Table des matières

COURS X
FAISCEAUX HOMOTOPIQUES

1. Correspondances finies à homotopie près

1.1. Relation d'homotopie. — Fixons un schéma régulier S.

Définition X.1. — Considérons deux S-correspondances finies $\alpha, \beta : X \bullet\!\!\rightarrow Y$. Notons s_0 (resp. s_1) la section nulle (resp. unité) $X \to \mathbb{A}^1_X$ du X-schéma en anneaux $\mathbb{A}^1_X$.

On dit que α est *homotope* à β s'il existe une S-correspondances finie $H : \mathbb{A}^1_X \bullet\!\!\rightarrow Y$ tel que $H \circ s_0 = \alpha$, $H \circ s_1 = \beta$. On note encore $\alpha \sim_h \beta$ et on dit que H est une *homotopie* de α vers β.

Lemme X.1. — 1. *Considérons deux S-correspondances finies $\alpha, \beta : X \bullet\!\!\rightarrow Y$ telles que $\alpha \sim_h \beta$.*

(a) $(-\alpha) \sim_h (-\beta)$.

(b) *Pour toute S-correspondance $\gamma : X \bullet\!\!\rightarrow Y$, $\alpha + \gamma \sim_h \beta + \gamma$.*

(c) *Pour toute S-correspondance $\gamma : Y \to Y'$, $\gamma \circ \alpha \sim_h \gamma \circ \beta$.*

(d) *Pour toute S-correspondance $\gamma : X' \to X$, $\alpha \circ \gamma \sim_h \beta \circ \gamma$.*

(e) *Pour toute S-correspondance $\gamma : X' \to Y'$, $\alpha \otimes^{tr}_S \gamma \sim_h \beta \otimes^{tr}_S \gamma$.*

2. *La relation $\sim_h$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — Considérons l'ensemble de propriétés du point 1 et notons $H : \mathbb{A}^1_X \bullet\!\!\rightarrow Y$ une homotopie de α vers β. Alors, dans chacun des cas considérés, les homotopies attendues sont données par les formules suivantes :

1.(a) $-H$

1.(b) $H + \gamma \circ p$

1.(c) $\gamma \circ H$.

1.(d) $H \circ (1_{\mathbb{A}^1_S} \otimes^{tr}_S \gamma)$.

1.(e) $H \otimes^{tr}_S \gamma$.

Il en résulte que $\alpha \sim_h \beta$ si et seulement si $(\alpha - \beta) \sim_h 0$. Le point 2 suit alors facilement. □

Il en résulte que les classes d'équivalences de S-correspondances finies pour la relation d'homotopie forment un groupe et que la loi de composition se factorise par cette relation d'équivalence.

Définition X.2. — Pour des schémas X, Y dans $\mathscr{L}_S$, on note $\pi_S(X,Y)$ le groupe des S-correspondances finies modulo homotopie. On note $\pi\mathscr{L}_S^{cor}$ la catégorie ayant mêmes objets que $\mathscr{L}_S$ avec pour morphismes de X vers Y le groupe $\pi_S(X,Y)$.

Notons que la catégorie $\pi\mathscr{L}_S^{cor}$ est additive et, d'après 1.(e) dans le lemme précédent, monoïdale symétrique telle que le foncteur plein canonique

$$\mathscr{L}_S^{cor} \to \pi\mathscr{L}_S^{cor}$$

est additif monoïdal symétrique.

Par ailleurs, si Σ est un schéma régulier, pour un morphisme $f : T \to S$ dans $\mathscr{L}_\Sigma$ (resp. lisse séparé de type fini) le foncteur $f^* : \mathscr{L}_S^{cor} \to \mathscr{L}_T^{cor}$ (resp. $f_\sharp : \mathscr{L}_T^{cor} \to \mathscr{L}_S^{cor}$) introduit dans la définition VI.7 (resp. VI.6) induit un unique foncteur

$$f^* : \pi\mathscr{L}_S^{cor} \to \pi\mathscr{L}_T^{cor} \tag{X.1}$$

$$f_\sharp : \pi\mathscr{L}_T^{cor} \to \pi\mathscr{L}_S^{cor}. \tag{X.2}$$

1.2. Groupe de Picard. —

X.1.2.a. — Considérons un schéma X ainsi que le site de Zariski X_{Zar} qui lui est associé dans l'exemple VIII.5.

