## Table des matières



# COURS VIII
# THÉORIE DES TOPOS ET FAISCEAUX NISNEVICH

Dans toute cette partie, on fixe une catégorie essentiellement petite $\mathscr{S}$.[(1)]

## 1. Préfaisceaux

On note $\mathscr{E}ns$ la catégorie des ensembles.

***Définition VIII.1***. — Un préfaisceau sur $\mathscr{S}$ est un foncteur contravariant

$$F : \mathscr{S}^{op} \to \mathscr{E}ns.$$

Un morphisme de préfaisceaux sur $\mathscr{S}$ est une transformation naturelle. On note $\mathrm{PFx}(\mathscr{C})$ la catégorie des préfaisceaux sur $\mathscr{S}$.

***Exemple VIII.1***. — On a déjà vu cette définition dans le cas où $\mathscr{S}$ est la catégorie des ouverts d'un espace topologique (par. II.1.2.a). On l'utilisera particulièrement dans le cas où $\mathscr{S}$ est la catégorie essentiellement petite $\mathscr{L}_S$ des $S$-schémas lisses séparés de type fini.

***VIII.1.0.a***. — Si $X$ est un objet de $\mathscr{S}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, X)$ définit un préfaisceau, que l'on appelle le *préfaisceau représenté par* $X$. On dit qu'un préfaisceau $F$ est *représentable* s'il existe un objet $X$ de $\mathscr{S}$ et un isomorphisme $F \simeq \gamma_X$. Rappelons le lemme de Yoneda :

***Lemme VIII.1***. — *Pour tout préfaisceau $F$ sur $\mathscr{S}$ et tout objet $X$ de $\mathscr{S}$, le morphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, X), F) \to F(X), \eta \mapsto \eta_X(1_X)$$

*est un isomorphisme.*

En conséquence, le foncteur

$$\mathscr{S} \to \mathrm{PFx}(\mathscr{S}), X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, X)$$

est pleinement fidèle. On peut donc identifier, et c'est ce que l'on fera par la suite, un objet $X$ de $\mathscr{S}$ avec le préfaisceau $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, X)$ qu'il représente.

[(1)] Plus généralement, on peut utiliser la théorie des *univers* exposée dans [**AGV73**, I] pour fonder la théorie des topos.

***VIII.1.0.b***. — Tout comme la catégorie des ensembles, la catégorie des préfaisceaux admet des petites limites projectives et inductives : celles-ci se calculent termes à termes[2]. Notons le corollaire immédiat du lemme de Yoneda :

***Corollaire VIII.1.1***. — *Soit $F$ un préfaisceau sur $\mathscr{S}$.*

*On note $\mathscr{S}/F$ la catégorie ayant pour :*

– *objets : les morphismes de préfaisceaux $X \to F$ où $X$ est un objet de $\mathscr{S}$.*

– *morphismes de $X'/F \to X/F$ : les diagrammes commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr] \arrow[dr] & & X. \arrow[dl] \\ & F & \end{tikzcd}$$

*Alors, la flèche canonique :*

$$\left( \varinjlim_{X/F \in \mathscr{S}/F} X \right) \longrightarrow F$$

*est un isomorphisme.*

## 2. Cribles

***VIII.2.0.c***. — Comme on l'a déjà rappelé pour les limites, la catégorie des préfaisceaux sur $\mathscr{S}$ hérite de certaines propriétés de la catégorie des ensembles. Ainsi, étant donnés deux préfaisceaux $F$ et $G$ sur $\mathscr{S}$, on dira que $G$ est un sous-préfaisceau de $F$ si pour tout objet $X$ de $\mathscr{S}$, $G(X)$ est un sous-ensemble de $F(X)$. On parlera de même de la réunion et de l'intersubsection d'une famille de sous-préfaisceaux.

***Définition VIII.2***. — Soit $X$ un objet de $\mathscr{S}$. Un crible de $X$ est un sous-préfaisceau $R$ du préfaisceau représenté par $X$.

La relation d'inclusion des sous-préfaisceaux de $X$ induit une relation d'ordre sur les cribles de $X$. Si $R$ et $R'$ sont deux cribles de $X$, on dira que $R$ est *plus fin* que $R'$ si $R \subset R'$.

Un tel crible $R$ est encore équivalent à la donnée d'une classe $R_0$ de flèches de $\mathscr{S}$ telle que :

1. Tout élément $f$ de $R_0$ a pour but $X$.
2. Pour toute flèche $f$ de $R_0$ et toute flèche $g$ de $\mathscr{S}$, $f \circ g$ appartient à $R_0$.

On passe de ce point de vue au point de vue de la définition en associant à la classe $R_0$ le préfaisceau qui a un objet $Y$ de $\mathscr{S}$ associe l'ensemble des flèches de $R_0$ ayant pour source $Y$. La notation $f \in R$ fera référence à l'interprétation du crible $R$ en tant que classe. Notons au passage que $R_0$ coincide avec les objets de la catégorie $\mathscr{S}/R$ – voir corollaire VIII.1.1. Cette catégorie est d'ailleurs une sous-catégorie pleine de $\mathscr{S}/X$.

***Exemple VIII.2***. — Considérons une flèche $f : W \to X$. On dit que $f$ est un *épimorphisme* si pour tout couple de flèches $(g, g') : X \to X'$, $g \circ f = g' \circ f$ implique $g = g'$. Il revient au même de demander que la flèche induite sur les préfaisceaux

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, X)$$

est un monomorphisme. Autrement dit, $W$ est un crible de $X$.

---

[2] On peut exprmier cela en disant que, pour tout objet $X$ de $\mathscr{S}$, le foncteur $\mathrm{PFx}(\mathscr{S}) \to \mathscr{S}, F \mapsto F(X)$ commute aux limites projectives et aux limites inductives.

***Définition VIII.3***. — Soit $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ une famille de flèches de $\mathscr{S}$. On définit le crible engendrée par la famille $(f_i)$ comme l'ensemble des flèches

$$\{f : Y \to X \mid \exists i \in I, h_i : Y \to X_i, f = f_i h_i\}$$

(considérée à isomorphisme près par rapport à la source $Y$).

