Table des matières

COURS IX
FAISCEAUX AVEC TRANSFERTS ET COMPLEXES MOTIVIQUES

1. Compléments sur la topologie de Nisnevich

1.1. Voisinages Nisnevich. —

Définition IX.1. — Soit X un schéma et x un point de X.

Un *voisinage Nisnevich* de x dans X est un couple (V, y) où $p : V \to X$ est un X-schéma étale séparé de type fini, y est un point de V tel que $p(y) = x$ et l'extension résiduelle $\kappa(y)/\kappa(x)$ de p en y est triviale.

Si (V, y) et (V', y') sont deux voisinages Nisnevich de x dans X, un morphisme $(V', y') \to (V, y)$ est un X-morphisme $f : V' \to V$ tel que $f(y') = y$.

On note $\mathcal{V}^h(X, x)$ la catégorie des voisinages Nisnevich de x dans X.

On remarque qu'un morphisme étale séparé de type fini $f : W \to X$ est un recouvrement Nisnevich si et seulement si c'est un voisinage Nisnevich de chacun des points de X.

Définition IX.2. — Une catégorie $\mathscr{C}$ est dite *filtrante* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(C1) $\mathcal{I}$ admet au moins un objet.

(C2) Pour tout couple (i, j) d'objets de $\mathcal{I}$, il existe des flèches de $\mathcal{I}$ de la forme $i \to k$ et $j \to k$.

1. Pour tout couple de flèches $u, v : i \to j$ dans[(C3)] $\mathcal{I}$, il existe une flèche $w : j \to k$ dans $\mathcal{I}$ telle que $w \circ u = w \circ v$.

On dit que $\mathcal{I}$ est *cofiltrante* si la catégorie opposée $\mathcal{I}^{op}$ est filtrante.

Si l'on considère un ensemble pré-ordonné[1] (E, R) comme une catégorie, avec pour objets les éléments de E et pour morphismes l'ensemble

$$\mathrm{Hom}(x, y) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } (x, y) \in R, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

E est filtrante (resp. cofiltrante) si E est non vide et toute ensemble fini d'éléments de E admet un majorant (resp. minorant).

Rappelons la proposition suivante qui montre l'intérêt d'introduire la définition précédente :

---

[1] Rappelons qu'il s'agit d'un ensemble E munit d'une relation binaire $R \subset E \times E$ qui est réflexive (pour tout $x \in E$, $(x, x) \in R$) et transitive (si $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$ alors $(x, z) \in R$).

Proposition IX.1. — *Soit $\mathcal{I}$ la catégorie des ensembles ou des groupes abéliens.*[(2)]
Alors, les limites inductives indexées par I commutent aux limites projectives finies dans $\mathcal{I}$.

Voir [**AGV73**, I, cor. 2.9].

Proposition IX.2. — *Soit X un schéma, x un point de X et (V, y) (resp. (V', y')) un voisinage Nisnevich de x dans X.*
Alors, si V' est connexe, pour tous morphismes $f_1, f_2 : (V', y') \to (V, y)$ dans $\mathcal{V}^h(X, x)$, $f_1 = f_2$.

Démonstration. — On montre d'abord qu'on peut supposer $V' = X$ et $y' = x$.

Pour $i = 1, 2$, on considère pour cela le diagramme commutatif de schémas

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[dr, "f'_i"] \arrow[drr, bend left, "f_i"] \arrow[ddr, bend right, "1_{V'}"'] & & \\
& V \times_X V' \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & V \arrow[d, "p"] \\
& V' \arrow[r, "p'"] & X,
\end{tikzcd}$$

dans lequel le carré est cartésien et le morphisme f'_i est l'unique morphisme induit par f_i. Il en résulte que f'_i est une section de π.

Soit k, K et K' les corps résiduels respectifs de x, y et y'. Le diagramme précédent correspond à un diagramme commutatif d'anneaux :

$$\begin{tikzcd}
K' & & \\
& K \otimes_k K' \arrow[ul] & K \arrow[l] \arrow[ull, bend right, "f_{i,y'}"'] \\
& K' \arrow[u] \arrow[uul, bend left, "1_{K'}"] & k \arrow[l, "p'_{y'}"'] \arrow[u, "p_y"']
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, p_y et $p'_{y'}$ sont des isomorphismes ; il en résulte que $K \otimes_k K'$ est un corps et que tous les morphismes dans le diagramme précédent sont des isomorphismes. Dès lors, le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(K \otimes_k K') \to V \times_X V'$ définit un point z de $V \times_X V'$ qui fait de ce dernier schéma un voisinage Nisnevich de y' dans V'. Le morphisme f'_i est alors un morphisme dans $\mathcal{V}^h(V', y')$ Il suffit de traiter le cas de f'_1, f'_2, ce qui termine la preuve de la réduction.

Dès lors, $f_i : X \to V$ est une section du morphisme étale séparé de type fini $p : V \to X$. D'après le corollaire V.3.1, c'est donc une immersion ouverte et fermée. Autrement dit, f_i se factorise sous la forme :

$$X \xrightarrow{\epsilon_i} \Omega_i \xrightarrow{\nu}_i V$$

où Ω_i est une composante connexe de V, ν_i est l'inclusion canonique et ϵ_i est un isomorphisme.

Comme $f_1(x) = y = f_2(x)$, on déduit $\Omega_1 = \Omega_2$. Comme $p \circ f_1 = 1_X = p \circ f_2$, on obtient $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ce qui conclut. □

Corollaire IX.2.1. — *Pour tout schéma pointé (X, x), la catégorie $\mathcal{V}^h(X, x)$ est cofiltrante.*

Démonstration. — La propriété (C1) est triviale. Pour la propriété (C2), étant donné deux objets (V, y) et (V', y') de $\mathcal{V}^h(X, x)$, le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\kappa(y) \otimes_k \kappa(y')) \to V \times_X V'$ définit un point de $V \times_X V'$ qui en fait un voisinage Nisnevich de x dans X. Pour la propriété (C3), puisqu'il s'agit d'égaliser deux morphismes $(V', y') \rightrightarrows (V, y)$ dans $\mathcal{V}^h(X, x)$, on se ramène à la proposition précédente en remplaçant V' par la composante connexe de V' contenant y'. □

[(2)] On peut aussi considérer la catégorie des anneaux, des R-modules pour un anneau R fixé, ...

Définition IX.3. — Un foncteur $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$ entre catégorie filtrantes est dit *cofinal* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(F1) Pour tout objet i' de $\mathcal{I}'$, il existe un objet i de $\mathcal{I}$ et une flèche $i' \to \varphi(i)$ dans $\mathcal{J}$.

(F2) Pour tout objet i de $\mathcal{I}$ et tout couple de flèches $u, v : i' \to \varphi(i)$, il existe une flèche $h : i \to j$ dans $\mathcal{I}$ telle que $\varphi(u) \circ u = \varphi(h) \circ v$.

On dit que φ est *final* si le foncteur induit $\mathcal{I}^{op} \to \mathcal{I}'^{op}$ est cofinal.

On rappelle la proposition suivante (voir la proposition 8.1.3 et la définition 8.1.1 de [**AGV73**, I]) :

Proposition IX.3. — *Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des ensembles ou des groupes abéliens.*[3]

Considérons un foncteur cofinal $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$ entre catégorie filtrantes. Alors, pour tout foncteur $F : \mathcal{I}' \to \mathscr{C}$, le morphisme canonique

$$\left(\varinjlim F \circ \varphi\right) \to \left(\varinjlim F\right)$$

est un isomorphisme.

