

Table des matières

Cours VII. Motifs géométriques effectifs	1
1. Catégories triangulées	1
1.1. Définition	1
1.2. Complexes à homotopie près	5
1.3. Localisation	7
2. Motifs géométriques effectifs	9
2.1. Définition	9
2.2. Motifs relatifs	10
2.3. Functorialité	12
2.4. Structure monoïdale	13
Références	14

COURS VII MOTIFS GÉOMÉTRIQUES EFFECTIFS

1. Catégories triangulées

1.1. Définition. —

VII.1.1.a. — Soit \mathcal{T} une catégorie additive munie d'une autoéquivalence $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ de catégories. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout objet X (resp. morphisme f) de \mathcal{T} , on pose : $X[n] := \Sigma^n(X)$ (resp. $f[n] = \Sigma^n(f)$). Le foncteur T sera appelé dans ce qui suit le *foncteur de suspension*.

Un triangle de (\mathcal{T}, Σ) est une suite de morphismes

$$(VII.1) \quad X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

de \mathcal{T} . Un morphisme de triangle est un triplet (f, g, h) de morphismes de \mathcal{T} rendant le diagramme suivant commutatif :

$$(VII.2) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

Définition VII.1. — Une catégorie pré-triangulée est un couple (\mathcal{T}, Σ) comme ci-dessus muni d'une classe de triangles dits *distingués* satisfaisant les propriétés suivantes :

- (TR1) (a) Tout triangle de la forme $X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ est distingué.
 (b) Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué.
 (c) Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{T} , il existe un triangle distingué de la forme :

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$$

(TR2) Un triangle de la forme

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

est distingué si et seulement si le triangle

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$$

est distingué.

(TR3) Pour tout diagramme commutatif formé des flèches solides suivantes

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

tel que les lignes horizontales forment des triangles distingués, il existe une flèche pointillée formant un morphisme de triangles.

Si (\mathcal{T}, Σ) et (\mathcal{T}', Σ') sont deux catégories triangulées, un foncteur $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ est dit triangulé (ou encore *exact*) si $F \circ \Sigma = \Sigma' \circ F$ et F envoie un triangle distingué de \mathcal{T} sur un triangle distingué de \mathcal{T}' .

Il résulte facilement des axiomes que si \mathcal{T} est une catégorie triangulée, la catégorie opposée \mathcal{T}^{op} admet une structure triangulée évidente. Par ailleurs, la composée de deux morphismes successifs d'un triangle distingué est nulle.⁽¹⁾

Définition VII.2. — Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée et \mathcal{A} une catégorie abélienne.

1. Un foncteur $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ est dit *cohomologique* si pour tout triangle distingué (VII.1), la suite

$$H(X) \xrightarrow{u_*} H(Y) \xrightarrow{v_*} H(Z)$$

est exacte.

2. Un foncteur $H : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{A}$ est dit *homologique* si c'est un foncteur cohomologique pour la structure triangulée duale sur \mathcal{T}^{op} .

Dans la situation du premier point de cette définition, on posera pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et tout objet X de \mathcal{T} : $H^n(X) = H(X[n])$. A tout triangle distingué (VII.1), on associe donc d'après l'axiome (TR2) une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H^n(X) \xrightarrow{u_*} H^n(Y) \xrightarrow{v_*} H^n(Z) \xrightarrow{w_*} H^{n+1}(X) \rightarrow \dots$$

Une conséquence formelle mais importante des axiomes précédents est la suivante :

Proposition VII.1. — Soit \mathcal{T} une catégorie pré-triangulée. Alors, pour tout objet E de \mathcal{T} , le foncteur

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\cdot, E) &: \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{A} \\ \text{resp. } \text{Hom}_{\mathcal{T}}(E, \cdot) &: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A} \end{aligned}$$

est un foncteur cohomologique (resp. homologique).

Démonstration. — Considérons un triangle distingué (VII.1) et montrons l'exactitude de la suite

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, E).$$

Considérons donc $f : Y \rightarrow E$ un morphisme tel que $fu = 0$. Considérons le diagramme commutatif de flèches solides suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E & \xlongequal{\quad} & E & \longrightarrow & 0[1] \end{array}$$

D'après les axiomes (TR1)(a) et (TR2), la ligne horizontale inférieure est un triangle distingué. Il résulte de l'axiome (TR3) qu'il existe une flèche pointillée faisant formant un morphisme de triangles. Cela conclut. \square

⁽¹⁾Cela résulte facilement de (TR1)(a), (TR3) et (TR2).

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire VII.1.1. — Soit \mathcal{T} une catégorie pré-triangulée :

1. Pour tout morphisme de triangles distingués de la forme (VII.2), si deux des morphismes f, g, h sont des isomorphismes, il en est de même du troisième.
2. Considérons un diagramme de flèches solides :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ | & & | & & | & & | \\ | & & | & & | & & | \\ \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

tel que les lignes horizontales forment des triangles distingués. Si $v'gu = 0$, il existe des flèches pointillées formant un morphisme de triangles.

Si de plus $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Z'[-1]) = 0$, alors ce morphisme de triangle est déterminé de manière unique par g .

Pour obtenir les axiomes des catégories triangulées, dus à J.L. Verdier, on ajoute un autre axiome, dit de l'octaèdre :

Définition VII.3. — Une catégorie triangulée \mathcal{T} est une catégorie pré-triangulée satisfaisant l'axiome supplémentaire suivant :

(TR4) Pour tout diagramme commutatif formé des flèches solides suivantes

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow g & & \downarrow & & \parallel \\ X & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X[1] \\ \downarrow & & \downarrow g' & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y'' & \xlongequal{\quad} & Y'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow g'' & & \downarrow & & \downarrow \\ X[1] & \xrightarrow{u[1]} & Y[1] & \longrightarrow & Z[1] & \longrightarrow & X[2] \end{array}$$

tel que (u, v, w) , (u', v', w') et (g, g', g'') soient des triangles distingués, il existe des flèches pointillées rendant le diagramme commutatif et formant un triangle distingué.