On le note $\langle X_i \to X, i \in I\rangle$.

***Exemple VIII.3***. — Si $\mathscr{S}$ est la catégorie $\mathscr{O}\mathrm{uv}(T)$ des ouverts d'un espace topologique $T$ et $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $T$, le crible $\langle U_i \to T, i \in I\rangle$ est encore l'ensemble des recouvrements ouverts $(V_i)_{i\in I}$ de $T$ qui sont plus fin que $(U_i)$.

***VIII.2.0.d***. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme de $\mathscr{S}$, et $R$ un crible de $X$. Le produit fibré $R \times_X Y$ est bien définit dans la catégorie $\mathrm{PFx}(\mathscr{S})$. De plus, c'est un crible de $Y$ qui correspond à la classe suivante :

$$\{g : W \to Y \mid \exists f \circ g \in R\}$$

On notera ce crible $R^f$ et on l'appellera le crible de $X$ obtenu par changement de base suivant $f$.

***Exemple VIII.4***. — Supposons que $\mathscr{S}$ admette des produits fibrés. Alors, si $R$ est le crible représenté par un épimorphisme $p : W \to X$ de $\mathscr{S}$, le crible $R^f$ est le préfaisceau représenté par le produit fibré $W \times_X Y$ dans $\mathscr{S}$. S'il existe une famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ de flèches de $\mathscr{S}$ telle que $R = \langle X_i \to X, i \in I\rangle$, alors $R^f = \langle X_i \times_X Y \to Y, i \in I\rangle$

***VIII.2.0.e***. — Si $f : Y \to X$ est un flèche de $R$, il est immédiat que $R^f$ coincide avec le préfaisceau représenté par $Y$ (vu comme crible trivial de $Y$). On déduit de cette remarque et du lemme de Yoneda le lemme suivant :

***Lemme VIII.2***. — *Soit $R$ un crible de $X$. Alors, la flèche canonique*

$$\left(\varinjlim_{(Y\to X)\in R} Y\right) \longrightarrow R$$

*est un isomorphisme, où la limite inductive est indexée par la catégorie $\mathscr{S}/R$.*

## 3. Sites et topologies de Grothendieck

***Définition VIII.4***. — Une *topologie (de Grothendieck)* $T$ sur la catégorie $\mathscr{S}$ est la donnée pour chaque objet $X$ de $\mathscr{S}$, d'un ensemble $T(X)$ de cribles de $X$ tels que :

(T1) Si $R \in T(X)$, pour toute flèche $f : Y \to X$, $R^f \in T(Y)$

(T2) Soit $R'$ un crible de $X$ et $R$ un élément de $T(X)$. Si pour toute flèche $f : Y \to X$ de $R$, le crible ${R'}^f$ appartient à $T(Y)$, alors $R' \in T(X)$

(T3) Le crible trivial $X$ appartient à $T(X)$.

Les éléments de $T(X)$ sont appelés les *cribles $T$-couvrants* de $X$.

On dit encore que le couple $(\mathscr{S}, T)$ est un *site*.

La relation d'ordre sur les cribles de $X$ induit une relation d'ordre sur $T(X)$. Les axiomes précédents entrainent la propriété suivante :

***Lemme VIII.3***. — *Soit $(\mathscr{S}, T)$ un site. Alors, pour tout objet $X$ de $\mathscr{S}$, et tous cribles $R$, $R'$ de $X$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Si $R$ et $R'$ sont $T$-couvrants, $R \cap R'$ est $T$-couvrant.*
2. *Supposons que $R$ soit $T$-couvrant. Alors, si $R$ est plus fin que $R'$, $R'$ est $T$-couvrant.*
3. *L'ensemble ordonné $T(X)$ est filtrant.*

*Démonstration.* — La troisième propriété est conséquence des deux autres, et du fait que $T(X)$ est non vide à cause de l'axiome (T3).

Considérons la première propriété. Soit $f : Y \to X$ un flèche de $R$. Alors, d'après la remarque du paragraphe VIII.2.0.e, $(R \cap R')^f = Y$ ; c'est un crible $T$-couvrant de $Y$ et on conclut d'après (T2).

Considérons la deuxième propriété, $R \subset R'$. Soit $f : Y \to X$ une flèche de $R$. Appliquant à nouveau *loc. cit.* $R'^f = Y$ est un crible couvrant de $Y$. L'axiome (T2) permet à nouveau de conclure. □

***Exemple VIII.5.*** — Soit $X$ un espace topologique, $\mathscr{O}\mathrm{uv}(X)$ la catégorie des ouverts de $X$. Si l'on note $T(U)$ l'ensemble des cribles d'un ouvert $U$ de $X$ de la forme $\langle U_i \to U, i \in I\rangle$ pour un recouvrement ouvert $(U_i)$ de $U$ (exemple VIII.3), alors $T$ est un topologie sur $\mathscr{O}\mathrm{uv}(X)$. Lorsque $X$ est un schéma, on appelle cette topologie la *topologie de Zariski* ; on note $X_{Zar}$ le site correspondant.

***Définition VIII.5.*** — Si $T$ et $T'$ sont deux topologies sur $\mathscr{S}$, on dira que $T$ est plus fine que $T'$ si pour tout objet $X$ de $\mathscr{S}$, $T(X) \subset T'(X)$.

***VIII.3.0.f.*** — Si $(t_i)_{i\in I}$ est une famille de topologies sur $\mathscr{S}$, la topologie $T$ définie par la relation

$$T(X) = \cap_{i\in I} t_i(X)$$

vérifie les axiomes (T1), (T2) et (T3). C'est donc une topologie, borne inférieure des topologies $(t_i)_{i\in I}$.

Ainsi, il existe une unique topologie $T'$ qui soit plus fine que toutes les topologies $t_i$, et qui soit minimale pour cette propriété : c'est la borne inférieure de toutes les topologies plus fines que les topologies $t_i$. On l'appelle la *topologie engendrée par les* $(t_i)_{i\in I}$.