Remarque IX.1. — Pour une justification des remarques qui suivent, on renvoie le lecteur à [**AGV73**, I, 8.1.3] :

1. Si $\mathcal{I}'$ est quelconque, l'existence d'une catégorie filtrante $\mathcal{I}$ et d'un foncteur $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$ satisfaisant les condition (F1) et (F2) de la définition précédente implique que $\mathcal{I}'$ est filtrante.
2. Considérons un foncteur $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$ tel que $\mathcal{I}'$ est filtrante et φ est pleinement fidèle. Alors, la condition (F1) entraine la condition (F2) et le fait que $\mathcal{I}$ est filtrante.

Exemple IX.1. — Soit (X, x) un schéma pointé.

1. Notons $\mathcal{V}_0^h(X, x)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}^h(X, x)$ formée des voisinages Nisnevich qui sont affines et connexes en tant que schémas. Alors, le foncteur d'inclusion canonique $\mathcal{V}_0^h(X, x) \to \mathcal{V}^h(X, x)$ est final. Cela résulte en effet du deuxième point de la remarque précédente.
2. Considérons un schéma pointé (X, x). Notons $[\mathcal{V}_0^h(X, x)]$ l'ensemble des classes d'isomorphies de $\mathcal{V}_0^h(X, x)$. Si V et V' sont deux objets de $\mathcal{V}_0^h(X, x)$, on dit que $[V] \leq [V']$ si il existe un morphisme $V \to V'$ dans $\mathcal{V}^h(X, x)$. Il résulte de la proposition IX.2 que cela définit une relation d'ordre sur l'ensemble $[\mathcal{V}_0^h(X, x)]$. Cette même proposition montre que l'association
$$V \mapsto [V]$$
définit un foncteur final $\mathcal{V}_0^h(X, x) \to [\mathcal{V}_0^h(X, x)]$.

IX.1.1.a. — On dira qu'une catégorie filtrante $\mathcal{I}$ est essentiellement petite si il existe une petite catégorie filtrante $\mathcal{I}_0$ et un foncteur cofinal $\varphi : \mathcal{I}_0 \to \mathcal{I}$.[4]

Considérons une catégorie $\mathscr{C}$. Un *pro-objet* de $\mathscr{C}$ est la donnée d'une catégorie cofiltrante essentiellement petite $\mathcal{I}$ et d'un foncteur $X_\bullet : \mathcal{I} \to \mathscr{C}$. On utilise la notation indicielle $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ pour ces foncteurs.

Les morphismes entre deux pro-objets $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ et $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ sont définis par la formule :

$$\operatorname{Hom}(Y_\bullet, X_\bullet) = \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \varinjlim_{j \in \mathcal{J}^{op}} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y_j, X_i).$$

La loi de composition est induite par la loi de composition de $\mathscr{C}$.

---

(3) On peut aussi considérer la catégorie des anneaux, des R-modules pour un anneau R fixé, ...

(4) D'après [**AGV73**, I, 8.1.6], on pourrait tout aussi bien supposer que $\mathcal{I}_0$ est un ensemble ordonné filtrant.

IX.1.1.b. — On utilisera cette définition dans le cas des schémas.

Rappelons que la catégorie des anneaux admet des limites inductives. Il en résulte que la catégorie des schémas affines admet des limites projectives (voir proposition II.5). (5)

Il n'est pas nécessaire de supposer que $\mathcal{I}$ soit cofiltrant pour obtenir l'existence de ces limites projectives. Toutefois, nous ne considèrerons les limites projectives de schémas que dans le cas des pro-schémas suivants :

Définition IX.4. — Nous dirons qu'un pro-schéma $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est *essentiellement affine* s'il est isomorphe dans la catégorie des pro-schémas à un pro-schéma affine.

L'exemple typique de pro-schéma essentiellement affine est obtenu dans le cas où il existe une catégorie cofiltrante $\mathcal{I}_0$ et un foncteur cofinal $\varphi : \mathcal{I}_0 \to \mathcal{I}$ tel que pour tout $i \in \mathcal{I}_0$, $X_{\varphi(i)}$ est un schéma affine.

On retiendra que tout pro-schéma essentiellement affine admet une limite projective dans la catégorie des schémas.

Exemple IX.2. — Soit X un schéma et x un point de X. Soit $\mathcal{V}^o(X,x)$ l'ensemble des ouverts de X contenant le point x, ordonné par inclusion. C'est un ensemble cofiltrant, qui définit donc un pro-schéma noté $\mathcal{X}_{(x)}$. La sous-catégorie formée des voisinages ouverts affines est cofinale dans $\mathcal{V}^o(X,x)$; le pro-schéma $\mathcal{X}_{(x)}$ est donc essentiellement affine. On peut de plus calculer sa limite projective :

$$\left(\varprojlim_{U\in\mathcal{V}^o(X,x)} U\right) = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x});$$

autrement dit, $\mathcal{X}_{(x)}$ a pour limite projective le schéma localisé de X en x suivant la terminologie de V.5.0.s.

Proposition IX.4. — *Soit S un schéma noethérien, et $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ et $(Y_j)_{j\in\mathcal{J}}$ des pro-S-schémas essentiellement affine de limites respectives X_∞ et Y_∞ dans la catégorie des S-schémas.*

On suppose que pour tout $j \in \mathcal{J}$, X_j est de type fini sur S. Alors, le morphisme canonique

$$\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \varinjlim_{j\in\mathcal{J}^{op}} \operatorname{Hom}_S(Y_j, X_i) \to \operatorname{Hom}_S(Y_\infty, X_\infty)$$

est un isomorphisme.

Exemple IX.3. — Soit X (resp. Y) un S-schéma noethérien de type fini, x (resp. y) un point de X (resp. Y). Alors, tout morphisme $Y_{(y)} \to X_{(x)}$ entre les schémas localisés respectifs se relève en un morphisme $V \to U$ pour des voisinages ouverts (que l'on peut supposer affines) U et V de x et y respectivement.

La proposition précédente permet d'obtenir le lemme suivant qui caractérise les voisinages Nisnevich :

Proposition IX.5. — *Soit X un schéma noethérien et $p : V \to X$ un morphisme de type fini. Soit y un point de V, $x = p(y)$. Notons T (resp. Z) l'adhérence réduite de y dans V (resp. x dans X). Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'extension résiduelle $\kappa(y)/\kappa(x)$ de p en y est triviale.*

(ii) *Il existe un ouvert dense W (resp. U) de T (resp. Z) tel que $p(W) \subset U$ et une section $s : U \to W$ du morphisme $p|_W^U$.*

---

(5) Plus généralement, étant donné un système projectif $X_\bullet = (X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de schémas, pour que $X_\bullet$ admette une limite projective dans la catégorie des schémas, il suffit que pour toute flèche $i \to j$ de $\mathcal{I}$, le morphisme $X_i \to X_j$ soit affine (voir [**ÉGA** IV, 8.2.3]).