Remarque VII.1. — 1. L'énoncé précédent donne un moyen (parmi d'autres) de se souvenir de l'axiome de l'octaèdre : cet axiome est l'analogue de la propriété suivante d'une catégorie abélienne \mathcal{A} :

Pour tout carré commutatif de \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \parallel & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{u'} & B' \end{array}$$

formé de monomorphismes, il existe une suite exacte courte canonique :

$$0 \rightarrow B/A \rightarrow B'/A \rightarrow B'/B \rightarrow 0$$

où le premier morphisme est induit par u .⁽²⁾ On en déduit ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{u} & B & \longrightarrow & B/A \\
 \parallel & & \downarrow g & & \downarrow \\
 A & \xrightarrow{u'} & B' & \longrightarrow & B'/A \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B'/B & \xlongequal{\quad} & B'/B
 \end{array}$$

dans lequel toutes les suites sont des suites exactes courtes (formée d'un monomorphisme suivie d'un épimorphisme).

Notons toutefois que dans le diagramme précédent, les flèches pointillées sont caractérisées de manière unique, alors que dans une catégorie triangulée par contre, le *triangle distingué de l'axiome de l'octaèdre* est loin d'être unique en général.

2. Cette forme de l'axiome de l'octaèdre est due à A.Neeman. On renvoie à [Nee01, 1.4.7] pour plus de détails.

VII.1.1.b. — Reprenons la situation d'une catégorie additive \mathcal{A} .

Rappelons que pour tous objets X et Y de \mathcal{A} , on dit que Y est un facteur direct de X si il existe un objet Y' de \mathcal{A} et un isomorphisme $X \simeq Y \oplus Y'$.

Rappelons qu'un *projecteur* de \mathcal{A} est un endomorphisme $p : X \rightarrow X$ tel $p^2 = 1_X$. Un scindage de p est une factorisation de p

$$X \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} X$$

telle que $fg = 1_I$. On en déduit que g est un monomorphisme et I est l'image de p .

De plus, I s'identifie encore au noyau du projecteur $1 - p$. Si le projecteur $1 - p$ admet aussi un scindage

$$X \xrightarrow{f'} I' \xrightarrow{g'} X$$

Alors, le morphisme canonique $X \xrightarrow{(g, g')} I \oplus I'$ est un isomorphisme de réciproque $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$.

Définition VII.4. — Soit \mathcal{A} une catégorie additive. On dit que \mathcal{A} est pseudo-abélienne si tout projecteur de \mathcal{A} admet un scindage.

Si \mathcal{A} est pseudo-abélienne, tout projecteur $p : X \rightarrow X$ admet un noyau K et une image I et $X = I \oplus K$.

Notons pour indiquer une utilisation de l'axiome de l'octaèdre le résultat suivant dû à Neeman (cf. [Nee01, 1.6.8]) :

Proposition VII.2. — Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée. Si \mathcal{T} admet des sommes dénombrables alors \mathcal{T} est pseudo-abélienne.

VII.1.1.c. — Considérons une catégorie additive \mathcal{A} . On lui associe une catégorie $\tilde{\mathcal{A}}$ dont les objets sont les couples (A, p) où A est un objet de \mathcal{A} , $p : A \rightarrow A$ un projecteur et les morphismes de (A, p) vers (B, q) sont les flèches $f : A \rightarrow B$ telles que $fp = qf = f$.

On obtient de plus un foncteur

$$i : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}, A \mapsto (A, 1_A)$$

qui est pleinement fidèle.

⁽²⁾Cela résulte en effet de l'isomorphisme bien connu, $B'/B \xrightarrow{\sim} \frac{B'/A}{B/A}$ - on l'a utilisé dans la preuve de II.21.

Proposition VII.3. — Avec les notations précédentes, la catégorie $\tilde{\mathcal{A}}$ est additive pseudo-abélienne et le foncteur i est additif. De plus, pour toute catégorie pseudo-abélienne \mathcal{B} , l'application suivante

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{add}}(\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{B}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathrm{add}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}),$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathrm{add}}$ désigne la classe des foncteurs additifs, est un isomorphisme.

On appelle $\tilde{\mathcal{A}}$ l'enveloppe pseudo-abélienne de \mathcal{A} .⁽³⁾ Cette construction est évidemment fonctorielle; le foncteur $\mathcal{A} \mapsto \tilde{\mathcal{A}}$ est, comme tout procédé de complétion, l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli évident.

VII.1.1.d. — Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée, $\tilde{\mathcal{T}}$ sa complétion pseudo-abélienne. Le foncteur de suspension $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ induit une autoéquivalence $\tilde{\Sigma} : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}$. On peut donc appliquer à $\tilde{\mathcal{T}}$ les définitions de VII.1.1.a.

Suivant Balmer et Schlichting, on dit qu'un triangle Δ de $\tilde{\mathcal{T}}$ est distingué s'il existe un triangle Δ' de $\tilde{\mathcal{T}}$ formé d'objets⁽⁴⁾ de \mathcal{T} et tel que Δ est un facteur direct de Δ' : autrement dit, l'identité de Δ admet une factorisation de la forme :

$$\Delta \xrightarrow{s} \Delta' \xrightarrow{r} \Delta.$$

Théorème VII.4 (Balmer-Schlichting). — La catégorie $\tilde{\mathcal{T}}$ munie de l'autoéquivalence $\tilde{\Sigma}$ et des triangles distingués introduits ci-dessus est triangulée.

De plus, le foncteur canonique $i : \mathcal{T} \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}$ est triangulé.