On note $\mathscr{A}b_X$ la catégorie des faisceaux abéliens sur X_{Zar} (voir paragraphe VIII.5.0.r). Rappelons que d'après la proposition VIII.9, c'est une catégorie abélienne de Grothendieck, monoïdale symétrique fermée.

Si F est un pré-faisceau d'ensembles (resp. abélien) sur X_{Zar} et x un point de X, on définit sa fibre au point x comme l'ensemble :

$$F_x = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}(x)} F(V)$$

(voir aussi le paragraphe II.1.2.f). Rappelons que le foncteur $\Phi_x : F \mapsto F_x$ est exact sur la catégorie des faisceaux (resp. abélien) sur X_{Zar} et que la famille de ces fonteurs pour x un point de X est conservative (même démonstration que pour la proposition IX.6). Notons par ailleurs que Φ_x est monoïdal.

Remarque X.1. — Concernant la fonctorialité, les catégories $\mathscr{A}b_X$ possèdent des propriétés analogues à celles déjà vues pour les faisceau Nisnevich sur $\mathscr{L}_S$.

Plus précisément, pour tout morphisme de schémas $f : Y \to X$, on définit une adjonction de catégories abéliennes :

$$f^{-1} : \mathscr{A}b_X \leftrightarrows \mathscr{A}b_Y : f_*$$

telle que pour tout faisceau $\mathcal{E}$ sur X_{Zar}, et tout ouvert V de Y, $f_*(\mathcal{E})(V) = \mathcal{E}(V \times_X Y)$. Le foncteur f^{-1} est monoïdal.

On a par ailleurs un morphisme de restriction : pour toute immersion ouverte $j : U \to X$, on obtient une adjonction de catégories abéliennes :

$$j_! : \mathscr{A}b_U \to \mathscr{A}b_X : j^*.$$

X.1.2.b. — Considérons à nouveau un schéma X. Le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ sur X_{Zar} peut-être vu comme un monoïde de la catégorie monoïdale $\mathscr{A}b_X$: on définit un $\mathcal{O}_X$-module comme un faisceau abélien $\mathcal{E}$ sur X_{Zar} munit d'une action de $\mathcal{O}_X$: $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Il revient au même de demander que pour tout ouvert $U \subset X$, $\mathcal{E}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$-module, de façon naturelle en U. On note $\mathcal{O}_X-$mod la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules. Comme dans le cas des modules sur un anneau, on obtient une adjonction de catégories

$$L : \mathscr{A}b_X \leftrightarrows \mathcal{O}_X-\mathrm{mod} : o$$

où o est le foncteur d'oubli. Le foncteur L est exact. On en déduit formellement que la catégorie $\mathcal{O}_X-\mathrm{mod}$ est abélienne de Grothendieck.

Considérons les notations de la remarque X.1. Pour tout morphisme de schémas $f : Y \to X$, on dipose de morphismes d'anneaux canoniques

$$f^{-1}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_Y,$$
$$\mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{O}_Y).$$

Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, $f^{-1}(\mathcal{E})$ est un $f^{-1}(\mathcal{O}_X)$-module et on pose : $f^*(\mathcal{E}) = f^{-1}(\mathcal{E}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_X$.

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module, $f_*(\mathcal{F})$ est un $f_*(\mathcal{O}_Y)$-module et donc, par restriction des scalaires, un $\mathcal{O}_X$-module que l'on note encore $f_*(\mathcal{F})$.

On a ainsi définit une adjonction de catégories abéliennes :

$$f^* : \mathcal{O}_X-\mathrm{mod} \leftrightarrows \mathcal{O}_Y-\mathrm{mod} : f_*. \tag{X.3}$$

Notons que le morphisme f^* est par définition monoïdal symétrique. Dans le cas où $f = j : U \to X$ est une immersion ouverte, $j^*(\mathcal{E}) = \mathcal{E}|_U$ est simplement la restriction de $\mathcal{E}$ à U_{Zar} (*cf.* paragraphe II.1.3.a).