Démonstration. — Le fait que (ii) implique (i) étant trivial, on démontre la réciproque. Cette assertion ne dépend que des schémas réduits associés à X et V, on peut donc les supposer réduits. Quitte à remplacer X par Z (resp. V par T), on peut supposer que X (resp. V) est intègre de point générique x (resp. y). Dès lors, $X_{(x)} = \mathrm{Spec}(\kappa(x))$ et $V_{(y)} = \mathrm{Spec}(\kappa(y))$. Notons $p_y^x : V_{(y)} \to X_{(x)}$ le morphisme induit par p. D'après (i), on obtient donc un morphisme $\sigma : X_{(x)} \to V_{(y)}$ tel que $p_y^x \circ \sigma = 1$. La proposition précédente montre que ce morphisme se relève au voisinage de x et y en $s : W \to U$. De plus, d'après cette même proposition, quitte à réduire U et W, on peut supposer que $p(W) \subset U$ et que $(p|_W^U) \circ s = 1$. □

IX.1.1.c. — Une stratification finie d'un schéma X et une famille finie $(X_i)_{i\in I}$ de sous-schémas de X telle que $X = \sqcup_{i\in I} X_i$.

Corollaire IX.5.1. — *Soit X un schéma noethérien et $p : W \to X$ un morphisme étale séparé de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *p est un recouvrement Nisnevich de X.*
2. *Il existe une stratification finie $(X_i)_{i\in I}$ de X et pour tout $i \in I$, une immersion $s_i : X_i \to W$ telle que $p \circ s_i$ est l'inclusion canonique.*

Autrement dit, l'application $s = \sqcup_{i\in I} X_i \to X$ est une section de p telle que pour tout $i \in I$, la restriction de s à X_i est un morphisme de schémas. Suivant Beilinson et Vologodsky, une telle application s est appelée une *section constructible* de p.

Corollaire IX.5.2. — *Soit S un schéma noethérien.*

Alors, la tolpologie de Nisnevich sur $\mathscr{L}_S$ est engendrée par la pré-topologie dont les recouvrements d'un S-schéma X de $\mathscr{L}_S$ sont formés par les familles

$$(p : V \to X, j : U \to X)$$

pour un carré Nisnevich distingué (définition VII.9)

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & V \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, "j"'] & X. \end{tikzcd} \tag{IX.1}$$

Ainsi, les faisceaux Nisnevich sur $\mathscr{L}_S$ se caractérisent à l'aide des recouvrements Nisnevich induits par les carrés distingués. Un petit calcul supplémentaire permet d'en déduire le résultat suivant :

Corollaire IX.5.3. — *Soit S un schéma noethérien et $F : \mathscr{L}_S^{op} \to \mathscr{A}b$ un pré-faisceau abélien. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est un faisceau Nisnevich.*

(ii) *Pour tout carré distingué de la forme* (IX.1)*, la suite suivante est exacte courte :*

$$0 \to F(X) \xrightarrow{\binom{j^*}{f^*}} F(U) \oplus F(V) \xrightarrow{(g^*, -k^*)} F(W) \to 0$$

Rappelons que si X est un S-schéma dans $\mathscr{L}_S$, on a noté $\mathbb{Z}_S(X)$ le faisceau de groupes abéliens libres représenté par X (voir example VIII.9).

Corollaire IX.5.4. — *Pour tout carré distingué de la forme* (IX.1)*, la suite suivante est exacte courte dans $\mathscr{N}_S$*

$$0 \to \mathbb{Z}_S(W) \xrightarrow{\binom{g_*}{-k_*}} \mathbb{Z}_S(U) \oplus \mathbb{Z}_S(V) \xrightarrow{(j_*, f_*)} \mathbb{Z}_S(X) \to 0$$

1.2. Points Nisnevich. —

Définition IX.5. — Soit X un schéma dans $\mathscr{L}_S$ et x un point de X. Pour tout préfaisceau F sur $\mathscr{L}_S$, on définit la fibre Nisnevich de F associée au schéma pointé (X,x) comme le groupe abélien :

$$F(X^h_{(x)}) = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}^h(X,x)^{op}} F(V). \tag{IX.2}$$

Cette notation est justifiée si l'on considère $X^h_{(x)}$ comme le pro-objet $(V)_{V\in\mathcal{V}^h(X,x)}$ de $\mathscr{L}_S$. En effet, la formule précédente fait référence à l'extension évidente de F aux pro-objets de $\mathscr{L}_S$.

Proposition IX.6. — *Avec les notations de la définition précédente, on a les assertions suivantes :*

1. *Pour tout schéma pointé (X,x) de $\mathscr{L}_S$, le foncteur*
$$\Phi_{(X,x)} : \mathscr{N}_S \to \mathscr{A}b, F \mapsto F(X^h_{(x)})$$
est exact et commute aux sommes directes infinies.
2. *La famille des foncteurs $\Phi_{(X,x)}$ pour un schéma pointé (X,x) de $\mathscr{L}_S$ est conservative.*[(6)]

Démonstration. — Considérons le premier point. Rappelons que les limites projectives finies et les sommes directes de faisceaux se calculent dans la catégorie des préfaisceaux. D'après la formule (IX.2), le foncteur $\Phi_{(X,x)}$ commute donc au sommes. Par ailleurs, puisque $\mathcal{V}^h(X,x)^{op}$ est filtrante (corollaire IX.2.1), la proposition IX.1 montre que $\Phi_{(X,x)}$ commute aux limites projectives finies.

Il reste à montrer que ce foncteur est exact à droite. Considérons un épimorphisme de faisceaux $\eta : F \to G$, et montrons que le morphisme canonique $F(X^h_{(x)}) \to G(X^h_{(x)})$ est surjectif. Un élément du but est donné par une section $\rho \in G(V)$ au-dessus d'un voisinage Nisnevich V de x dans X. D'après le corollaire VIII.7.2, il existe un recouvrement Nisnevich $(p_i : W_i \to V)_{i\in I}$ de V tel que pour tout indice $i \in I$, $\rho|_{W_i}$ appartient à l'image de $F(W_i) \to G(W_i)$. Comme $(p_i)_i$ est un recouvrement Nisnevich, il existe un indice $i \in I$ tel que W_i est un voisinage Nisnevich de x dans X. Cela concult.

Considérons maintenant le deuxième point. Soit F un faisceau sur $\mathscr{L}_S$ tel que pour tout (X,x), $F(X^h_{(x)}) = 0$. On montre que pour tout S-schéma X de $\mathscr{L}_S$, $F(X) = 0$. La condition précédente implique que pour tout point x de X, il existe un voisinage Nisnevich V_x de x dans X tel que $F(V_x) = 0$. Or, la famille $(V_x \to X)_{x\in X}$ est un recouvrement Nisnevich de X. Comme F est séparé pour la topologie Nisnevich, on en déduit que $F(X) = 0$, ce qui conclut. □

Remarque IX.2. — Cette proposition s'étend naturellement au cas des faisceaux d'ensembles. Compte tenu du point 1, on dit que $\Phi_{(X,x)}$ est un *foncteur fibre* du topos associé au site Nisnevich $\mathscr{L}_S$. De plus, le pro-objet $X^h_{(x)}$ pour un schéma pointé (X,x) de $\mathscr{L}_S$ est appelé un *point* de ce topos. Voir [**AGV73**, IV, §6] pour les définitions générales de foncteurs fibres et points.

Rappelons la définition suivante (voir par exemple [**Ray70**]) :

Définition IX.6. — On dit qu'un anneau local A est *hensélien* si tout A-algèbre finie B se décompose en un produit fini $B = \prod_{i\in I} B_i$ tel que B_i est une A-algèbre locale finie.