Voir [BS01, 1.12].

Remarque VII.2. — On notera que le foncteur $\mathcal{T} \mapsto \tilde{\mathcal{T}}$ est encore l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des catégories triangulées pseudo-abéliennes dans celle des catégories triangulées.

1.2. Complexes à homotopie près. —

VII.1.2.a. — Considérons une catégorie additive \mathcal{A} . La notion de complexes (cf. IV.1.2.c) a toujours un sens dans la catégorie \mathcal{A} . Un morphisme de complexes $f : K \rightarrow L$ est encore donné par une suite de carrés commutatifs dans \mathcal{A} :

$$(VII.3) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On note encore $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes. Si K est un complexe de \mathcal{A} , on note $\Sigma K = K[1]$ le complexe tel que :

$$(K[1])^n = K^{n+1}, \quad d_{K[1]}^n = d_K^{n+1}.$$

On a ainsi défini une autoéquivalence (canonique) sur $\mathbf{C}(\mathcal{A})$.

Rappelons que le cône $\mathbf{C}(f)$ d'un morphisme de complexes f de la forme (VII.3) est donné par les formules suivantes :

$$\mathbf{C}(f) = K[1] \oplus L, \quad d_{\mathbf{C}(f)} = \begin{pmatrix} d_{K[1]} & 0 \\ f[1] & d_L \end{pmatrix}.$$

⁽³⁾Rappelons que l'on utilise cette construction en particulier dans la construction de la catégorie des motifs purs – cf. cours I, section 4.

⁽⁴⁾Autrement dit, d'objets de la forme $i(K)$ pour K un objet de \mathcal{T} .

On associe de plus à f un triangle de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$:

$$(VII.4) \quad K \xrightarrow{f} L \longrightarrow \mathbf{C}(f) \longrightarrow K[1]$$

où les deux dernières flèches sont induites respectivement par l'inclusion et la projection évidente. Notons que le cône $\mathbf{C}(f)$ est fonctoriel en f et que le triangle ci-dessus est naturel.

On associe à un complexe K de \mathcal{A} un *objet cylindre* $\text{Cyl}(K)$ en posant :

$$\text{Cyl}(K) = K \oplus K[1] \oplus K, \quad d_{\text{Cyl}(K)} = \begin{pmatrix} d_K & -1_K[1] & 0 \\ 0 & d_{K[1]} & 0 \\ 0 & 1_K[1] & d_K \end{pmatrix}.$$

Notons qu'on dispose alors des morphismes suivants :

$$\begin{aligned} \sigma : \text{Cyl}(K) = K \oplus K[1] \oplus K &\rightarrow K, \sigma = (1_K, 0, 1_K) \\ i_0 : K &\rightarrow \text{Cyl}(K) = K \oplus K[1] \oplus K \\ i_1 : K &\rightarrow \text{Cyl}(K) = K \oplus K[1] \oplus K \end{aligned}$$

où i_0 (resp. i_1) est donnée par l'inclusion sur le premier (resp. dernier) facteur direct. Ces notations coïncident avec celles du diagramme (VII.4) dans le cas où $f = 1_K$.

Trivialement, $\sigma \circ i_0 = \sigma \circ i_1 = 1_K$.

Définition VII.5. — Avec les notations précédentes, on dit que deux morphismes de complexes $f_0, f_1 : K \rightarrow L$ de \mathcal{A} sont *homotopes* s'il existe un morphisme de complexes $H : \text{Cyl}(K) \rightarrow L$ tel que $H \circ i_r = f_r$. On note cette relation : $f_0 \sim_h f_1$.

On dit qu'un morphisme de complexes $f : K \rightarrow L$ est une *équivalence d'homotopie (forte)* s'il existe un morphisme de complexes $g : L \rightarrow K$ tel que $fg \sim_h 1_L$ et $gf \sim_h 1_K$. Le morphisme g est alors appelé un *quasi-inverse* de f .

On dit qu'un complexe K est *contractile* si l'identité de K est homotope à 0.

On vérifie facilement que se donner une homotopie entre f et g revient à se donner une famille de morphismes $(h^n : K^n \rightarrow L^{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$f_0^n - f_1^n = d_L^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_K^n.$$

Exemple VII.1. — Soit $r = 0, 1$. On peut vérifier que pour tout complexe K de \mathcal{A} , le morphisme composé $i_r \circ \sigma$ est homotope à l'identité. Il en résulte que i_r est une équivalence d'homotopie avec pour quasi-inverse σ .

VII.1.2.b. — On montre que la relation d'homotopie est une relation d'équivalence compatible à l'addition et à la composition des morphismes (cf [Ver96]). On peut donc adopter la définition suivante :

Définition VII.6. — Soit \mathcal{A} une catégorie additive. On définit la catégorie homotopique $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ associée à \mathcal{A} comme la catégorie dont les objets sont les complexes de \mathcal{A} et les morphismes de K vers L sont les classes d'homotopies :

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(K, L) = \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(K, L) / \sim_h.$$

On désignera par $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ formée des complexes dont les termes sont nuls sauf en un nombre fini de degrés.

On dispose d'un foncteur plein

$$(VII.5) \quad \pi : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}).$$

La catégorie $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ est encore additive, et le foncteur précédent commute aux sommes finies. Notons aussi que l'autoéquivalence Σ de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ induit encore une autoéquivalence sur la catégorie $\mathbf{K}(\mathcal{A})$; on note simplement Σ cette dernière autoéquivalence.

Proposition VII.5. — La catégorie $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ munie du foncteur π défini ci-dessus est la localisation de la catégorie $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ par rapport à la classe des équivalences d'homotopie (cf. définition IV.3).