Définition X.3. — Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module.

1. On dit que $\mathcal{E}$ est *libre* s'il est isomorphe $\mathcal{O}_X^n$ pour un entier $n > 0$. Si X est non vide, l'entier n est est alors uniquement déterminé. On l'appelle le *rang* de $\mathcal{E}$.
2. On dit que $\mathcal{E}$ est *localement libre* si pour tout point x de X, il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $\mathcal{E}|_U$ est libre. On note alors $\mathrm{rg}_x(\mathcal{E})$ le rang de $\mathcal{E}|_U$.
3. On dit que $\mathcal{E}$ est *inversible* s'il est localement libre de rang 1 en tout point de X.

Les modules libres (resp. localement libres, inversibles) sont stables par le foncteur f^*.[1]

X.1.2.c. — Comme $\mathcal{O}_X$ est un monoïde commutatif de la catégorie $\mathscr{A}b_X$, la catégorie $\mathcal{O}_X-\mathrm{mod}$ est monoïdale symétrique. On note $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ sont produit tensoriel. Notons enfin que pour tous $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, le préfaisceau

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U)$$

est un faisceau qui porte une structure naturelle de $\mathcal{O}_X$-module. On vérifie facilement que le bifoncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}$ ainsi définit est l'adjoint à droite du bifoncteur $\otimes_{\mathcal{O}_X}$.

Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, on pose $\mathcal{E}^\vee := \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ en utilisant le Hom interne de la catégorie $\mathcal{O}_X-\mathrm{mod}$. On dispose donc d'un morphisme d'adjonction canonique :

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^\vee \to \mathcal{O}_X. \tag{X.4}$$

Proposition X.2. — *Supposons que $\mathcal{E}$ est localement libre. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible.*

(ii) *Le morphisme* (X.4) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Calculant la fibre de (X.4) en un point $x \in X$, on est ramené au cas des $\mathcal{O}_{X,x}$-modules qui est trivial. □

Remarque X.2. — On peut aussi montrer par le même raisonnement que si $\mathcal{E}$ est localement libre de rang fini (en tout point de X), alors $\mathcal{E}$ est fortement dualisable dans $\mathcal{O}_X-\mathrm{mod}$ avec pour dual fort $\mathcal{E}^\vee$ (voir définition VI.5).

---

[1] Cela résulte simplement de la relation $f^*g^* = (gf)^*$.

X.1.2.d. — Notons que les $\mathcal{O}_X$-modules inversibles sont trivialement stables par produit tensoriel. La proposition précédente montre que l'ensembles des classes d'isomorphies de $\mathcal{O}_X$-modules inversibles forment un groupe $\mathrm{Pic}(X)$ dont la loi est engendrée par $\otimes_{\mathcal{O}_X}$.

Définition X.4. — On appelle $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe de Picard de X.

Pour tout morphisme de schémas $f : Y \to X$, les $\mathcal{O}_X$-modules inversibles sont stables par le foncteur de changement de base f^*. On en déduit un morphisme canonique de groupes abéliens :

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Y), [\mathcal{L}] \mapsto [f^*(\mathcal{L})]. \tag{X.5}$$

Exemple X.1. — Soit A un anneau, $X = \mathrm{Spec}(A)$. On note $\tilde{M}$ le faisceau associé au préfaisceau :

$$U \mapsto M \otimes_A \mathcal{O}_X(U).$$

D'après cette définition, $\tilde{M}$ est un $\mathcal{O}_X$-module. Il est évident que $\tilde{A} = \mathcal{O}_X$. Par ailleurs, le foncteur

$$A-\mathrm{mod} \to \mathcal{O}_X-\mathrm{mod}, M \mapsto \tilde{M}.$$

est monoïdal. Généralisant la proposition II.5, on obtient de plus que ce foncteur est une équivalence de catégories (voir [**EGA1**, 1.3.8, 1.4.2]).

Il en résulte que le groupe de Picard de X est isomorphe à l'ensembles des classes d'isomorphies de A-modules projectifs de type fini de rang 1 (d'après la proposition IV.12, M est projectif de type fini si et seulement si $\tilde{M}$ est localement libre de rang fini).