Rappelons qu'on peut aussi caractériser les anneaux locaux hensélien par la propriété que tout *polynôme unitaire* $P \in A[t]$ qui admet une *racine simple* modulo l'idéal maximal de A admet une racine dans A. Notons aussi pour des références ultérieures la proposition suivante :

Proposition IX.7. — *Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

---

(6) Ce fonteur ne dépend que de la classe d'isomorphie de (X,x) et ces classes d'isomorphies forment un ensemble ce qui justifie l'abus de langage « famille de foncteurs ».

(i) *A est hensélien.*

1. *((ii)] Pour tout morphisme étale $p : V \to X$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *((a)] f admet une section.*
   (b) *f est un voisinage Nisnevich de $\mathfrak{m}$ dans X.*

Pour une preuve de cette proposition, ainsi que de l'assertion qui la précède, on réfère le lecteur à [**Ray70**, VII,§3, prop. 3].

Exemple IX.4. — Tout anneau local complet est hensélien ; c'est le lemme de Hensel (voir [**Ray70**, I, §2, exemple 3]).

Pour le théorème suivant, on renvoie à [**Ray70**, VIII, th. 1]

Théorème IX.8. — *Soit $\mathscr{A}nn^{loc}$ la catégorie des anneaux locaux munie des morphismes locaux.*

Le foncteur d'inclusion des anneaux locaux henséliens dans la catégorie $\mathscr{A}nn^{loc}$ admet un adjoint à droite.

Définition IX.7. — Si A est un anneau local, on note A^h l'anneau local hensélien image de A par l'adjoint à droite considéré dans le théorème précédent. On l'appelle l'*hensélisé* de A.

Il existe donc un morphisme local $A \to A^h$ qui est initial parmi les morphismes locaux $A \to B$ dans un anneau local hensélien B.

La construction de l'hensélisé d'un anneau local dans *loc. cit.* permet par ailleurs d'obtenir le résultat suivant :

Proposition IX.9. — *Soit X un schéma (noethérien) et x un point de X.*

Alors, le pro-schéma $X^h_{(x)}$ admet pour limite projective dans la catégorie des schémas le schéma local $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^h_{X,x})$.

Remarque IX.3. — Pour un anneau local A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, la construction de l'hensélisé de A utilise la catégorie des voisinages Nisnevich affine de $\mathfrak{m}$ dans $\mathrm{Spec}(A)$. En effet, on peut poser :

$$A^h = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}^h_0(\mathrm{Spec}(A),\mathfrak{m})} A(V)$$

et la démonstration de *loc. cit.* consiste à vérifier que cet anneau vérifie la propriété universelle de l'hensélisé.

Remarque IX.4. — Fixons un schéma noethérien S. Alors, compte tenu de la proposition IX.4, le foncteur qui à un pro-objet essentiellement affine de $\mathscr{L}_S$ associe sa limite projective établit une *équivalence de catégorie* entre la sous-catégorie des pro-schémas de la forme $X^h_{(x)}$ et la catégorie des S-schémas locaux de la forme $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^h_{X,x})$.

On fera attention que le schéma local $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^h_{X,x})$ n'est pas en général de type fini sur S ; ce n'est donc pas un objet de $\mathscr{L}_S$.

2. Faisceaux avec transferts

2.1. Définitions. —

IX.2.1.a. — Soit S un schéma régulier. Rappelons que la catégorie $\mathscr{L}^{cor}_S$ définies dans VI.3 est additive et que le foncteur graphe

$$\gamma : \mathscr{L}_S \to \mathscr{L}^{cor}_S$$

commute aux sommes finies.

Définition IX.8. — Un *préfaisceau avec transferts* est un foncteur additif $F : (\mathscr{L}_S^{cor})^{op} \to \mathscr{A}b$. On dit de plus que F est un *faisceau avec transferts* si le foncteur $F \circ \gamma$ est un faisceau Nisnevich sur $\mathscr{L}_S$.

On note $\mathscr{P}_S^{tr}$ (resp. $\mathscr{N}_S^{tr}$) la catégorie des préfaisceaux (resp. faisceaux) avec transferts, les morphismes étant les transformations naturelles.

Le foncteur canonique $\mathscr{P}_S^{tr} \to \mathrm{PFx}(\mathscr{L}_S), F \mapsto F \circ \gamma$ est noté γ_*. On notera encore γ_* le foncteur induit : $\mathscr{N}_S^{tr} \to \mathscr{N}_S$.

Notons que si l'on se donne un foncteur $F : (\mathscr{L}_S^{cor})^{op} \to \mathscr{A}b$ tel que $F \circ \gamma$ est un faisceau Nisnevich alors F commute aux sommes finies : il en résulte que F est automatiquement additif.

IX.2.1.b. — Considérons un morphisme étale $p : W \to Y$ ainsi qu'une S-correspondance finie $\alpha : Y \bullet\!\!\!\to X$. On écrit $\alpha = \sum_{i \in I} n_i.x_i$ où n_i est un entier non nul et x_i un point de YX et on pose $q = p \times_S 1_X : WX \to YX$.

Notons Z_i l'adhérence réduite de x_i dans YX. D'après la proposition VI.3, $\pi(\alpha) = \alpha \circ p = q^*(\alpha)$. Comme q est un morphisme plat, le corollaire V.12.1 et la définition du pullback plat implique :

$$q^*(\alpha) = \sum_{i \in I} n_i.\langle q^{-1}(Z_i)\rangle_{WX}.$$

Or Z_i est un schéma réduit et $q^{-1}(Z_i) \to Z_i$ est étale : il résulte du corollaire V.8.2 que $q^{-1}(Z_i)$ est un schéma réduit. Donc, si l'on note x_i le point générique de Z_i, $\langle q^{-1}(Z_i)\rangle$ est égale à la somme des points de l'ensemble fini $q^{-1}(\{x_i\})$, chacun compté avec multiplicité 1 – rappelons que q est quasi-fini d'après les corollaires V.8.1 et V.5.1. Si l'on note ce cycle de manière suggestive $q^{-1}(x_i)$, on obtient :

$$\alpha \circ p = q^*(\alpha) = \sum_{i \in I} n_i.q^{-1}(x_i). \tag{IX.3}$$

Proposition IX.10. — *Soit X un S-schéma dans $\mathscr{L}_S$. Alors le foncteur $Y \mapsto c_S(Y, X)$ est un faisceau étale sur la catégorie $\mathscr{L}_S$.*

Démonstration. — On considère un recouvrement étale $(V_i \to Y)_{i \in I}$ d'un S-schéma Y dans $\mathscr{L}_S$ et on montre la que la suite exacte courte de la forme (VIII.60) pour le préfaisceau $c_S(., X)$ est exacte (voir proposition VIII.5). Or, le préfaisceau $c_S(., X)$ est additif. Si l'on pose $W = \sqcup_{i \in I}$, le morphisme induit $p : W \to Y$ est un recouvrement étale et il suffit de vérifier l'exactitude de (VIII.60) pour ce dernier recouvrement.

On note $p_1, p_2 : W \times_Y W \to W$ les deux projections canoniques et l'on pose $q = p \times_S 1_X$, $q_i = p_i \times_S 1_X$. D'après la formule (IX.3), il suffit de montrer l'exactitude de la suite de la suite

$$0 \to c_S(Y, X) \xrightarrow{q^*} c_S(W, X) \xrightarrow{q_1^* - q_2^*} c_S(W \times_X W, X). \tag{IX.4}$$

Comme q est surjective, la formule (IX.3) montre que q^* est injective.