Démonstration. — Considérons un foncteur

$$F : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}$$

à valeur dans une catégorie \mathcal{C} qui envoie les équivalences d'homotopie sur des isomorphismes. D'après l'exemple VII.1, on obtient la relation : $F(i_0) = F(\sigma)^{-1} = F(i_1)$.

Si f et g sont deux morphismes de complexes tels que $f \sim_h g$, on déduit donc de la définition VII.5 que $F(f) = F(g)$, ce qui montre que F se factorise à travers π . Comme π est plein, cette factorisation est nécessairement unique et cela conclut. \square

Remarque VII.3. — La localisation que l'on vient de décrire est très agréable. Notons par exemple que si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur additif entre catégories triangulées, alors l'extension évidente

$$F : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{B})$$

préserve les équivalences d'homotopies. Par la propriété universelle des catégories localisées, ce foncteur induit donc de manière unique un foncteur

$$\mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{B})$$

que l'on notera tout simplement F .⁽⁵⁾

VII.1.2.c. — On peut appliquer les définition de VII.1.1.a au couple $(\mathbf{K}(\mathcal{A}), \Sigma)$. On dira qu'un triangle de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ est *distingué* s'il est isomorphe à un triangle de la forme

$$K \xrightarrow{f} L \rightarrow \mathbf{C}(f) \rightarrow K[1]$$

associé à un morphisme de complexes f , correspondant à la première ligne de (VII.4).

Proposition VII.6. — La catégorie $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, munie du foncteur de suspension Σ et des triangles distingués ci-dessus vérifie les axiomes (TR1) à (TR4) des définitions VII.1 et VII.3.

Pour ce résultat, on se réfère à [Ver96].

1.3. Localisation. —

Définition VII.7. — Considérons une catégorie triangulée \mathcal{T} et \mathcal{Q} une sous-catégorie pleine de \mathcal{T} .

On dit que \mathcal{Q} est une sous-catégorie triangulée de \mathcal{T} si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) Pour tout objet X de \mathcal{Q} et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $X[n]$ appartient à \mathcal{Q} .
- (b) Pour tout triangle distingué (VII.1), si X et Y appartiennent à \mathcal{Q} alors Z appartient à \mathcal{Q} .

On dit que \mathcal{Q} est une sous-catégorie triangulée épaisse si elle vérifie en plus la propriété suivante :

- (c) Pour objet X de \mathcal{Q} , tout facteur direct de X est un objet de \mathcal{Q} .

Une sous-catégorie triangulée admet une unique structure triangulée telle que le foncteur d'inclusion $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{T}$ est triangulé.

Exemple VII.2. — La sous-catégorie $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ est une sous-catégorie triangulée épaisse de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

Remarque VII.4. — 1. On dit encore pour (a) (resp. (b), (c)) : \mathcal{Q} est stable par suspension (resp. deux sur trois, facteur direct).

⁽⁵⁾Rappelons que ce dernier foncteur est encore le foncteur dérivé à droite et à gauche du foncteur composé $\mathbf{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{F} \mathbf{C}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{B})$ suivant la définition IV.4.

2. Si \mathcal{Q} est une sous-catégorie triangulée de \mathcal{T} telle que \mathcal{Q} admet des sommes dénombrables, alors, d'après la proposition VII.2, \mathcal{Q} est nécessairement épaisse.

VII.1.3.a. — Considérons une catégorie triangulée \mathcal{T} ainsi qu'une sous-catégorie triangulée épaisse $\mathcal{Q} \subset \mathcal{T}$. On dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de complexes de \mathcal{A} est une \mathcal{Q} -équivalence (faible) si il existe un triangle distingué dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$$

et tel que Z est un objet de \mathcal{Q} . Notons \mathcal{W} la classe des \S -équivalences. Le théorème suivant est du à Verdier :

Théorème VII.7. — *Avec les notations précédentes, la catégorie localisée $\mathcal{T}[\mathcal{W}^{-1}]$ admet une unique structure triangulée telle que le foncteur de localisation*

$$\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}[\mathcal{W}^{-1}]$$

soit triangulé.

On vérifie facilement que la catégorie $\mathcal{T}[\mathcal{W}^{-1}]$ possède la propriété universelle suivante :

Le foncteur $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}[\mathcal{W}^{-1}]$ est l'objet initial parmi les foncteurs $F : \mathcal{T} \xrightarrow{F} \mathcal{T}'$ tels que pour tout objet X de \S , $F(X) = 0$.

Définition VII.8. — Dans la situation de la proposition précédente, on appelle quotient de \mathcal{T} par \mathcal{Q} la catégorie triangulée $\mathcal{T}[\mathcal{W}^{-1}]$. On note encore ce quotient \mathcal{T}/\mathcal{Q} .

Remarque VII.5. — Signalons que la localisation $\mathcal{T}[\mathcal{W}^{-1}]$ est particulièrement agréable à décrire : toute flèche $X \rightarrow Y$ de cette catégorie se représente sous la forme

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ g \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array}$$

où g est une \mathcal{Q} -équivalence. Plus précisément, la localisation de \mathcal{T} par \mathcal{W} admet *un calcul des fractions à gauche* suivant la définition de Gabriel et Zisman (cf [GZ67]). Pour ce résultat, on renvoie le lecteur à [Ver96].

VII.1.3.b. — Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $H^n : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ le foncteur qui à un complexe associe son n -ième objet de cohomologie. Notons que ce foncteur préserve les équivalences d'homotopie et induit donc un unique foncteur

$$H^n : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}.$$

Notons par ailleurs que H^0 est un foncteur homologique.

Un complexe K de \mathcal{A} est dit *acyclique* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(K)$ est nul. La sous-catégorie pleine \mathcal{Q} de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ formée des objets acycliques est alors une sous-catégorie triangulée épaisse.