***Exemple VIII.6.*** — La topologie sur $\mathscr{S}$ définie par $T(X) = \{X\}$ (resp. $T(X) = \{\text{cribles de } X\}$) est la moins fine (resp. la plus fine) de toutes les topologies sur $\mathscr{S}$. On l'appelle la *topologie grossière* (resp. *topologie discrète*).

***Définition VIII.6.*** — Une pré-topologie sur $\mathscr{S}$ est la donnée pour chaque objet $X$ de $\mathscr{S}$ d'un ensemble $C(X)$ de familles de morphismes de but $X$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(PT1) Si la famille $(U_i \to X)_{i\in I}$ appartient à $C(X)$, pour toute flèche $f : Y \to X$ de $\mathscr{S}$, pour tout indice $i \in I$, le produit fibré $U_i \times_X Y$ existe dans $\mathscr{S}$ et la famille $(U_i \times_X Y \to Y)_{i\in I}$ appartient à $C(Y)$.

(PT2) Soit $(U_i \to X)_{i\in I}$ un élément de $C(X)$, et pour tout $i \in I$, $(V_{ij} \to U_i)_{j\in J_i}$ un élément de $C(U_i)$, alors, si l'on note $J$ la some disjointe des ensembles $J_i$, la famille

$$(V_{ij} \to U_i \to X)_{(i,j)\in J}$$

est un élément de $C(X)$.

(PT3) La famille $(1_X)$ appartient à $C(X)$.

Les éléments de $C(X)$ sont appelés les $C$-*recouvrements* de $X$ – ou simplement les recouvrements lorsque $C$ est claire.

***VIII.3.0.g.*** — Considérons une pré-topologie $C$ sur $\mathscr{S}$. Soit $X$ un objet de $\mathscr{S}$ et $R$ un crible de $X$. On dira que $R$ est $C$-élémentaire si il existe un $C$-recouvrement $(X_i)_{i\in I}$ de $X$ tel que

$$R = \langle X_i \to X, i \in I\rangle.$$

On note $t_C$ la plus fine des topologies telle que tout crible $C$-élémentaire est $t_C$-couvrant (cette topologie existe d'après le paragraphe VIII.3.0.f). On peut caractériser cette topologie comme suit :

***Proposition VIII.4.*** — *Considérons les notations précédentes. Soit $X$ un objet de $\mathscr{S}$ et $R$ un crible de $X$. Alors, les conditions suivantes sonts équivalentes :*

(i) $R \in t_C(X)$

(ii) *Il existe un crible $C$-élémentaire $R'$ plus fin que $R$.*

*Démonstration.* — On note $T'(X)$ l'ensemble des cribles de $X$ contenant un crible $C$-élémentaire. Par définition de $T$, il suffit de vérifier que $T'$ est une topologie sur $\mathscr{S}$. L'axiome (T1) (resp. (T3)) résulte clairement de l'axiome (PT1) (resp. (PT3)) de la pré-topologie $C$. Compte tenu de l'exemple VIII.4, l'axiome (T2) résulte lui aussi de l'axiome analogue (PT2). □

Dans les conditions de la proposition, on dira simplement que $t_C$ est la topologie engendrée par la pré-topologie $C$.

***Remarque VIII.1.*** — On peut voir les $C$-recouvrements de $X$ comme une catégorie : un morphisme d'un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ vers un recouvrement $(V_j)_{j\in J}$ est la donné d'une application $\phi : I \to J$ et pour tout $i \in I$, le donnée d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[rr] \arrow[dr] & & V_{\phi(i)} \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}.$$

On fera attention toutefois que la catégorie $C(X)$ ainsi définie n'est pas filtrante en général : en effet, on ne peut pas nécessairement égaliser deux flèches entre deux recouvrements fixés de $X$.[3] C'est l'avantage des cribles sur les recouvrements. On peut toutefois introduire une relation de *pré-ordre* sur les recouvrements en considérant la relation d'ordre sur les cribles associés. L'ensemble pré-ordonné correspondant devient alors filtrant.

***VIII.3.0.h.*** — Considérons un schéma noethérien $S$. Notons que la catégorie $\mathscr{L}_S$ des $S$-schémas séparés de type fini est essentiellement petite.

***Définition VIII.7.*** — Soit $X$ un schéma dans $\mathscr{L}_S$.

On dit qu'une famille $(p_i : V_i \to X)_{i\in I}$ de morphismes de $\mathscr{L}_S$ est un recouvrement Nisnevich si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $i \in I$, $p_i$ est étale.
2. Pour tout point $x$ de $X$, il existe un indice $i \in I$ et un point $y$ de $V_i$ tel que $x = p_i(y)$ et l'extension résiduelle $\kappa(y)/\kappa(x)$ induite par $p_i$ est triviale.

On vérifie aisément que les recouvrements Nisnevich forment une pré-topologie sur $\mathscr{L}_S$.

***Définition VIII.8.*** — La topologie définie par la pré-topologie des recouvrements Nisnevich est appelée la topologie *Nisnevich* sur $\mathscr{L}_S$. On la notera *Nis*.

***Remarque VIII.2.*** — Si dans la définition des recouvrements précédente, on remplace (i) par la condition que $p_i$ est une immersion ouverte, on obtient la topologie de Zariski *Zar* sur $\mathscr{L}_S$. Si on remplace (ii) par la condition que la famille $(p_i)$ est épimorphisme, on obtient la topologie étale $\acute{E}t$ sur $\mathscr{L}_S$. La topologie $\acute{E}t$ est plus fine que *Nis* qui est plus fine que *Zar*.

***Remarque VIII.3.*** — Comme $S$ est noethérien, tout recouvrement Nisnevich admet un recouvrement plus fin formé d'une famille finie. On peut vérifier de là que la topologie de Nisnevich est encore engendrée par la prétopologie dont les recouvrements d'un schéma $X$ de $\mathscr{L}_S$ sont des deux formes suivantes :

1. $(p : W \to X)$ est un recouvrement Nisnevich a un seul élément.
2. $(j : U \to X, k : V \to X)$ où $j$ et $k$ sont des immersions ouvertes telles que $X = U \amalg V$.