Il reste donc à montrer que $\mathrm{Ker}(q_1^* - q_2^*) \subset \mathrm{Im}(p^*)$. Considérons donc un élément $\beta \in c_S(W, X)$ tel que $q_1^*(\beta) = q_2^*(\beta)$. On écrit $\beta = \sum_{j \in J} m_j.y_j$ où m_j est un entier non nul et y_j est un point de WX. D'après la formule (IX.3) l'égalité précédente se traduit comme suit :

$$\sum_{j \in J} m_j.q_1^{-1}(y_j) = \sum_{j \in J} m_j.q_2^{-1}(y_j)$$

On déduit facilement de cette égalité les deux faits suivants :

1. Si $q(y_j) = q(y_k)$ pour un couple $(j, k) \in J^2$, alors $m_j = m_k$.
2. Si $z \in q^{-1}(q(y_j))$, il existe un indice $k \in J$ tel que $z = y_k$.

Posons $\Sigma = \{q(y_j), j \in J\}$. Du point 1 ci-dessus, on obtient que pour tout $x \in \Sigma$, l'entier $m_x = m_j$ est indépendant de l'indice j tel que $x = p(y_j)$. Posons $\alpha = \sum_{x\in\Sigma} m_x.x$ vu comme un cycle de YX. De la définition des multiplicités de α, du point 2 ci-dessus et de la formule (IX.3), il résulte que $q^*(\alpha) = \beta$.

Il reste à démontrer que α est une S-correspondance fini. Soit w un élément de Σ et W son adhérence réduite dans YX. On considère le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} V \times_Y W \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & W \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, "p"] & Y. \end{tikzcd}$$

Or $W \times_Y V = q^{-1}(W)$; par construction, c'est donc une réunion de certains des schémas Z_i qui sont tous finis et pseudo-dominants sur V, puisque β est une S-correspondance finie. Ainsi, f' est fini pseudo-dominant.

Or V lisse sur S, donc régulier (*cf.* proposition V.10). Il résulte donc du théorème V.17 que le morphisme f' est fini universellement ouvert. Comme p est fidèlement plat, il résulte de [**ÉGA** IV, 2.6.4, 2.7.1] que f est fini universellement ouvert, ce qui conclut. $\square$

Définition IX.9. — Pour un schéma X dans $\mathscr{L}_S$, on note $\mathbb{Z}_S^{tr}(X)$ le faisceau avec transferts $Y \mapsto c_S(Y, X)$.

Notons que $\mathbb{Z}_S^{tr}(X)$ est fonctoriel covariant en X. Le lemme de Yoneda montre plus précisément qu'on a définit un foncteur pleinement fidèle :

$$\mathscr{L}_S^{cor} \to \mathscr{N}_S^{tr}, X \mapsto \mathbb{Z}_S^{tr}(X).$$

Rappelons de plus que si $f : V \to X$ est un morphisme dans $\mathscr{L}_S$ et $\alpha : Y \bullet\!\!\to V$ une S-correspondance finie, la proposition VI.3 implique l'égalité :

$$f \circ \alpha = (1_Y \times_S f)_*(\alpha).$$

2.2. Faisceau avec transferts associé. —

IX.2.2.a. — On fixe à nouveau un schéma régulier S. Si X est un S-schéma quelconque, on note $c_0(X/S)$ le groupe de cycles de X dont le support est fini pseudo-dominant sur S. Notons que le pushout des cycles fait de ce groupe un foncteur covariant par rapport aux S-morphismes séparés de type fini (voir la fin du raisonnement de VI.2.0.u).

Proposition IX.11. — *Soit (Y, y) un schéma pointé dans $\mathscr{L}_S$ et posons $\mathcal{Y} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}^h)$ (*cf. *définitionIX.7).*

Alors, pour tout schéma X dans $\mathscr{L}_S$ la fibre du faisceau Nisnevich $\mathbb{Z}_S^{tr}(X)$ associée à (Y, y) est canoniquement isomorphe au groupe abélien $c_0(\mathcal{Y} \times_S X/\mathcal{Y})$.

Notons de plus que l'isomorphisme canonique auquel se réfère cette proposition est naturel en X par rapport aux morphisme de $\mathscr{L}_S$.

IX.2.2.b. — Soit X un schéma dans $\mathscr{L}_S$ et $p : U \to X$ un recouvrement Nisnevich. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note U_X^n le produit fibré n-uple du X-schéma U. Rappelons que $U_X^\bullet$ est un schéma simplicial. Il en résulte que $\mathbb{Z}_S^{tr}(U_X^\bullet)$ est un faisceau avec transferts simplicial. On lui associe donc un complexe de faisceaux avec transferts :

$$\cdots \to \mathbb{Z}_S^{tr}(U_X^{n+1}) \xrightarrow{d^n} \mathbb{Z}_S^{tr}(U_X^n) \to \cdots \to \mathbb{Z}_S^{tr}(U) \xrightarrow{d^0} \mathbb{Z}_S^{tr}(X) \to 0 \tag{IX.5}$$

dont la différentielle d^n est la somme alternée des morphismes induits par les $n+1$ projections canoniques de la forme $U_X^{n+1} \to U_X^n$. Le théorème suivant est essentiellement du à Voevodsky :

Théorème IX.12. — *Avec les notations précédentes, le complexe* (IX.5) *est acyclique dans la catégorie* $\mathscr{N}_S$ – i.e. *après application du foncteur* $\mathcal{O}_S^{tr}$.

Démonstration. — D'après la proposition IX.6, il suffit de considérer la fibre Nisnevich du complexe (IX.5) associée à un schéma pointé (Y, y) de $\mathscr{L}_S$.

Or appliquant le calcul de la proposition IX.11, on se ramène à montrer que le complexe de groupes abéliens suivant est acyclique :

$$\cdots \to c_0(\mathcal{Y} \times_S U/\mathcal{Y}) \to c_0(\mathcal{Y} \times_S X/\mathcal{Y}) \to 0$$

Pour simplifier les notations, on peut donc supposer $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}^h)$ est le spectre d'un anneau local hensélien[(7)] et on doit montrer que le complexe C^* tel que $C^n = c_0(U_X^n/S)$ est acyclique.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble, ordonné par inclusion, des sous-schémas fermés de X dont le support est fini pseudo-dominant sur S. On associe à un élément Z de $\mathcal{F}$ un sous-complexe C_Z^* de C^* en posant $C_Z^n = c_0(U_X^n \times_X Z/S)$.

Alors, C^* est la réunion des sous-complexes C_Z^*. Donc si $\mathcal{F}$ est vide, C^* est nul. Dans le cas contraire, $\mathcal{F}$ est un ensemble ordonné filtrant et il suffit de montrer que pour tout $Z \in \mathcal{F}$, C_Z^* est acyclique.

Or Z est fini sur S et S est le spectre d'un anneau local hensélien A. Il en résulte que Z est affine, $Z = \mathrm{Spec}(B)$, et d'après la définition IX.6, B est un produit d'anneaux locaux, qui sont nécessairement henséliens. Par définition, le morphisme $q : U_Z \to Z$ est un voisinage Nisnevich de chacun des points fermés de Z. Il résulte de la proposition IX.7 que p admet une section $s : Z \to U_Z$ dans la catégorie des schémas.