Un morphisme de complexes $f : K \rightarrow L$ est un *quasi-isomorphisme* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(f)$ est un isomorphisme. Il revient au même de demander que $\mathbf{C}(f)$ est acyclique.

Suivant la définition IV.3, on définit la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} comme la localisation de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ par rapport à la classe des quasi-isomorphismes.

De ces définitions, il résulte formellement que

$$\mathbf{D}(\mathcal{A}) = \mathbf{K}(\mathcal{A})/\mathcal{Q}$$

Corollaire VII.7.1. — *Considérons les notations précédentes.*

Alors, la catégorie $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ admet une unique structure de catégorie triangulée telle que le foncteur canonique

$$\mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$$

soit triangulé.

2. Motifs géométriques effectifs

2.1. Définition. — Suivant Morel et Voevodsky, on introduit la définition suivante :

Définition VII.9. — Considérons un carré cartésien de schémas :

$$(VII.6) \quad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{k} & V \\ g \downarrow & \Delta & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

On dit que Δ est Nisnevich distingué si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. f est un morphisme étale.
2. j est une immersion ouverte.
3. Si Z désigne le complémentaire de X dans U , munie de sa structure réduite de sous-schéma, le morphisme $f^{-1}(Z) \rightarrow Z$ induit par f est un isomorphisme.

On dit que Δ est Zariski distingué si les conditions précédentes sont vérifiées et que f est en outre une immersion ouverte.

VII.2.1.a. — Considérons un schéma régulier S et la catégorie additive \mathcal{L}_S^{cor} introduite dans le cours précédent.

On note \mathcal{V}_S la plus petite sous-catégorie triangulée épaisse de $\mathbf{K}^b(\mathcal{L}_S^{cor})$ contenant les complexes de la forme suivante :

1. *Homotopie.*— Pour tout S -schéma lisse X , si $p : \mathbb{A}_X^1 \rightarrow X$ désigne la projection canonique de la droite affine sur X ,

$$\dots 0 \rightarrow [\mathbb{A}_X^1] \xrightarrow{p} [X] \rightarrow 0 \dots$$

2. *Propriété BG.*— Pour tout carré Nisnevich distingué Δ de la forme (VII.1),

$$\dots 0 \rightarrow [W] \xrightarrow{\begin{pmatrix} g \\ -k \end{pmatrix}} [U] \oplus [V] \xrightarrow{(j,f)} [X] \rightarrow 0 \dots$$

Définition VII.10. — Avec les notations précédentes, on définit la catégorie des motifs géométriques effectifs sur S comme l'enveloppe pseudo-abélienne de la catégorie triangulée $\mathbf{K}^b(\mathcal{L}_S^{cor})/\mathcal{V}_S$. On la note $DM_{gm}^{eff}(S)$.

Un morphisme de complexes de \mathcal{L}_S^{cor} qui est un isomorphisme dans DM_{gm}^{eff} sera appelée une \mathcal{V} -équivalence.

Les exemples de \mathcal{V} -équivalences sont donc des équivalences d'homotopie ou encore des morphismes dont le cône est dans \mathcal{V}_S . Notons que la catégorie $DM_{gm}^{eff}(S)$ est par définition la localisation (voir définition IV.3) de la catégorie $\mathbf{C}(\mathcal{L}_S^{cor})$ par rapport aux \mathcal{V} -équivalences.

Remarque VII.6. — Dans cette partie, on ne se servira jamais du fait que $DM_{gm}^{eff}(S)$ est pseudo-abélienne. On peut travailler jusqu'à la fin de cette partie directement dans la catégorie triangulée $\mathbf{K}^b(\mathcal{L}_S^{cor})/\mathcal{V}_S$.

VII.2.1.b. — On notera $M_S(X)$ l'objet de $DM_{gm}^{eff}(S)$ représenté par le complexe égal à X concentré en degré 0, et on l'appellera le *motif* de X . On a ainsi défini un foncteur⁽⁶⁾

$$M_S : \mathcal{L}_S^{cor} \rightarrow DM_{gm}^{eff}(S).$$

Notons ainsi que si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme fini pseudo-dominant dans \mathcal{L}_S , on lui associe un morphisme

$$f^* := ({}^t f)^* : M_S(X) \rightarrow M_S(Y)$$

⁽⁶⁾Ce foncteur est covariant, contrairement à la convention concernant les motifs purs – cf. cours I, section 4.

suivant la construction de VI.1. Les formules des propositions VI.6 et VI.7 induisent de plus des formules analogues dans DM_{gm}^{eff} .

On déduit de plus du choix effectué dans VII.2.1.a les propriétés suivantes :

Proposition VII.8. — 1. *Considérons les notations du premier point de loc. cit. Alors, le morphisme de complexes de \mathcal{L}_S^{cor} concentrés en degré 0*

$$[\mathbb{A}_X^1] \xrightarrow{p_*} [X]$$

est une \mathcal{V} -équivalence.

2. *Considérons les notations du deuxième point de loc. cit. Alors, le morphisme de complexes de \mathcal{L}_S^{cor}*

$$\epsilon : C \left([W] \xrightarrow{\begin{pmatrix} g \\ -k \end{pmatrix}} [U] \oplus [V] \right) \rightarrow [X]$$

égal en degré 0 au morphisme $[U] \oplus [V] \xrightarrow{(j,f)} [X]$ est une \mathcal{V} -équivalence.