Rappelons qu'un schéma X est dit *semi-local* s'il n'a qu'un nombre fini de points fermés. Alors X est nécessairement un schéma affine, spectre d'un anneau semi-local A. L'exemple précédent donen facilement le résultat suivant :

Corollaire X.2.1. — *Soit X un schéma semi-local. Alors,* $\mathrm{Pic}(X) = 0$.

Démonstration. — D'après l'exemple précédent, il s'agit de montrer que tout A-module M projectif de type fini localement libre de rang 1 est libre. Soit M un tel A-module.

Soit $(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}$ la famille finie des idéaux maximaux de A et $\mathfrak{a} = \cap_{i\in I}\mathfrak{m}_i$ le radical de Jacobson de A. On pose $k_i = A/\mathfrak{m}_i$.

Pour tout $i \in I$, $M_{\mathfrak{m}_i}$ est un $A_{\mathfrak{m}_i}$-module libre de rang 1. Il existe donc un élément $x_i \in M$ tel que x_i est non nul dans $M \otimes_A k_i$.

Appliquant le théorème du reste Chinois à l'anneau $A/\mathfrak{a}$, pour tout $i \in I$, il existe un élément $\lambda_i \in A$ tel que pour tout $j \in I$, la classe $\bar{\lambda}_i$ dans k_j vérifie :

$$\bar{\lambda}_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $x = \sum_{i\in I} \lambda_i.x_i$. Il en résulte que pour tout $i \in I$, la classe de x dans $M \otimes_A k_i$ est non nulle ; c'est donc une base de ce k_i-espace vectoriel qui est par hypothèse de dimension 1.

Considérons maintenant le morphisme $\varphi : A \to M, \lambda \mapsto \lambda.x$ et montrons que c'est un isomorphisme. D'après le lemme de Nakayama et la propriété précédente de x, ce morphisme est surjectif. Notant N son noyau, il reste à montrer que $N = 0$.

Le A-module M étant projectif, la suite exacte des Tor suivante :

$$\ldots \to \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) \to N \otimes_A A/\mathfrak{a} \to A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\varphi\otimes_A A/\mathfrak{a}} M \otimes_A A/\mathfrak{a} \to 0$$

montre que $N \otimes_A A/\mathfrak{a} = 0$ et le lemme de Nakayama permet de conclure. $\square$

On dit qu'un schéma intègre noethérien X est *localement factoriel* si pour tout point $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel.(2) Ainsi, tout schéma régulier est localement factoriel. Rappelons le théorème suivant :

Théorème X.3. — *Soit X un schéma noethérien normal.*

Alors, il existe un morphisme canonique

$$\mathrm{Pic}(X) \to CH^1(X)$$

naturel en X par rapport aux morphismes plats.(3) *Si X est localement factoriel, c'est un isomorphisme.*

Pour ce théorème, on réfère le lecteur à [**21.6.10**, EGA4] (ou pour une référence plus accessible : [**Har77**, 6.16]).

Remarque X.3. — La construction de cet isomorphisme utilise la notion intermédiaire de *diviseurs de Cartier* qui permet de donner une description plus intrinsèque du morphisme (II.26) – plus proche de la notion de diviseur dans le cas affine.

Exemple X.2. — Soit A un anneau noethérien intègre factoriel. Alors, pour tout ouvert U de $\mathrm{Spec}(A)$, $\mathrm{Pic}(U) = 0$.

Cela résulte du théorème précédent, de l'exemple II.22 et du fait que le morphisme canonique $j^* : CH^1(X) \to CH^1(U)$ est surjectif.

1.3. Le théorème de Suslin-Voevodsky. —

X.1.3.a. — Rappelons qu'une paire fermée est un couple (X, Z) formée d'un schéma X et d'un sous-schéma fermé Z. Considérons une telle paire fermée (voir paragraphe VII.2.2.a).

Pour un $\mathcal{O}_X$-module inversible, on pose par commodité : $\mathcal{L}|_Z = i^*(\mathcal{L})$ où $i : Z \to X$ est l'immersion fermée structurale. Une *trivialisation* de $\mathcal{L}$ au-dessus de Z est un isomorphisme $s : \mathcal{O}_X|_Z \to \mathcal{L}|_Z$.