[3] Ce problème n'apparaît par dans le site $X_{Zar}$ car il n'existe qu'un seul morphisme entre deux objets de $\mathscr{O}\mathrm{uv}(X)$.

## 4. Faisceaux sur un site

Dans ce qui suit, on considère la catégorie $\mathscr{S}$ équipée d'une topologie $T$. On note simplement $\mathscr{S}$ le site correspondant.

***Définition VIII.9.*** — Soit $F$ un préfaisceau sur $\mathscr{S}$.

On dit que $F$ est un préfaisceau séparé (resp. un faisceau) sur le site $\mathscr{S}$, si pour tout objet $X$ de $\mathscr{S}$ et tout crible couvrant $R$ de $X$, le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PFx}(C)}(X, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{PFx}(C)}(R, F)$$

est un monomorphisme (resp. isomorphisme).

On notera $\mathrm{Fx}(\mathscr{S})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{PFx}(\mathscr{S})$ formée par les faisceaux sur $\mathscr{S}$. On l'appelle le *topos associé au site $\mathscr{S}$*.

Lorsque l'on veut préciser la topologie sur $\mathscr{S}$, on parle encore de faisceaux pour la topologie $T$ et l'on note $\mathrm{Fx}_T(\mathscr{S})$ la catégorie correspondante.

***VIII.4.0.i.*** — Supposons que la topologie du site $\mathscr{S}$ soit engendrée par une pré-topologie $C$. Si $F$ est un préfaisceau sur $\mathscr{S}$, on peut associer à toute recouvrement $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ un diagramme d'ensembles

$$\{*\} \longrightarrow F(U) \xrightarrow{a} \prod_{i\in I} F(U_i) \overset{b_1}{\underset{b_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I^2} F(U_i \cap U_j) \tag{VIII.1}$$

en utilisant les mêmes formules que celles du paragraphe II.1.2.b. On dira comme dans *loc. cit.* que ce diagramme est exact si $a$ est injective et son image est égal à l'ensemble égalisateur de $(b_1, b_2)$.

***Proposition VIII.5.*** — *Soit $\mathscr{S}$ un site dont la topologie est engendrée par une pré-topologie $C$. Alors, pour tout préfaisceau $F$ sur $\mathscr{S}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$F$ est séparé (resp. un faisceau).*
2. *Pour tout $C$-recouvrement $(X_i)_{i\in I}$ de $X$, la flèche $a$ du diagramme* (VIII.1) *est injective (resp. le diagramme* (VIII.1) *est exact).*

Pour cette proposition, on se réfère à [**AGV73**, II, 2.4].

***Exemple VIII.7.*** — D'après [**AGV73**, VII, 2.a], pour tout $S$-schéma $X$ dans $\mathscr{L}_S$, le préfaisceau sur $\mathscr{L}_S$ représenté par $X$ est un faisceau pour la topologie étale, donc pour la topologie Nisnevich (voir remarque VIII.2).

***VIII.4.0.j.*** — Considérons un préfaisceau $F$ sur $\mathscr{S}$. Rappelons que l'ensemble ordonné $T(X)$ des cribles couvrants de $X$ est filtrant (VIII.3). On associe à tout objet $X$ de $\mathscr{S}$ l'ensemble

$$LF(X) := \varinjlim_{R\in T(X)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PFx}(\mathscr{S})}(R, F). \tag{VIII.2}$$

Si $f : Y \to X$ est un morphisme de $\mathscr{C}$, l'application canonique

$$T(X) \to T(Y), R \mapsto R^f$$

est croissante. On en déduit un morphisme canonique

$$\begin{aligned} LF(X) = \varinjlim_{R\in T(X)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PFx}(\mathscr{S})}(R, F) &\to \varinjlim_{R\in T(X)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PFx}(\mathscr{S})}(R^f, F) \\ &\to \varinjlim_{R'\in T(Y)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PFx}(\mathscr{S})}(R^f, F) = LF(Y) \end{aligned}$$

où la première flèche est induite par les morphismes de projection $R^f = R \times_X Y \to R$.

On vérifie facilement qu'on a définit un préfaisceau $LF$ sur $\mathscr{S}$. On obtient de plus une transformation naturelle

$$\eta_F : F \to LF \tag{VIII.3}$$

en utilisant pour tout crible $R$ de $X$ le morphisme naturel de préfaisceaux $R \to X$ et la formule (VIII.2). On peut remarquer de plus que $LF$ dépend fonctoriellement de $F$ et que le morphisme $\eta_F$ est une transformation naturelle en $F$ vis à vis de cette fonctorialité.

***Proposition VIII.6.*** — *Avec les notations introduites ci-dessus, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Le foncteur $L$ est exact à gauche*[4].
2. *Pour tout préfaisceau $F$, $LF$ est un préfaisceau séparé.*
3. *Les propriétés suivantes sur un préfaisceau $F$ sont équivalentes :*
   (i) *$F$ est séparé (resp. un faisceau).*
   (ii) *$\eta_F : F \to LF$ est un monomorphisme (resp. isomorphisme).*

Le premier point vient de la formule (VIII.2) et du fait que les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies – c'est vrai dans la catégorie des ensembles et on le déduit formellement dans une catégorie de préfaisceaux. Pour les deux autres points, on réfère le lecteur à [**AGV73**, II, 3.2].

***Remarque VIII.4.*** — Supposons que la topologie sur $\mathscr{S}$ soit induit par une pré-topologie $C$. Alors, la formule (VIII.2) peut se réécrire comme suit :

$$LF(X) := \varinjlim_{(U_i \to X)} \operatorname{Ker}\left( \prod_{i\in I} F(U_i) \underset{b_2}{\overset{b_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I^2} F(U_i \cap U_j) \right)$$

où la limite inductive parcourt l'ensemble pré-ordonné des recouvrements de $X$ – *cf.* remarque VIII.1.

D'après la proposition précédente, le foncteur composé $L^2$ induit un foncteur

$$a : \mathrm{PFx}(\mathscr{S}) \to \mathrm{Fx}(\mathscr{S}) \tag{VIII.4}$$

De plus, la proposition précédente induit facilement le théorème suivant :

***Théorème VIII.7.*** — *Avec les notations ci-dessus, le foncteur $a$ est adjoint à droite du foncteur d'oubli $\mathcal{O} : \mathrm{Fx}(\mathscr{S}) \to \mathrm{PFx}(\mathscr{S})$. De plus, il est exact*[5].