Démonstration. — Pour chaque point, on constate que le cône du morphisme envisagé est exactement égal au complexe apparaissant dans le point correspondant de *loc. cit.* \square

Corollaire VII.8.1. — 1. *Avec les notations du premier point de la proposition précédente le morphisme $M_S(\mathbb{A}_X^1) \xrightarrow{p_*} M_S(X)$ est un isomorphisme dans $DM_{gm}^{eff}(S)$.*

2. *Avec les notations du deuxième point de la proposition précédente, si l'on définit ∂_Δ comme le morphisme composé :*

$$[X] \xrightarrow{\epsilon^{-1}} C \left([W] \rightarrow [U] \oplus [V] \right) \rightarrow [W][1]$$

le triangle suivant

$$M_S(W) \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_* \\ -k_* \end{pmatrix}} M_S(U) \oplus M_S(V) \xrightarrow{(j_*, f_*)} M_S(X) \xrightarrow{\partial_\Delta} M_S(W)[1]$$

est distingué dans $DM_{gm}^{eff}(S)$.

La première propriété des motifs est appelée l'invariance par homotopie et le triangle distingué du deuxième point est appelé le triangle de Brown-Gersten associé à Δ . Lorsque le carré Δ est Zariski distingué, on l'appelle encore le triangle de Mayer-Vietoris.

2.2. Motifs relatifs. —

Définition VII.11. — Soit S un schéma régulier et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme dans \mathcal{L}_S .

On définit le motif relatif associé à f comme l'objet de $DM_{gm}^{eff}(S)$ représenté par le cône du morphisme de complexes de \mathcal{L}_S^{cor}

$$[Y] \xrightarrow{p} [X].$$

On le note $M_S(Y \xrightarrow{p} X)$, ou encore simplement $M_S(p)$.

On dispose donc d'un triangle distingué canonique

$$(VII.7) \quad M_S(Y) \xrightarrow{p_*} M_S(X) \rightarrow M_S(f) \rightarrow M_S(Y)[1]$$

Notons que triangle est *naturel* par rapport au morphisme f : tout diagramme commutatif de \mathcal{L}_S

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{q} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

induit un morphisme de triangle

$$\begin{array}{ccccccc} M_S(T) & \xrightarrow{q_*} & M_S(Z) & \longrightarrow & M_S(g) & \longrightarrow & M_S(T)[1] \\ g_* \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow & & \downarrow \\ M_S(Y) & \xrightarrow{p_*} & M_S(X) & \longrightarrow & M_S(f) & \longrightarrow & M_S(Y)[1] \end{array}$$

Exemple VII.3. — Considérons un schéma $p : X \rightarrow S$ dans \mathcal{L}_S . On considèrera particulièrement la définition précédente dans les cas suivants :

1. Soit $s : S \rightarrow X$ un S -point de X/S .⁽⁷⁾ Alors, on pose $\tilde{M}_S(X, s) := M_S(s)$. On dit encore que (X, s) est un S -schéma pointé ; $\tilde{M}_S(X, s)$ est le motif réduit associé au S -schéma pointé X . Cela résulte du fait que, le triangle (VII.7) dans le cas $s = f$ étant scindé,

$$M_S(X) = \tilde{M}_S(X) \oplus M_S(S).$$

2. Soit Z une partie fermée de X . On pose $U = X - Z$ munit de son unique structure de sous-schéma ouvert de X et on note $j : U \rightarrow X$ l'immersion canonique. On pose $M_{S,Z}(X) := M_S(j)$ et on l'appelle le *motif de X à support dans Z* .

VII.2.2.a. — Considérons un peu plus en détail la situation du dernier point de l'exemple précédent. Un couple (X, Z) formé d'un S -schéma lisse X et d'un fermé Z de X sera appelé une *paire fermée*.

Etant données deux paires fermées (X, Z) et (Y, T) , le motif à support est naturel par rapport aux morphismes de schémas $f : Y \rightarrow X$ tels que $Z \subset f(T)$. En effet, dans ce cas, $f(Y - T) \subset (X - Z)$ et on en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} M_S(Y - T) & \longrightarrow & M_S(Y) & \longrightarrow & M_{S,T}(Y) & \longrightarrow & M_S(Y - T)[1] \\ f'_* \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow (1) & & \downarrow \\ M_S(X - Z) & \longrightarrow & M_S(X) & \longrightarrow & M_{S,Z}(X) & \longrightarrow & M_S(X - Z)[1] \end{array}$$

où f' est la restriction évidente de f . Dans ce cas, on notera encore simplement par f_* le morphisme (1) du diagramme ci-dessus.

La proposition suivante est appelée la *propriété d'excision* des motifs :

Proposition VII.9. — *Considérons un carré Nisnevich distingué de la forme (VII.6). Soit Z le complémentaire de U dans X , et $T = f^{-1}(Z)$. Alors, le morphisme induit par f*

$$M_{S,T}(V) \rightarrow M_{S,Z}(X)$$

est un isomorphisme dans $DM_{gm}^{eff}(S)$.

Démonstration. — Considérons le morphisme canonique de triangles dans la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S^{cor})$ suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} [W] & \xrightarrow{k} & [V] & \longrightarrow & C(k) & \longrightarrow & [W][1] \\ g \downarrow & [\Delta] & \downarrow f & & \downarrow (1) & & \downarrow k[1] \\ [U] & \xrightarrow{j} & [X] & \longrightarrow & C(j) & \longrightarrow & [U][1] \end{array}$$

Alors, le cône de la flèche (1) s'identifie canoniquement avec le complexe apparaissant dans le point 2 du paragraphe VII.2.1.a. Il en résulte que la flèche (1) est une \mathcal{V} -équivalence. \square

⁽⁷⁾Autrement dit une section de p . Comme X/S est séparé, s est une immersion fermée – cf. corollaire V.3.1.

Remarque VII.7. — Dans la situation de la démonstration précédente, on exprime le fait que la flèche (1) soit une \mathcal{V} -équivalence en disant que le carré $[\Delta]$ est *homotopiquement cartésien* dans la localisation de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ par rapport aux \mathcal{V} -équivalences.

Dans ce langage, alors que le choix des triangles du point 1 dans le paragraphe VII.2.1.a impose la propriété d'homotopie, on voit que le choix des triangles du point 2 impose le fait que l'image d'un carré Nisnevich distingué est un carré homotopiquement cartésien.