Or, C_Z^* s'obtient en appliquant le foncteur covariant $c_0(-/S)$ au S-schéma simplicial U_Z^n – dont les morphismes de transitions sont séparés de type fini. Comme la section s du morphisme $q : U_Z \to Z$ est un morphisme séparé de type fini, on en déduit que le complexe C_Z^* est contractile : une contraction est donnée par la formule :

$$(s \times_Z 1_{U_Z^n})_* : c_0(U_Z^n/S) \to c_0(U_Z^{n+1}/S).$$

□

Traduisant le fait que le morphisme d_0 de (IX.5) est un épimorphisme dans $\mathscr{N}_S$ et appliquant le corollaire VIII.7.2), on obtient :

Corollaire IX.12.1. — *Sous les conditions du théorème précédent, pour toute correspondance finie* $\alpha \in c_S(Y, X)$*, il existe un recouvrement Nisnevich* $q : V \to Y$ *et une correspondance finie* $\beta \in c_S(V, U)$ *telles que le diagramme suivant commute :*

(IX.6)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "q"'] & U \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "\alpha"] & X. \end{tikzcd}$$

IX.2.2.c. — Soit P un préfaisceau sur $\mathscr{L}_S$. On note P_τ le préfaisceau avec transferts sur S suivant :

$$(\mathscr{L}_S^{cor})^{op} \to \mathscr{A}b, X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{N}_S}(\gamma_*(\mathbb{Z}_S^{tr}(X)), F).$$

D'après le théorème précédent, si P est un faisceau Nisnevich, P_τ est un faisceau avec transferts.

Corollaire IX.12.2. — *Soit* P^{tr} *un préfaisceau avec transferts sur* S*,* $P = P^{tr} \circ \gamma$*. On note* F *le faisceau sur* $\mathscr{L}_S$ *associé à* P *(*cf. *théorème VIII.7) et* $\eta : P \to F$ *la transformation naturelle canonique associée.*

Alors, il existe un unique faisceau avec transferts F^{tr} *sur* S *tel que :*

(7) C'est bien un anneau local régulier

1. *On a une égalité de faisceaux sur $\mathscr{L}_S$: $F = F^{tr} \circ \gamma$.*
2. *Pour toute S-correspondance finie $\alpha : Y \bullet\!\!\rightarrow X$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
P^{tr}(X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha^*"'] & P(X) \arrow[r, "\eta_X"] & F(X) \arrow[r, equal] & F^{tr}(X) \arrow[d, "\alpha^*"] \\
P^{tr}(Y) \arrow[r, equal] & P(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & F(Y) \arrow[r, equal] & F^{tr}(Y).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Notons que, étant donnée un préfaisceau G sur $\mathscr{L}_S$, la donnée d'un préfaisceau avec transferts G^{tr} tel que $G = G^{tr} \circ \gamma$ est équivalente à la donnée d'une transformation naturelle

$$G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} c_S(Y, X) \to G(Y), \rho \otimes \alpha \mapsto \langle \rho, \alpha \rangle \tag{IX.7}$$

de bifoncteurs, X et Y étant vus comme des objets de $\mathscr{L}_S$, satisfaisant les conditions suivantes :

(a) Dans le cas $X = Y$, $\langle \rho, 1_X \rangle = \rho$.

(b) Pour toute S-correspondance finie $\beta \in c_S(Z, Y)$, $\langle \langle \rho, \alpha \rangle, \beta \rangle = \langle \rho, \alpha \circ \beta \rangle$.

Notons de plus que la donnée d'une transformation naturelle de la forme (IX.7) équivaut à la donnée d'une transformation naturelle de la forme

$$\phi : G \to G_\tau$$

en utilisant la relation : $\langle \rho, \alpha \rangle_\phi = [\phi_X(\rho)]_Y.\alpha$.

Appliquant cette remarque au couple (P, P^{tr}) on obtient une transformation naturelle

$$\psi : P \to P_\tau.$$

Comme on l'a vu ci-dessus, le théorème précédent implique que F_τ est un faisceau Nisnevich. Par définition du faisceau associé F et de la transformation naturelle η, il existe donc une unique transformation naturelle ψ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\eta"'] & P_\tau \arrow[d, "\eta_\tau"] \\
F \arrow[r, "\phi"] & F_\tau
\end{tikzcd}$$

Le morphisme ψ correspond donc à une transformation naturelle $\langle ., \rangle_\phi$ de la forme IX.7 dans le cas $G = F$. La commutativité du diagramme ci-dessus se traduit par la relation :

$$\eta_Y(\langle \rho, \alpha \rangle_\psi) = \langle \eta_X(\rho), \alpha \rangle_\phi.$$

L'unicité de ϕ montre donc en particulier du faisceau avec transferts F^{tr} satisfaisant les conditions 1 et 2 de l'énoncé.

Pour conclure, il nous reste à montrer les propriétés (a) et (b) de la transformation naturelle $\langle ., . \rangle_\phi$. Considérons un couple $(\rho, \alpha) \in F(X) \times c_S(Y, X)$. Puisque F est le faisceau Nisnevich associé à P, il existe un recouvrement Nisnevich $p : U \to X$ et une section $\sigma \in P(U)$ tel que $p^*(\rho) = \eta_U(\sigma)$. Par ailleurs, d'après le corollaire IX.12.2, on obtient un recouvrement Nisnevich $q : V \to Y$ et une S-correspondance finie $\beta \in c_S(V, U)$ rendant le diagramme (IX.6) commutatif. Par naturalité de $\langle ., . \rangle_\phi$, on obtient :

$$q^* \langle \rho, \alpha \rangle_\phi = \langle \rho, \alpha \circ q \rangle_\phi = \langle \rho, p \circ \beta \rangle_\phi = \langle p^* \rho, \beta \rangle_\phi = \langle \eta_U(\sigma), \beta \rangle_\phi = \eta_V(\langle \sigma, \beta \rangle_\psi).$$

Puisque q est un recouvrement, $q^* : F(X) \to F(W)$ est injectif. On en déduit facilement à partir des propriétés (c) et (d) de $\langle ., . \rangle_\psi$ les propriétés analogues de $\langle ., . \rangle_\phi$. □

L'assertion d'unicité du corollaire précédent nous montre que l'association $P^{tr} \mapsto F^{tr}$ est naturelle en P^{tr} et définit donc un foncteur $a^{tr} : \mathscr{P}_S^{tr} \to \mathscr{N}_S^{tr}$.

Corollaire IX.12.3. — *Le foncteur a^{tr} est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli $\mathscr{N}_S^{tr} \to \mathscr{P}_S^{tr}$. De plus, le diagramme de foncteurs suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}_S^{tr} \arrow[r, "a^{tr}"] \arrow[d, "\gamma_*"'] & \mathscr{N}_S^{tr} \arrow[d, "\gamma_*"] \\ \mathrm{PFx}(\mathscr{L}_S) \arrow[r, "a"] & \mathscr{N}_S. \end{tikzcd}$$

Corollaire IX.12.4. — *La catégorie $\mathscr{N}_S^{tr}$ est abélienne de Grothendieck avec pour générateurs les faisceaux avec transferts de la forme $\mathbb{Z}_S^{tr}(X)$ pour X un schéma dans $\mathscr{L}_S$.*

Démonstration. — Etant donné que le foncteur γ_* est conservatif, on déduit du corollaire précédent que le foncteur a^{tr} est exact.