Si $P$ est un préfaiseau sur $\mathscr{S}$, on appellera $a(P)$ le *faisceau associé à $P$*. Par adjonction, on dispose d'un foncteur canonique

$$P \to a(P) = L^2(P)$$

qui, suivant la définition précédente, est induit par la transformation naturelle (VIII.3).

On déduit de ce théorème le corollaire suivant :

***Corollaire VIII.7.1.*** —
1. *La catégorie $\mathrm{Fx}(\mathscr{S})$ admet des petites limites inductives. Le foncteur $a$ commute aux petites limites inductives.*
2. *La catégorie $\mathrm{Fx}(\mathscr{S})$ admet des petites limites projectives. Pour tout objet $X$ de $\mathscr{S}$, le foncteur*

   $$\mathrm{Fx}(\mathscr{S}) \to \mathscr{E}ns, F \mapsto F(X)$$

   *commute aux limites projectives.*

---

[4] Autrement dit, $L$ commute aux limites projectives finies.
[5] Autrement dit, $a$ commute aux limites projectives et inductives finies.

Ce corollaire vient du fait qu'un foncteur adjoint à gauche (resp. à droite) commute aux limites inductives (resp. projectives) et du fait que la catégorie des préfaisceaux sur $\mathscr{S}$ admet des petites limites projectives et injectives (voir paragraphe VIII.1.0.b). Le point 2 résulte aussi de fait que les limites projectives dans la catégorie $\mathrm{PFx}(\mathscr{S})$ se calculent termes à termes (voir *loc. cit.*).

On obtient de plus le corollaire très utilise suivant :

***Corollaire VIII.7.2.*** — *Supposons que la topologie sur $\mathscr{S}$ est définie par une pré-topologie $C$.*

*Soit $\eta : F \to G$ un morphisme de faisceaux sur $\mathscr{S}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\eta$ est un épimorphisme.*

(ii) *Pour tout objet $X$ de $\mathscr{S}$ et toute section $\rho \in F(X)$, il existe un $C$-recouvrement $(U_i \to X)_{i\in I}$ de $X$ tel que pour tout $i \in I$, la section $\rho|_{U_i}$ appartient à l'image de $F(U_i) \to G(U_i)$.*

***VIII.4.0.k.*** — Si $X$ est un objet de $\mathscr{S}$, le préfaisceau représenté par $X$ n'est pas nécessairement un faisceau sur $\mathscr{S}$. On note $a(X)$ le faisceau associé. Appliquant le corollaire précédent et le corollaire VIII.1.1, on obtient :

***Corollaire VIII.7.3.*** — *Soit $\mathscr{S}$ un site et $F$ un faisceau sur $\mathscr{S}$. Avec les notations du corollaire VIII.1.1, la flèche canonique*

$$\left(\varinjlim_{X/F\in\mathscr{S}/F} a(X)\right) \longrightarrow F$$

*est un isomorphisme.*

## 5. Structures sur les faisceaux

On suppose que $\mathscr{S}$ est munie d'une topologie $T$.

***Définition VIII.10.*** — Soit $\mathscr{D}$ une catégorie.

Un préfaisceau sur $\mathscr{S}$ à valeurs dans $\mathscr{D}$ est un foncteur $F : \mathscr{S}^{op} \to \mathscr{D}$. On dira que $F$ est un faisceau si pour tout objet $A$ de $\mathscr{D}$, le préfaisceau sur $\mathscr{S}$

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, F(X))$$

est un faisceau.

On note $\mathrm{PFx}(\mathscr{S}, \mathscr{D})$ (resp. $\mathrm{Fx}(\mathscr{S}, \mathscr{D})$) la catégorie des préfaisceaux (resp. faisceaux) sur $\mathscr{S}$ à valeur dans $\mathscr{D}$.

***VIII.5.0.l.*** — Supposons que $\mathscr{D}$ admet des petites limites projectives et inductives et que l'on dispose d'une adjonction

$$\phi : \mathscr{E}ns \leftrightarrows \mathscr{D} : \mathcal{O}$$

telle que $\mathcal{O}$ soit conservatif : une flèche $f$ de $\mathscr{D}$ est un monomorphisme (resp. isomorphisme) si $\mathcal{O}(f)$ est un monomorphisme (resp. isomorphisme). On note $e$ l'objet final de $\mathscr{D}$ – $e = \phi(\{*\})$.

On déduit formellement de l'adjonction précédente une adjonction au niveaux des préfaisceaux :

$$\phi_* : \mathrm{PFx}(\mathscr{S}) \leftrightarrows \mathrm{Fx}(\mathscr{S}, \mathscr{D}) : \mathcal{O}_* \tag{VIII.5}$$

telle que $\phi_*(F) = \phi \circ F$ et $\mathcal{O}_*(F) = \mathcal{O} \circ F$.

Considérons un préfaisceau $F$ dans $\mathrm{PFx}(\mathscr{S}, \mathscr{D})$. Alors, on peut étendre $F$ en un foncteur :

$$F : \mathrm{PFx}(\mathscr{S})^{op} \to \mathscr{D}$$

en posant pour tout préfaisceau $R$ sur $\mathscr{S}$ :

$$F(R) = \varprojlim_{X/R}{}^{\mathscr{D}} (F(X))$$

où la limite projective est prise dans $\mathscr{D}$ et parcourt la catégorie opposée des objet de $\mathscr{S}$ au-dessus de $R$ (*cf.* corollaire VIII.1.1).