On retrouvera cette notion de « carré homotopiquement cartésien » dans d'autres contextes par la suite.

2.3. Functorialité. —

VII.2.3.a. — Considérons un schéma régulier Σ , et $f : T \rightarrow S$ un morphisme de \mathcal{L}_Σ . Considérons le foncteur additif $f^* : \mathcal{L}_S^{cor} \rightarrow \mathcal{L}_T^{cor}$ introduit dans la définition VI.7. Considérant son extension évidente :

$$f^* : \mathbf{C}(\mathcal{L}_S^{cor}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{L}_T^{cor}).$$

D'après la remarque VII.3, comme f^* est additif, ce foncteur respecte les équivalences d'homotopie. Mais par ailleurs, d'après la définition donnée dans VII.2.1.a, f^* envoie un objet de \mathcal{V}_S sur un objet de \mathcal{V}_T . On en déduit qu'il préserve les \mathcal{V} -équivalences. Par définition de la localisation, on en déduit donc un unique foncteur

$$f^* : DM_{gm}^{eff}(S) \rightarrow DM_{gm}^{eff}(T).$$

Dans le cas où f est un morphisme lisse séparé de type fini, le même procédé induit de manière unique un foncteur

$$f_{\#} : DM_{gm}^{eff}(T) \rightarrow DM_{gm}^{eff}(S).$$

La proposition suivante résulte trivialement de cette construction :

Proposition VII.10. — *Soit $f : T \rightarrow S$ un morphisme de \mathcal{L}_Σ .*

1. *Pour tout schéma X de \mathcal{L}_S , $f^*(M_S(X)) = M_T(X \times_S T)$.*

Supposons que f est lisse séparé de type fini. Alors, de plus :

2 *Pour tout schéma Y de \mathcal{L}_T , $f_{\#}(M_T(Y)) = M_S(X)$.*

3 *Le foncteur $f_{\#} : DM_{gm}^{eff}(T) \rightarrow DM_{gm}^{eff}(S)$ est adjoint à gauche du foncteur f^* .*

Ces propriétés résultent toutes des propriétés analogues des foncteurs correspondants dans les catégories $\mathcal{L}_?^{cor}$ – ou plutôt de leur extension canonique à $\mathbf{C}(\mathcal{L}_?^{cor})$.

VII.2.3.b. — Considérons un carré cartésien de schémas

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{q} & T \\ g \downarrow & \Delta & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

dans \mathcal{L}_Σ tel que p est lisse séparé de type fini.

On construit comme dans le paragraphe VI.4.3.b un *morphisme d'échange* entre foncteurs de la forme $DM_{gm}^{eff}(X) \rightarrow DM_{gm}^{eff}(T)$ par la même formule :

$$Ex(\Delta_{\#}^*) : q_{\#}g^* \xrightarrow{a'(p_{\#}, p^*)} q_{\#}g^*p^*p_{\#} \simeq q_{\#}q^*f^*p_{\#} \xrightarrow{a(q_{\#}, q^*)} f^*p_{\#}.$$

grâce aux morphismes d'unité et de counité des adjonctions considérées – cf. point 3 de la proposition précédente.

Proposition VII.11. — *Avec les notations précédentes, la transformation naturelle $Ex(\Delta_{\#}^*)$ est un isomorphisme de foncteurs.*

A nouveau, cela résulte trivialement de la proposition correspondante VI.15.

Remarque VII.8. — Cette proposition est l’analogie pour les motifs du changement de base lisse pour les complexes constructibles de faisceaux de torsion première à la caractéristique résiduelle.

2.4. Structure monoïdale. —

VII.2.4.a. — Rappelons que l’on a défini une structure monoïdale symétrique sur \mathcal{L}_S^{cor} (cf VI.9). Comme on l’a déjà vu dans le cas des modules, on peut étendre cette structure monoïdale à la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S^{cor})$ (cf IV.1.2.d). On vérifie facilement que le bifoncteur ainsi obtenu préserve les équivalences d’homotopie forte. Il induit donc un unique bifoncteur :

$$(VII.8) \quad \otimes^{tr} : \mathcal{K}^b(\mathcal{L}_S^{cor}) \times \mathcal{K}^b(\mathcal{L}_S^{cor}) \rightarrow \mathcal{K}^b(\mathcal{L}_S^{cor})$$

qui fait de la catégorie $\mathcal{K}^b(\mathcal{L}_S^{cor})$ une catégorie monoïdale symétrique.

Proposition VII.12. — *Le bifoncteur défini ci-dessus préserve les \mathcal{V} -équivalences en chacun de ses termes.*

Démonstration. — Par symétrie, il suffit de montrer que pour un complexe borné K à coefficients dans \mathcal{L}_S^{cor} , le foncteur $K \otimes^{tr} -$ préserve les \mathcal{V} -équivalences.