Les couples $(\mathcal{L}, s)$ formés d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ et d'une trivialisation s de $\mathcal{L}$ sur Z forment une sous-catégorie de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules avec pour flèches les morphismes $\mathcal{O}_X$-linéaire $\varphi : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$ tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_X|_Z \arrow[ld, "s"'] \arrow[rd, "s'"] & \\ \mathcal{L}|_Z \arrow[rr, "\varphi|_Z"] & & \mathcal{L}'|_Z. \end{tikzcd}$$

On note $\mathcal{P}ic_{X,Z}$ cette catégorie.

Si $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}'$) est un $\mathcal{O}_X$-module inversible munit d'une trivialisation s (resp. s') sur U, le morphisme $s \otimes_{\mathcal{O}_X} s'$ est une trivialisation de $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}'$ au-dessus de Z.

Définition X.5. — Soit (X, Z) une paire fermée, $U = X - Z$. On définit le groupe de Picard relatif $\mathrm{Pic}(X, Z)$ comme l'ensemble des classes d'isomorphismes de la catégorie $\mathrm{Pic}_{X,Z}$ muni de la loi de groupe induite par $\otimes_{\mathcal{O}_X}$.

On obtient par construction un morphisme de groupes abéliens :

$$\mathrm{Pic}(X, Z) \to \mathrm{Pic}(X). \tag{X.6}$$

Plus généralement, si $Z' \subset Z$ est un sous-schéma fermé, on obtient un morphisme de groupes abéliens :

$$\mathrm{Pic}(X, Z) \to \mathrm{Pic}(X, Z'), [(\mathcal{L}, s)] \mapsto [(\mathcal{L}, s|_{Z'})]. \tag{X.7}$$

(2) *i.e.* dans $\mathcal{O}_{X,x}$, tout idéal premier de de hauteur 1 est principal.

(3) En considérant la fonctionrialité de (X.5) et de la définition II.26.

Si $f : Y \to X$ est un morphisme de schémas, $T = f^{-1}(Z)$, on définit un morphisme de groupes abéliens

$$f^* : \mathrm{Pic}(X, Z) \to \mathrm{Pic}(Y, T), [(\mathcal{L}, s)] \mapsto [(f^*\mathcal{L}, f^*s)].$$

Le morphisme (X.7) est naturel vis à vis de cette fontorialité.

Définition X.6. — Soit $f : X \to S$ un morphisme séparé de type fini.

Une *compactification* de f est une factorisation

$$X \xrightarrow{j} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} S$$

de f telle que j est une immersion ouverte et $\bar{f}$ un morphisme propre.

De manière abrégée, on dit encore que $\bar{X}/S$ est une compactification de X/S. On identifie X à un ouvert de $\bar{X}$ et on note X_∞ le fermé complémentaire, munit de sa structure réduite. On appelle X_∞ le *lieu à l'infini* de la compactification $\bar{X}/S$.

Remarque X.4. — Le théorème de Nagata affirme que si S est noethérien, tout S-schéma séparé de type fini admet une compactification (*cf.* [**Con07**]).

X.1.3.b. — Considérons un schéma affine régulier S. On dit qu'un schéma X est *quasi-affine* si c'est un ouvert d'un schéma affine. Pour abréger, on dit qu'un S-schéma X est une *courbe* (relative) s'il est de type fini et ses fibres sont de dimension 1.

Définition X.7. — Soit X/S une courbe quasi-affine lisse. Une bonne compactification de X/S est une compactification $\bar{X}/S$ telle que :

1. $\bar{X}/S$ est une courbe.
2. $\bar{X}$ est normal.
3. Il existe un ouvert V de $\bar{X}$ tel que V est affine sur S et $X_\infty \subset V$.

Remarque X.5. — Ces hypothèses impliquent en particulier que X_∞ est un schéma affine et propre sur S. Il en résulte que X_∞ est fini sur S (*cf.* [**4.4.2**, EGA3]).

X.1.3.c. — Considérons les hypothèses de la définition et supposons donnée une bonne compactification $\bar{X}/S$ de X/S.