Notons que, du fait que $\mathcal{O}$ commute aux limites projectives, on déduit un isomorphisme fonctoriel en $R$ :

$$\mathcal{O}(F(R)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{PFx}(\mathscr{S})}(R, \mathcal{O}_*(F)). \tag{VIII.6}$$

***Proposition VIII.8***. — *Considérons les notations précédentes ainsi qu'un objet $F$ de* $\mathrm{PFx}(\mathscr{S}, \mathscr{D})$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$F$ est un faisceau.*

(ii) *$\mathcal{O}_*(F)$ est un faisceau.*

(iii) *pour tout objet $X$ de $\mathscr{S}$ et tout crible couvrant $R \to X$, le morphisme induit $F(R) \to F(X)$ est un isomorphisme dans $\mathscr{D}$.*

*Démonstration.* — (i) implique (ii) : il suffit de remarquer que pour tout objet $X$ de $\mathscr{S}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(e, F(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}ns}(\{*\}, F(X)) = F(X)$ par adjonction.

(ii) implique (iii) : Cela résulte facilement du fait que $\mathcal{O}$ est conservatif et de l'ismorphisme naturel (VIII.6).

(iii) implique (i) : Considérons un objet $A$ de $\mathscr{D}$ ainsi que le préfaisceau

$$F^A : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, F(X)).$$

L'implication résulte facilement du calcul suivant, pour un crible couvrant $R$ d'un objet $X$ de $\mathscr{S}$ :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PFx}(\mathscr{S})}(R, F^A) = \varprojlim_{X/R} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PFx}(\mathscr{S})}(X, F^A) = \varprojlim_{X/R} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, F(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, F(R))$$

où la première égalité vient du corollaire VIII.1.1, la deuxième du lemme de Yoneda et la dernière résulte de la définition. □

***Corollaire VIII.8.1***. — *Supposons que la topologie sur $\mathscr{S}$ soit engendrée par une pré-topologie $C$ et considérons les notations de la proposition précédente. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$F$ est un faisceau.*

(ii) *pour tout objet $X$ de $\mathscr{S}$ et tout recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de $X$, la suite d'objets de $\mathscr{D}$ :*

$$e \longrightarrow F(U) \xrightarrow{\ a\ } \prod_{i \in I} F(U_i) \overset{b_1}{\underset{b_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j) \in I^2} F(U_i \cap U_j),$$

*obtenue d'après les formules de la suite analogue* (VIII.1)*, est exacte dans $\mathscr{D}$ (*i.e. $(F(U), a)$ *est le noyau de la double flèche $(b_1, b_2)$).*

***VIII.5.0.m***. — Reprenons les hypothèses et notations du paragraphe VIII.5.0.l. Pour un objet $X$ de $\mathscr{S}$, on peut considérer la formule (VIII.2) dans $\mathscr{D}$ et définir :

$$LF(X) := \varinjlim_{R \in T(X)}{}^{\mathscr{D}} F(R).$$

Reprenant les formules de VIII.4.0.j, on obtient ainsi un préfaisceau $LF$ sur $\mathscr{S}$ à valeur dans $\mathscr{D}$. Compte tenu de la proposition précédente, $L^2F$ est un faisceau est défini donc un foncteur $a : \mathrm{PFx}(\mathscr{S}, \mathscr{D}) \to \mathrm{Fx}(\mathscr{S}, \mathscr{D})$.

***Corollaire VIII.8.2***. — *Le foncteur $a$ défini ci-dessus est adjoint à gauche du foncteur d'oubli* $\mathrm{Fx}(\mathscr{S}, \mathscr{D}) \to \mathrm{PFx}(\mathscr{S}, \mathscr{D})$*. Il est exact.*

On laisse au lecteur le soin de formuler les analogues immédiats des corollaires VIII.7.1 et VIII.7.3.

***Remarque VIII.5.*** — Par construction, le foncteur $a$ commute au foncteur $\mathcal{O}_*$ : plus explicitement, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{PFx}(\mathscr{S},\mathscr{D}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Fx}(\mathscr{S},\mathscr{D}) \arrow[d] \\ \mathrm{PFx}(\mathscr{S}) \arrow[r] & \mathrm{Fx}(\mathscr{S}) \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les foncteurs faisceaux associés et les flèches verticales les foncteurs d'oubli évidents.

***Exemple VIII.8.*** — On appliquera ces résultats dans les cas suivants :

1. $\mathscr{D}$ est la catégorie des anneaux. Si de plus $\mathscr{S}$ est le site $\mathscr{O}\mathrm{uv}(X)$ associé à un espace topologique $X$ suivant l'exemple VIII.5, on retrouve la notion de *faisceau d'anneaux* introduite dans la définition II.4.
2. $\mathscr{D}$ est la catégorie des groupes abéliens. Un faisceau à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens sera appelé simplement un *faisceau abélien.* On notera de plus $\mathrm{Fx}(\mathscr{S},\mathbb{Z})$ la catégorie des faisceaux abéliens. Si $F$ est un faisceau d'ensembles, on notera simplement $\mathbb{Z}(F)$ le faisceau abélien libre engendré par $F$ (obtenu en appliquant le foncteur groupes abéliens libres termes à termes sur $F$, puis en considérant le faisceaux abéliens associé à ce préfaisceau).

***VIII.5.0.n.*** — La catégorie des faisceaux abéliens sur $\mathscr{S}$ admet des petites limites inductives et projectives. On déduit des propriétés précédentes que cette catégorie est abélienne.

Notons aussi que les limites inductives filtrantes sont exactes. La catégorie $\mathscr{S}$ étant essentiellement petite, la famille de faisceaux abéliens de la forme $\mathbb{Z}(X)$ pour un objet $X$ du $\mathscr{S}$ est génératrice (lemme de Yoneda) et essentiellement petite. Ainsi, $\mathrm{Fx}(\mathscr{S},\mathbb{Z})$ est abélienne de Grothendieck.(6)

Cette catégorie est de plus monoïdale symétrique fermée. Le produit tensoriel $F \otimes G$ de deux faisceau abéliens $F$ et $G$ est définit comme le faisceau associé au préfaisceau

$$X \mapsto F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G(X).$$

Le Hom interne $\underline{\mathrm{Hom}}(F,G)$ est définit en considérant le faisceau abélien associé au préfaisceau $X \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(X) \otimes F, G)$.