La catégorie $\mathscr{P}_S^{tr}$ est abélienne de Grothendieck avec pour famille génératrice la famille des préfaisceaux avec transferts $\mathbb{Z}_S^{tr}(X)$ pour un schéma X dans $\mathscr{L}_S$. L'exactitude de a^{tr}, en tant qu'adjoint à gauche du foncteur pleinement fidèle $\mathscr{N}_S^{tr} \to \mathscr{P}_S^{tr}$, montre que la catégorie $\mathscr{N}_S^{tr}$ est abélienne de Grothendieck. La proposition IX.10 montre l'assertion relative aux générateurs. $\square$

Remarque IX.5. — La forme des générateurs de $\mathscr{N}_S^{tr}$ nous permet d'écrire tout faisceau avec transferts F sur S de manière unique sous la forme :

$$F = \varinjlim_{X/F} \mathbb{Z}_S^{tr}(X) \tag{IX.8}$$

où X/F parcourt la catégorie des flèches $\mathbb{Z}_S^{tr}(X) \to F$ de $\mathscr{N}_S^{tr}$ (pour le voir, il suffit d'appliquer le corollaire VIII.1.1 et le fait que a^{tr} commute aux colimites). Notons que cette écriture est naturelle en F dans le sens suivant : étant donné un morphisme $\eta : F \to G$ de faisceaux avec transferts sur S, on définit un foncteur :

$$\varphi_\eta : X/F \to X/G$$

qui à une flèche $\mathbb{Z}_S^{tr}(X) \to F$ associe la flèche composée $\mathbb{Z}_S^{tr}(X) \to F \xrightarrow{\eta} G$. On déduit de ce foncteur un morphisme canonique

$$\left(\varinjlim_{X/F} \mathbb{Z}_S^{tr}(X)\right) \to \left(\varinjlim_{X/G} \mathbb{Z}_S^{tr}(X)\right)$$

qui s'identifie au morphisme η à travers les identifications (IX.8) pour F et G.

Notons finalement que le corollaire IX.5.4 avec l'analogue suivant dans la catégorie des faisceaux avec transferts :

Proposition IX.13. — *Pour tout carré distingué de la forme* (IX.1), *la suite suivante est exacte courte dans $\mathscr{N}_S$*

$$0 \to \mathbb{Z}_S^{tr}(W) \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_* \\ -k_* \end{pmatrix}} \mathbb{Z}_S^{tr}(U) \oplus \mathbb{Z}_S^{tr}(V) \xrightarrow{(j_*, f_*)} \mathbb{Z}_S^{tr}(X) \to 0 \tag{IX.9}$$

En effet, pour vérifier l'exactitude de cette suite dans la catégorie abélienne $\mathscr{N}_S^{tr}$, il suffit de vérifier qu'elle induit une suite exacte après application du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{N}_S^{tr}}(-, F)$ pour tout faisceau avec transferts F ; cela résulte du lemme de Yoneda et du corollaire IX.5.3.

2.3. Fonctorialité. — Rappelons que pour un schéma régulier S, la catégorie $\mathscr{L}_S^{cor}$ est monoïdale symétrique d'après la proposition VI.9.

Proposition IX.14. — *Il existe une unique structure monoïdale symétrique fermée sur $\mathscr{N}_S^{tr}$ telle que le foncteur*

$$\mathbb{Z}_S^{tr} : \mathscr{L}_S^{cor} \to \mathscr{N}_S^{tr}$$

est monoïdal symétrique.

Démonstration. — Le produit tensoriel d'une catégorie monoïdale fermée est exact à droite : l'assertion d'unicité résulte donc du fait que l'image essentielle de $\mathbb{Z}_S^{tr}$ est génératrice dans la catégorie abélienne $\mathscr{N}_S^{tr}$.

Pour des faisceaux avec transferts F et G sur S, on pose :

$$F \otimes_S^{tr} G = \varinjlim_{X/F, Y/G} \mathbb{Z}_S^{tr}(X \times_S Y)$$

suivant les notations de la remarque IX.5 appliquée à F et G. Cette définition est fonctorielle en F et G d'après la fontorialité de l'identification (IX.8).

Il est immédiat que cela définit un produit tensoriel symétrique sur $ftrS$. On définit $\underline{\mathrm{Hom}}_S(F, G)$ comme le faisceau avec transferts

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{N}_S^{tr}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(X) \otimes_S^{tr} F, G).$$

D'après le lemme de Yoneda, pour tout schéma X dans $\mathscr{L}_S$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{N}_S^{tr}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(X), \underline{\mathrm{Hom}}_S(F, G)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{N}_S^{tr}}(\mathbb{Z}_S^{tr}(X) \otimes^{tr} F, G).$$

La propriété d'adjonction entre $\otimes_S^{tr}$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_S$ résulte donc de la remarque IX.5. □

IX.2.3.a. — Soit Σ un schéma régulier et $f : T \to S$ un morphisme dans $\mathscr{L}_\Sigma$. On a définit en VI.7 un foncteur de changement de base :

$$\mathscr{L}_S^{cor} \to \mathscr{L}_T^{cor}$$

que l'on note ici f_0^*.

Si G est un faisceau avec transferts sur T, $f_*(G) := G \circ f_0^*$ est encore un faisceau avec transferts par définition de f_0^*.

Soit F un faisceau avec transferts sur S. Avec les notations de la remarque IX.5, on pose :

$$f^*(F) = \varinjlim_{X/F} \mathbb{Z}_T^{tr}(X \times_S T)$$

où la limite inductive est prise dans la catégorie des faisceaux avec transferts sur T. D'après la fonctorialité de l'identification (IX.8).

On vérifie facilement à partir du lemme de Yoneda que f^* est adjoint à gauche de f_* et on a donc définit un couple de foncteurs adjoints :

$$f^* : \mathscr{N}_S^{tr} \leftrightarrows \mathscr{N}_T^{tr} : f_*. \tag{IX.10}$$

Notons que par définition f^* prolonge f_0^* à travers le foncteur $\mathbb{Z}_S^{tr} : \mathscr{L}_S^{cor} \to \mathscr{N}_S^{tr}$. Cette propriété détermine le couple (f^*, f_*).

Supposons de plus que $f : T \to S$ est lisse séparé de type fini. On a définit au numéro VI.6 un foncteur de restriction

$$\mathscr{L}_T^{cor} \to \mathscr{L}_S^{cor}$$

que l'on notera ici $f_\sharp^0$. On prolonge ce foncteur aux catégories de faisceaux avec transferts en associant à tout faisceau avec transferts G sur T le faisceau avec transferts sur S :

$$f_\sharp(G) = \varinjlim_{Y/G} \mathbb{Z}_S^{tr}(f_\sharp^0(Y))$$

avec les notations de la remarque IX.5.

Lemme IX.15. — *Avec les notations précédentes, le foncteur $f_\sharp$ est adjoint à gauche du foncteur f^*.*

Démonstration. — Notons aussi que si F est un faisceau avec transferts sur S, $\phi(F) := F \circ f_\sharp^0$ est encore un faisceau avec transferts. On définit ainsi un foncteur ϕ ; le lemme de Yoneda implique que ϕ est adjoint à droite du foncteur $f_\sharp$. Il reste donc à identifier les foncteurs ϕ et f^*.