Lemme X.4. — *Tout sous-schéma fermé Z de X qui est fini et pseudo-dominant sur S est de codimension pure égale à 1 dans X.*

Démonstration. — On raisonne sur les composantes irréductibles de Z et l'on peut donc supposer que Z est irréductible. Soit x son point générique et s son image dans S.

Notons k et E les corps résiduels respectifs de s et x. On note $X_s = X \times_S \mathrm{Spec}(k)$ la fibre de X au-dessus de s. Comme le morphisme canonique $Z \to S$ est fini, $Z_s = Z \times_S \mathrm{Spec}(k) = \mathrm{Spec}(E)$.

Par hypothèse, s est un point générique de S. Il en résulte que la codimension de Z dans X est égale à la codimension de Z_s dans X_s. Par hypothèse, X_s est un $\kappa(s)$-schéma de type fini de dimension 1. Comme Z_s est un point fermé de X_s, la conclusion en résulte (*cf.* théorème II.8). □

Soit Y un schéma affine dans $\mathscr{L}_S$. Alors, $Y \times_S \bar{X}/Y$ est une bonne compactification de $Y \times_S X/Y$. D'après le lemme précédent, toute correspondance finie $\alpha \in c_S(Y, X)$ est un cycle 1-codimensionnel dans $Y \times_S X$. Comme X est un ouvert de $\bar{X}$, il en résulte que son image directe par le morphisme $Y \times_S X \to Y \times_S \bar{X}$ est encore 1-codimensionnel. On peut finalement considérer sa classe dans le groupe de Chow ce qui nous donne un morphisme canonique :

$$c_S(Y, X) \to \mathrm{CH}^1(Y\bar{X}).^{(4)}$$

(4) On a supprimé le symbole $\times_S$ pour alléger les notations.

Théorème X.5. — *Considérant les notations introduites précédemment, il existe un unique morphisme pointillé rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} c_S\,(Y,X) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, dashed] & \mathrm{CH}^1(Y\bar{X}) \\ \mathrm{Pic}(Y\bar{X}, YX_\infty) \arrow[r, "(2)"] & \mathrm{Pic}(Y\bar{X}) \arrow[u, "(3)"'] \end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche (1) est celle qui vient d'être définie, la flèche (2) (resp. (3)) est donnée par (X.7) *(resp. le théorème X.3).*

Cette flèche pointillée se factorise par la relation d'homotopie et induit un isomorphisme :

$$\pi_S(Y,X) \to \mathrm{Pic}(Y\bar{X}, YX_\infty). \tag{X.8}$$

est un isomorphisme.

On réfère le lecteur au théorème 3.1 de [**SV96**].

Remarque X.6. — D'après l'assertion d'unicité dans le théorème précédent, l'isomorphisme (X.8) est naturel en Y par rapport aux morphismes plats.[5]

Remarque X.7. — Considérons une immersion ouverte $j : U \to X$. Alors, U/S est encore une courbe quasi-affine lisse. Si $Z \sqcup X_\infty$ admet un voisinage ouvert affine dans $\bar{X}$, $\bar{X}/S$ est une bonne compactification de U/S. Dans cette situation, on peut ajouter au théorème précédent que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \pi_S(Y,U) \arrow[r] \arrow[d, "j_*"'] & \mathrm{Pic}(Y\bar{X}, YX_\infty \sqcup YZ) \arrow[d] \\ \pi_S(Y,X) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(Y\bar{X}, YX_\infty) \end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche verticale droite est celle de (X.7).

1.4. Construction de correspondances à homotopie près. — La première application nous permet de construire des sections locales de certaines immersions ouvertes.

Proposition X.6. — *Considérons la situation de la remarque X.7 pour une immersion ouverte $j : U \to X$ d'image dense.*

Alors, pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x dans X et un élément $\alpha \in c_S\,(U,V)$ qui fait commuter le diagramme suivant à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, hook] \\ U \arrow[r, "j"'] & X. \end{tikzcd}$$

Démonstration. — L'affirmation étant locale en X, et U étant dense, on peut supposer que X est affine. D'après l'isomorphisme (X.8), l'identité de X correspond à un élément $(\mathcal{L}, s)$ de $\mathrm{Pic}(X\bar{X}, XX_\infty)$. Soit Z le fermé complémentaire de U dans X. Puisque $\bar{X}/S$ est une bonne compactification de U/S, Z/S est fini (voir la remarque X.5).