***Proposition VIII.9.*** — *Avec les notations précédentes, la catégorie* $\mathrm{Fx}(\mathscr{S},\mathbb{Z})$ *est abélienne de Grothendieck, symétrique monoïdale et fermée.*

***Exemple VIII.9.*** — On appliquera particulièrement ce corollaire au cas du site Nisnevich $\mathscr{L}_S$. On notera simplement $\mathscr{N}_S$ les faisceaux de groupes abéliens sur $\mathscr{L}_S$ pour la topologie Nisenvich. Si $X$ est un schéma dans $\mathscr{L}_S$, on notera $\mathbb{Z}_S(X)$ le faisceau abélien sur $\mathscr{L}_S$ définit ci-dessus. On fera attention que, bien que le préfaisceau $X$ soit un faisceau Nisnevich sur $\mathscr{L}_S$, le préfaisceau

$$Y \mapsto \mathbb{Z}.\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{L}_S}(Y,X)$$

n'est pas en général un faisceau. Ainsi, $\mathbb{Z}_S(X)$ est le faisceau abélien associé à ce préfaisceau.

D'après le corollaire VIII.7.3, pour tout faisceau abélien $F$ sur $\mathscr{L}_S$, on peut écrire :

$$F = \varinjlim_{X/F} \mathbb{Z}_S(X) \tag{VIII.7}$$

la limite étant prise dans la catégorie $\mathscr{N}_S$.

Notons que pour tous $S$-schémas lisses séparés de type fini $X$ et $Y$,

$$\mathbb{Z}_S(X) \otimes \mathbb{Z}_S(Y) = \mathbb{Z}_S(X \times_S Y). \tag{VIII.8}$$

(6) Rappelons qu'une catégorie abélienne est dite *de Grothendieck* si elle admet une famille génératrice, des sommes infinies et que les sommes infinies sont exactes. Dès lors, elle admet des limites inductives et les limites inductives filtrantes (voir IX.2) sont exactes.

Il en résulte que le produit tensoriel de deux faisceaux abéliens $F$ et $G$ sur $\mathscr{L}_S$ est définit par la formule :

$$F \otimes G = \varinjlim_{X/F, Y/G} \mathbb{Z}_S(X \times_S Y).$$

Remarquons qu'un faisceau en anneaux $\mathcal{O}$ sur $\mathscr{S}$ n'est rien d'autre qu'un monoïde dans la catégorie monoïdale $\mathrm{Fx}(\mathscr{S}, \mathbb{Z})$.

***Définition VIII.11.*** — Soit $\mathcal{O}$ un faisceau en anneaux sur $\mathscr{S}$.

Un $\mathcal{O}$-module $M$ est un faisceau abélien sur $\mathscr{S}$ muni d'une action

$$A \otimes M \to M$$

du monoïde $\mathcal{O}$ dans la catégorie monoïdale symétrique $\mathrm{Fx}(\mathscr{S}, \mathbb{Z})$.

On en déduit formellement que la catégorie des $\mathcal{O}$-modules est abélienne monoïdale symétrique fermée.

***Remarque VIII.6.*** — Le faisceau en anneaux $\mathcal{O}$ induit un préfaisceau en anneaux $\mathcal{O}$ sur $\mathscr{S}$, autrement dit un monoïde de la catégorie monoïdale symétrique $\mathrm{PFx}(\mathscr{S}, \mathbb{Z})$. Or le foncteur $a$ : $\mathrm{PFx}(\mathscr{S}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Fx}(\mathscr{S}, \mathbb{Z})$ est monoïdal. Si $M$ est un préfaisceau abélien sur $\mathscr{S}$ muni d'une action de $\mathcal{O}$, on en déduit que le faisceau abélien associé $a(M)$ est muni d'une action canonique du faisceau en anneaux $a(A) = A$.

## 6. Foncteurs continus

***Définition VIII.12.*** — Soit $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ deux sites, et $u : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un foncteur. On dit que $u$ est continu si pour tout faisceau $F$ sur $\mathscr{S}$, $F \circ u$ est un faisceau sur $\mathscr{S}'$.

***Remarque VIII.7.*** — Supposons que la topologie sur $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}'$) soit définie par une prétopologie $C$ (resp. $C'$). Alors, si pour toute famille couvrante $(X_i \to X)$ d'un objet de $\mathscr{S}'$, la famille $(u(X_i) \to u(X))$ est couvrante, le foncteur $u$ est continu.

***Exemple VIII.10.*** — Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas. On en déduit un foncteur $f^{-1} : X_{Zar} \to Y_{Zar}, U \mapsto U \times_Y X$. La remarque précédente montre immédiatement que $f^{-1}$ est continu.

***VIII.6.0.o.*** — Soit $u : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un foncteur continu. Considérons une catégorie $\mathscr{D}$ satisfaisant les hypothèses du paragraphe VIII.5.0.l. On déduit de la définition précédente et de la proposition VIII.8 que pour tout faisceau $F$ sur $\mathscr{S}$ à valeur dans $\mathscr{D}$, $F \circ u$ est un faisceau sur $\mathscr{S}'$ à valeur dans $\mathscr{D}$. On associe donc à $u$ un foncteur

$$u_s : \mathrm{Fx}(\mathscr{S}, \mathscr{D}) \to \mathrm{Fx}(\mathscr{S}', \mathscr{D}), F \mapsto F \circ u.$$

***Proposition VIII.10.*** — *Avec les notations précédentes, le foncteur $u_s$ admet un adjoint à gauche $u^s$.*

*Démonstration.* — Dans cette preuve, on reprend les notations de l'adjonction (VIII.5). Soit $F$ un faisceau sur $\mathscr{S}'$ à valeurs dans $\mathscr{D}$. On pose

$$u^s(F) = \varinjlim_{X/F} a\phi_*[u(X)]$$

la limite étant prise dans la catégorie $\mathrm{Fx}(\mathscr{S}, \mathscr{D})$ et indexée par la catégorie des faisceaux représentables au-dessus du faisceau $\mathcal{O}_*(F)$. Le lemme de Yoneda montre immédiatement que $u^s$ est adjoint à gauche de $u_s$. □

***Exemple VIII.11***. — Soit $f : Y \to X$ est un morphisme de schéma et $f^{-1} : X_{Zar} \to Y_{Zar}$ le foncteur continu qui lui est associé dans l'exemple précédent. Avec les notations de la proposition précédente, pour toute catégorie $\mathscr{D}$, on pose $f_* = (f^{-1})_s$ et $f^* = (f^{-1})^s$.[7] On en déduit en particulier une adjonction :

$$f^* : \mathrm{Fx}(X_{Zar}, \mathscr{D}) \leftrightarrows \mathrm{Fx}(Y_{Zar}, \mathscr{D}) : f_*.$$

Dans le cas $\mathscr{D} = \mathscr{E}ns$, on a déjà rencontré le foncteur $f_*$ (voir paragraphe II.1.2.d). Si de plus, $f = j : U \to X$ est un immersion ouverte, alors pour tout faisceau $F$ sur $X_{Zar}$, le faisceau $j^*(F)$ est le faisceau $F|_U$ défini dans la paragraphe II.1.3.a.

