^* p_\sharp \xrightarrow{a(q_\sharp, q^*)} f^* p_\sharp. \tag{VI.6}$$

On l'appelle le *morphisme d'échange* associé au carré Δ.

Proposition VI.15. — *Le morphisme d'échange* (VI.6) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Considérons un schéma V dans $\mathscr{L}_T$. Par définition, $q_\sharp g^*(Y) = Y \times_T V$ vu comme un X-schéma. De même, $f^* p_\sharp(Y) = Y \times_S X$. Comme le carré Δ est cartésien, il existe un X-isomorphisme canonique $Y \times_T V \to Y \times_S X$. La remarque VI.6 montre que cet isomorphisme est l'évaluation de (VI.6) en X, ce qui conclut. □

VI.4.3.c. — Considérons un schéma X (resp. Y) dans $\mathscr{L}_S$ (resp. $\mathscr{L}_T$). On déduit du fait que f^* est monoïdal la transformation naturelle suivante :
(VI.7)

$$f_\sharp\left(Y \otimes_T f^*(X)\right) \xrightarrow{a(f_\sharp, f^*)} f_\sharp\left(f^* f_\sharp(Y) \otimes_T f^*(X)\right) \simeq f_\sharp f^*\left(f_\sharp(Y) \otimes_S X\right) \xrightarrow{a'(f_\sharp, f^*)} f_\sharp(Y) \otimes_S X.$$

Cette flèche est naturelle en X et en Y par rapport aux correspondances finies. On l'appelle le morphisme de projection associé au foncteur monoïdal f^* et à son adjoint à gauche.

Proposition VI.16. — *La transformation naturelle* (VI.7) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — La démonstration consiste juste à calculer les transformations naturelles mises en jeu et à constater que la flèche (VI.7) n'est autre que l'isomorphisme canoniquede schémas :

$$Y \times_T (X \times_S T) \xrightarrow{\sim} Y \times_S X.$$

□

2009-2010

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* deglise@math.univ-paris13.fr
Url : http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/