Considérons le schéma local $X_{(x)} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Le morphisme induit $a : X_{(x)} \times_S Z \to X_{(x)}$ est fini. Ainsi, l'ensembles des points fermés de $X_{(x)} \times_S Z$ est égal à la fibre de a au-dessus de l'unique point fermé x de $X_{(x)}$. Comme a est fini, cette fibre est finie et $X_{(x)} \times_S Z$ est semi-local. Il en résulte que $\mathrm{Pic}(X_{(x)} \times_S Z) = 0$ (*c.f.* corollaire X.2.1).

(5) On peut voir qu'il est naturel par rapport à tous les morphismes de $\mathscr{L}_S$ mais on n'utilisera pas ce résultat.

Appliquant cela à la restriction de $\mathcal{L}$ au schéma $X_{(x)} \times_S Z$, on en déduit[(6)] qu'il existe un voisinage ouvert affine V de x dans X tel que $\mathcal{L}|_{VZ}$ admet une trivialisation s'.

On peut alors considérer la classe de $(\mathcal{L}|_{V\bar{X}}, s_{V\bar{X}} \oplus s')$ dans $\mathrm{Pic}(V\bar{X}, VX_\infty \sqcup VZ)$. Notons $\alpha : V \bullet\!\!\rightarrow U$ la correspondance finie qui lui correpond par l'isomorphisme (X.8).

Notons que d'après la remarque X.6, la classe de $(\mathcal{L}|_{V\bar{X}}, s_{V\bar{X}})$ dans $\mathrm{Pic}(V\bar{X}, VX_\infty)$ correspond au morphisme j par (X.8). La commutativité du diagramme de l'énoncé résulte donc de la remarque X.7. $\square$

X.1.4.a. — Considérons un corps k. Notons que dans la proposition précédente, si S est un k-schéma (affine) lisse de morphisme structural $p : S \to \mathrm{Spec}(k)$, on obtient en appliquant le foncteur $p_\sharp$ un diagramme commutatif dans $\pi\mathscr{L}_k^{cor}$. En utilisant l'existence de bonnes compactifications au voisinage d'un point d'un k-schéma affine lisse, on en déduit le résultat suivant :

Proposition X.7. — *Pour tout k-schéma lisse séparé de type fini et tout ouvert dense $j : U \subset X$, il existe un recouvrement ouvert $p : W \to X$ et une S-correspondance finie $\alpha : W \to U$ tels que le diagramme suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{tikzcd} & \bullet W \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "j"'] & X. \end{tikzcd}$$

Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [**Dég07**, 4.3.22]

Citons encore l'application suivante du théorème précédent :

Proposition X.8. — *Soit C/k une courbe affine lisse satisfaisant la condition suivante :*

(N) *Pour toute extension finie L/k,* $\mathrm{Pic}(C \times_k \mathrm{Spec}(L)) = 0$.

Alors, pour tout carré Nisnevich distingué de schémas affines

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"'] & V \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "j"] & C \end{tikzcd}$$

le complexe suivant

$$[W] \xrightarrow{\binom{h}{-l}} [U] \oplus [V] \xrightarrow{(j,p)} [C]$$

est contracile dans la catégorie additive $\pi\mathscr{L}_k^{cor}$.

Pour ce théorème, on réfère le lecteur à [**Dég07**, 4.3.24].

2. Faisceaux homotopiques

Dans cette section on fixe un corps parfait k. Tous les k-schémas considérés sont séparés de type fini sauf mention explicite du contraire.

[(6)] En effet, $\mathrm{Pic}(X_{(x)} \times_S Z) = \varinjlim_{V \subset X} \mathrm{Pic}(V \times_S Z)$ où V parcourt les voisinages ouverts affines de x dans X.

2.1. Définition. —

Définition X.8. — Un *faisceau (*resp. *préfaisceau) homotopique* F est un faisceau (resp. préfaisceau) avec transferts qui est invariant par homotopie (*cf.* définition IX.12).