***VIII.6.0.p***. — Considérons le site $\mathscr{L}_S$ muni de sa topologie de Nisnevich, et la catégorie $\mathscr{N}_S$ des faisceaux abéliens sur ce site munie des structures définies dans l'exemple VIII.9. On considère les notations du paragraphe V.4.0.o.

Soit $f : T \to S$ un morphisme de schémas. Alors, le foncteur $f^* : \mathscr{L}_S \to \mathscr{L}_T$ est continu d'après la remarque VIII.7. On déduit donc de la proposition précédente une adjonction

$$f^* : \mathscr{N}_S \leftrightarrows \mathscr{N}_T : f_* \tag{VIII.9}$$

où l'on a noté par abus $f^* = (f^*)_s$. D'après la preuve de cette proposition, pour tout schéma $X$ dans $\mathscr{L}_S$, $f^*(\mathbb{Z}_S(X)) = \mathbb{Z}_T(X \times_S T)$, ce qui justifie notre abus de notation. On en déduit que le foncteur $f^*$ est monoïdal symétrique.

Supposons de plus que $f$ est lisse séparé de type fini. Alors, le foncteur $f_\sharp : \mathscr{L}_T \to \mathscr{L}_S$ est continu d'après la même remarque ce qui nous permet de définir une adjonction :

$$(f_\sharp)^s : \mathscr{N}_S \leftrightarrows \mathscr{N}_T : (f_\sharp)_s. \tag{VIII.10}$$

Comme précédemment, on note abusivement $f_\sharp = (f_\sharp)^s$ puisque par définition, $f_\sharp(\mathbb{Z}_T(Y)) = \mathbb{Z}_S(Y)$.

***Lemme VIII.11***. — *Avec les notations précédente, le foncteur $(f_\sharp)^s$ est adjoint à gauche du foncteur $f^*$.*

*Démonstration*. — D'après l'adjonction précédente, il suffit de montrer que pour tout faisceau avec transferts $F$ sur $S$, $(f_\sharp)_s(F) \simeq f^*(F)$ à travers un isomorphisme naturel.

Or, par définition des produits fibrés (voir aussi la propriété 1 du paragraphe V.4.0.o), on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_T(Y, X \times_S T) \simeq \mathrm{Hom}_S(f_\sharp(Y), X).$$

On en déduit un isomorphisme canonique des préfaisceaux sur $\mathscr{L}_S$ :

$$\mathbb{Z}.\mathrm{Hom}_T(-, X \times_S T) \simeq \mathbb{Z}.\mathrm{Hom}_S(-, X) \circ f_\sharp.$$

Considérant les faisceaux Nisnevich associés à ces deux préfaisceaux, on obtient ainsi un isomorphisme de faisceaux Nisnevich sur $S$ : $\mathbb{Z}_T(X \times_S T) \simeq (f_\sharp)_s(\mathbb{Z}_S(X))$. Cet isomorphisme est bien sûr naturel par rapport à $X$.

On en déduit finalement l'isomorphisme attendu en utilisant le passage à la limite suivant :

$$f^*(F) = \varinjlim_{X/F} \mathbb{Z}_T(X \times_S T) \simeq \varinjlim_{X/F} \big((f_\sharp)_s(\mathbb{Z}_S(X))\big) = (f_\sharp)_s(F).$$

La dernière égalité vient du fait que $(f_\sharp)_s$, en tant qu'adjoint à droite, commute aux limites inductives et de la formule (VIII.7). □

[7] Dans le cas particulier $\mathscr{D} = \mathscr{E}ns$, on retrouve la définition du paragraphe II.1.2.d.

On a donc obtenu une adjonction de catégories abéliennes :

$$f_\sharp : \mathscr{N}_T \leftrightarrows \mathscr{N}_S : f^*.$$

La fonctorialité des catégories $\mathscr{L}_S$ aux catégories abéliennes $\mathscr{N}_S$. Au passage, on a obtenu une troisième foncteur, le foncteur image directe $f_*$.

Notons pour conclure les propriétés suivantes :

1. Soit $f : T \to S$ un morphisme lisse séparé de type fini, $F$ un faisceau sur $S$ et $G$ un faisceau sur $T$. Alors, $f_\sharp(f^*(F) \otimes G) = F \otimes f_\sharp(G)$.
2. Considérons un carré cartésien de schémas

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{q} & S' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T & \xrightarrow{p} & S. \end{array}$$

tel que $p$ est lisse séparé de type fini. Alors, pour tout faisceau $G$ sur $T$, $f^* p_\sharp(G) = q_\sharp g^*(G)$.

En effet, dans chaque cas, puisque les foncteurs mis en jeu commutent aux limites inductives, il résulte de la formule (VIII.7) que l'on peut se ramener au cas où $F = \mathbb{Z}_S(X)$ et $G = \mathbb{Z}_T(Y)$. Compte tenu des propriétés que l'on vient de voir concernant les foncteurs $f^*$, $f_\sharp$ et de la formule (VIII.8), on est alors réduit aux propriétés analogues 2 et 3 du paragraphe V.4.0.o.

## Références

[AGV73] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972–1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie 1963–64 (SGA 4).

---

*2009-2010*

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* deglise@math.univ-paris13.fr
*Url :* http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/