Le complexe K étant borné, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $K^i = 0$ si $i > n$. Considérons le complexe $\tau_{\leq n}^{naif}(K)$ égal à

$$\dots \rightarrow K^{n-1} \xrightarrow{d_K^{n-1}} K^n \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Notons que K est alors égal au cône de la flèche canonique

$$\tau_{\leq n}^{naif}(K) \rightarrow K^n[-n]$$

où $K^n[-n]$ désigne le complexe concentré en (au plus) un seul degré n avec pour n -ème terme K^n . On dispose donc d’un triangle distingué canonique dans $\mathcal{K}^b(\mathcal{L}_S^{cor})$ de la forme :

$$(VII.9) \quad \tau_{\leq n}^{naif}(K) \rightarrow K^n[-n] \rightarrow K \rightarrow \tau_{\leq n}^{naif}(K)[1]$$

Définissons la longueur du complexe K comme le cardinal du plus grand intervalle $[a, b]$ de \mathbb{Z} tel que $K^a \neq 0$ et $K^b \neq 0$. On montre que $K \otimes^{tr} -$ préserve les \mathcal{V} -équivalences par récurrence sur la longueur de K . En utilisant les triangles de la forme (VII.9), on se ramène alors au cas où le complexe K est concentré en un seul degré. On peut supposer que K est concentré en degré 0; autrement dit $K = [Y]$ pour un schéma Y dans \mathcal{L}_S . Mais alors, le résultat vient du fait que les complexes des points 1 et 2 du paragraphe VII.2.1.a sont stables par produit avec le S -schéma Y . \square

Remarque VII.9. — La méthode de la preuve précédente, basée sur les triangles de la forme (VII.9), s’appelle le *procédé de dévissage*.

Corollaire VII.12.1. — *Le produit tensoriel (VII.8) induit un unique produit tensoriel \otimes_S sur $DM_{gm}^{eff}(S)$ qui fait de cette catégorie une catégorie monoïdale symétrique.*

Notons que par définition, le foncteur motif

$$M_S : \mathcal{L}_S^{cor} \rightarrow DM_{gm}^{eff}(S)$$

est monoïdal. En particulier, l’unité de $DM_{gm}^{eff}(S)$ est le motif $M_S(S)$. On le notera simplement $\mathbb{1}_S$ par la suite. On déduit formellement de la proposition VI.10 le corollaire suivant :

Corollaire VII.12.2. — *Soit $p : X \rightarrow S$ un morphisme étale fini.*

Alors, le motif $M_S(X)$ est fortement autodual dans $DM_{gm}^{eff}(S)$ (voir définition VI.5).

Si $\delta : X \rightarrow X \times_S X$ désigne l'immersion diagonale, cette dualité est définie par les morphismes suivants :

$$\begin{aligned} M_S(X) \otimes_S M_S(X) &= M_S(X \times_S X) \xrightarrow{\delta^*} M_S(X) \xrightarrow{p^*} \mathbb{1}_S. \\ \mathbb{1}_S \xrightarrow{p^*} M_S(X) &\xrightarrow{\delta_*} M_S(X \times_S X) = M_S(X) \otimes_S M_S(X). \end{aligned}$$

VII.2.4.b. — Soit $f : T \rightarrow S$ un morphisme lisse séparé de type fini. D'après la proposition VII.10, pour tout motif K sur S , $f_{\#}f^*(K) = K \otimes_S M_S(T)$. On en déduit la proposition suivante :

Proposition VII.13. — Soit $(U_i \rightarrow S)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de S . Posons $W = \sqcup_{i \in I} U_i$ et notons $f : W \rightarrow S$ le morphisme induit par le recouvrement précédent.

Alors, $f^* : DM_{gm}^{eff}(S) \rightarrow DM_{gm}^{eff}(T)$ est conservatif.⁽⁸⁾

Démonstration. — Il suffit de montrer que le foncteur $f_{\#}f^*(-) = M_S(W) \otimes -$ est conservatif. On déduit cela par récurrence sur le cardinal de I à partir des triangles distingués du point 2 du corollaire VII.8.1. \square

VII.2.4.c. — On dit qu'un morphisme de schémas $p : E \rightarrow X$ de type fini est un fibré vectoriel s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$ de X et pour tout indice $i \in I$, un entier $n_i \geq 0$ et un isomorphisme de U_i -schémas :

$$E \times_X U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_{U_i}^{n_i}.$$

Notons que si X est un S -schéma lisse (resp. séparé), E est un S -schéma lisse (resp. séparé). Comme corollaire de la proposition précédente, on obtient aisément :

Corollaire VII.13.1. — Soit X un schéma dans \mathcal{L}_S et $p : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel. Alors, le morphisme induit

$$M_S(E) \xrightarrow{p^*} M_S(X)$$

est un isomorphisme dans $DM_{gm}^{eff}(S)$.

Démonstration. — En effet, d'après la définition précédente, le corollaire précédent nous ramène à montrer cela dans le cas où $E = \mathbb{A}_X^n$, ce qui résulte trivialement du corollaire VII.8.1. \square

VII.2.4.d. — Soit $f : T \rightarrow S$ un morphisme lisse séparé de type fini. En utilisant le même procédé que dans le paragraphe VI.4.3.c, on définit pour tout objet K (resp. L) de $DM_{gm}^{eff}(S)$ (resp. $DM_{gm}^{eff}(T)$) un morphisme canonique

$$Ex(\otimes, f_{\#}^*) : f_{\#}(f^*(K) \otimes_T L) \rightarrow K \otimes_S f_{\#}(L).$$

On déduit alors formellement de la proposition VI.16 la proposition suivante :

Proposition VII.14. — Avec les notations précédentes, le morphisme canonique $Ex(\otimes, f_{\#}^*)$ est un isomorphisme.

Références

- [BS01] P. BALMER & M. SCHLICHTING – « Idempotent completion of triangulated categories », *J. Algebra* **236** (2001), no. 2, p. 819–834.
- [GZ67] P. GABRIEL & M. ZISMAN – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.
- [Nee01] A. NEEMAN – *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 148, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

⁽⁸⁾Autrement dit, un objet K (resp. morphisme φ) de $DM_{gm}^{eff}(S)$ est nul (resp. un isomorphisme) si et seulement si son pullback par f est nul (resp. un isomorphisme).

- [Ver96] J.-L. VERDIER – « Des catégories dérivées des catégories abéliennes », *Astérisque* (1996), no. 239, p. xii+253 pp. (1997), With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.

2009-2010

FRÉDÉRIC DÉGLISE, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail* : deglise@math.univ-paris13.fr
Url : <http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/>