Compte tenu de l'adjonction $(f_\sharp^0, f_0^*)$ (voir corollaire VI.14), on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathbb{Z}_T^{tr}(X \times_S T) \simeq \phi(\mathbb{Z}_S^{tr}(X)).$$

qui est naturel en X par rapport aux S-correspondances finies. On en déduit par passage à la limite un isomorphisme :

$$f^*(F) = \varinjlim_{X/F} \mathbb{Z}_T^{tr}(X \times_S T) \simeq \varinjlim_{X/F} \phi(\mathbb{Z}_S^{tr}(X)).$$

Or, puisque ϕ commute aux limites inductives, le membre de droite de cet isomorphisme s'identifie au foncteur $\phi(F)$ grâce à (IX.8). $\square$

On a donc prolongé l'adjonction $(f_\sharp^0, f_0^*)$ en une adjonction de catégories abéliennes :

(IX.11) $$f_\sharp : \mathscr{N}_T^{tr} \leftrightarrows \mathscr{N}_S^{tr} : f^*.$$

Les propriétés suivantes résultent maintenant formellement de leur analogue dans les catégories $\mathscr{L}_?^{cor}$:

1. Soit $f : T \to S$ un morphisme lisse séparé de type fini, F un faisceau avec transferts sur S et G un faisceau avec transferts sur T. Alors, $f_\sharp(f^*(F) \otimes G) = F \otimes f_\sharp(G)$.
2. Considérons un carré cartésien de schémas

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & S' \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "p"] & S. \end{tikzcd}$$

   tel que p est lisse séparé de type fini et f est un morphisme dans $\mathscr{L}_\Sigma$. Alors, pour tout faisceau avec transferts G sur T, $f^* p_\sharp(G) = q_\sharp g^*(G)$.

2.4. Complexes motiviques. — Dans cette section, nous donnons une première définition des complexes motiviques en s'appuyant notamment sur la théorie de Neeman concernant les localisations de catégorie triangulées. Les résultats énoncés dans ce qui suit seront repris par la suite.

***Définition IX.10* (Neeman).** — Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes infinies.

Nous dirons qu'une sous-catégorie triangulée $\mathscr{Q}$ de $\mathscr{T}$ est *localisante* si elle est stable par somme infinie.

D'après la remarque VII.4, une sous-catégorie triangulée localisante est une sous-catégorie triangulée épaisse (définition VII.7).

IX.2.4.a. — Considérons un schéma régulier S. La catégorie abélienne $\mathscr{N}_S^{tr}$ des faisceaux avec transferts sur S est abélienne de Grothendieck. On a vu dans le corollaire VII.7.1 que sa catégorie dérivée $\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})$ (*cf.* paragraphe VII.1.3.b) admet une structure triangulée canonique telle que le foncteur canonique

$$\mathsf{K}(\mathscr{N}_S^{tr}) \to \mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr}) \tag{IX.12}$$

est triangulé.

Notons que la catégorie $\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})$ admet des sommes infinies.[8] On note $\mathscr{T}_S^{\mathbb{A}^1}$ la plus petite sous-catégorie triangulée localisante de $\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})$ contenant les complexes de la forme :

$$\ldots 0 \to \mathbb{Z}_S^{tr}(\mathbb{A}_X^1) \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z}_S^{tr}(X) \to 0 \ldots$$

où p est la projection canonique la droite affine $\mathbb{A}_X^1$ sur X, pour un schéma X dans $\mathscr{L}_S$.

Définition IX.11. — Avec les notations précédentes, on note $DM^{eff}(S)$ la catégorie triangulée quotient $\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})/\mathscr{T}_S^{\mathbb{A}^1}$ (définition VII.8).

Suivant Morel et Voevodsky, on appelle $DM^{eff}(S)$ la $\mathbb{A}^1$-localisation de $\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})$.

IX.2.4.b. — Considérons le foncteur canonique, pleinement fidèle,

$$\mathbb{Z}_S^{tr} : \mathscr{L}_S^{cor} \to \mathscr{N}_S^{tr}.$$

Puisqu'il est additif, il induit un unique foncteur triangulé

$$\mathsf{K}(\mathscr{L}_S^{cor}) \to \mathsf{K}(\mathscr{N}_S^{tr})$$

qui nous permet à partir de (IX.12) de définir un foncteur triangulé canonique :

$$\mathsf{K}^b(\mathscr{L}_S^{cor}) \to \mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr}) \to DM^{eff}(S).$$

D'après la proposition IX.13, pour tout carré Nisnevich distingué de la forme (IX.1), le complexe de faisceaux avec transferts (IX.9) est acyclique. D'après la définition VII.10, le foncteur précédent induit donc un unique foncteur triangulé :

$$DM_{gm}^{eff}(S) \to DM^{eff}(S). \tag{IX.13}$$

Remarque IX.6. — Nous verrons plus tard que ce foncteur est pleinement fidèle et nous déterminerons son image dans $DM^{eff}(S)$.

---

[8] Simplement parce que les sommes infinies dans $\mathscr{N}_S^{tr}$ sont exactes d'après IX.12.4.

Définition IX.12. — Soit P un préfaisceau abélien sur $\mathscr{L}_S$ (resp. $\mathscr{L}_S^{cor}$). On dit que P est *invariant par homotopie* si pour tout schéma lisse X, le morphisme

$$P(X) \xrightarrow{p^*} P(\mathbb{A}^1_X)$$

induit par la projection canonique de la droite affine $\mathbb{A}^1_X$ est un isomorphisme.

Soit K un complexe de $\mathscr{N}_S$ (resp. $\mathscr{N}_S^{tr}$). On dit que K est $\mathbb{A}^1$-local si pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, le préfaisceau $H^i_{Nis}(-, K)$ (resp. $H^i_{Nis}(-, \gamma_*(K))$) est invariant par homotopie.

Un *complexe motivique* K sur S est un complexe de faisceaux avec transferts sur S tel que pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, le préfaisceau

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})}(\mathbb{Z}_S^{tr}(X), K[i])$$

est invariant par homotopie.

Remarque IX.7. — Nous verrons plus tard qu'il existe un isomorphisme canonique $H^i_{Nis}(X, \gamma_*(K)) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})}(\mathbb{Z}_S^{tr}(X), K[i])$. Ainsi, un complexe motivique est un complexe de faisceaux avec transferts $\mathbb{A}^1$-local.

Le théorème de représentabilité de Brown de Neeman nous permet de donner une première démonstration du théorème suivant[(9)] :

Théorème IX.16. — *Le foncteur de projection canonique*

$$\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr}) \to DM^{eff}(S)$$

induit une équivalence de catégorie entre $DM^{eff}(S)$ et la sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})$ formée des complexes motiviques.

D'après le théorème 0.2 de [**Nee01a**], la catégorie $\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})$ est bien engendrée dans le sens de la remarque 8.1.7 de [**Nee01b**]. Il en résulte qu'on peut appliquer le théorème 9.1.16 de [**Nee01b**] à la catégorie triangulée $\mathsf{D}(\mathscr{N}_S^{tr})$ ainsi qu'à la sous-catégorie triangulée localisante $\mathscr{T}_S^{\mathbb{A}^1_S}$. Ceci démontre le théorème précédent puisque les objets $\mathscr{T}_S^{\mathbb{A}^1}$-locaux dans le sens de la définition 9.1.3 de *loc. cit.* sont précisément les complexes motiviques.

Références

[AGV73] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972–1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie 1963–64 (SGA 4).

[Nee01a] A. Neeman – « On the derived category of sheaves on a manifold », *Doc. Math.* **6** (2001), p. 483–488 (electronic).

[Nee01b] ———, *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 148, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[Ray70] M. Raynaud – *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 169, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

2009-2010

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* `deglise@math.univ-paris13.fr` *Url :* `http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/`

---

(9) nous redonnerons une démonstration de ce résultat plus tard.