On note $H\mathscr{N}_k^{tr}$ (resp. $H\mathscr{P}_k^{tr}$) la sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}_k^{tr}$ (resp. $\mathscr{P}_k^{tr}$) formée des faisceaux (resp. préfaisceaux) homotopiques.

Il en résulte que F induit un unique préfaisceau

$$F : (\pi\mathscr{L}_k^{cor})^{op} \to \mathscr{A}b$$

Joint à la proposition X.7, ce fait implique facilement le résultat suivant :

Proposition X.9. — *Soit X un k-schéma lisse et $j : U \to X$ une immersion ouvert d'image dense. Soit P un pré-faisceau homotopique sur k et F le faisceau Nisnevich (resp. Zariski) sur $\mathscr{L}_k$ qui lui est associé.*

Alors, le morphisme $j^* : F(X) \to F(U)$ est un monomorphisme.

X.2.1.a. — Une extension de corps E/k transcendante de degré fini sera simplement appelé un *corps de fonctions*. Considérons l'ensemble $\mathcal{M}(E/k)$ des sous-k-algèbres $A \subset E$ telles que $\mathrm{Spec}(A)$ est lisse de type fini sur k, ordonné par inclusion. Comme k est parfait, cet ensemble est non vide et filtrant. On associe donc à E/k un pro-schéma :

$$(E) = (\mathrm{Spec}(A))_{A \in \mathcal{M}(E/k)^{op}}.$$

Pour un faisceau avec transferts F sur k, on pose comme dans la définition IX.5 :

$$F(E) = \varinjlim_{A \in \mathcal{M}(E/k)} F(\mathrm{Spec}(A)).$$

Considérons une k-algèbre $A \in \mathcal{M}(E/k)$. Alors, le schéma $X = \mathrm{Spec}(A)$ est intègre de corps des fonctions égal à E. Si x désigne son point générique, on obtient facilement un isomorphisme canonique

$$F(E) = F(X^h_{(x)})$$

en utilisant les notations de la définition IX.5. Il en résulte que le foncteur

$$\mathscr{N}_k^{tr} \to \mathscr{A}b, F \mapsto F(E)$$

est un foncteur exact qui commute aux sommes infinies (*i.e.* un foncteur fibre). On déduit de la proposition précédente le corollaire suivant :

Corollaire X.9.1. — *La famille des foncteurs*

$$H\mathscr{N}_k^{tr} \to \mathscr{A}b, F \mapsto F(E)$$

indexée par les corps de fonctions E est conservative.

Démonstration. — En effet, la proposition implique que si X est un k-schéma lisse connexe de corps des fonctions E, le morphisme canonique $F(X) \to F(E)$ est un monomorphisme. Le corollaire en résulte facilement. □

2.2. Faisceau homotopique associé. —

X.2.2.a. — Considérons un pré-faisceau F sur $\mathscr{L}_k$. Soit X un k-schéma lisse et $p : W \to X$ un recouvrement Nisnevich. Considérons les notations du paragraphe IX.2.2.b. On définit le complexe de Čech $\check{C}_*(W/X, F)$ de W/X à coefficients dans F en appliquant F termes à termes au schéma simplicial $W_X^\bullet$:

$$\dots 0 \to F(X) \xrightarrow{p^*} F(W) \to F(W \times_X W) \to \dots$$

Ce complexe est naturel par rapport aux recouvrements Nisnevich. La cohomologie Nisnevich à la Čech $\check{H}^*(X, F)$ de X à coefficients dans F est obtenue en prenant la limite inductive de la cohomologie de ces complexes pour U/X parcourant la catégorie des recouvrements Nisnevich de X.

On déduit de la proposition X.8 le théorème suivant.

Théorème X.10. — *Soit F un préfaisceau homotopique et F_{Nis} le faisceau Nisnevich sur $\mathscr{L}_k$ qui lui est associé.*

Alors, pour toute courbe affine lisse C/k satisfaisant la propriété (N) de la proposition X.8 et pour tout entier $i \geq 0$,

$$\check{H}^i_{Nis}(C, F_{Nis}) = \begin{cases} F(C) & si\ i = 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Remarque X.8. — Pour un entier $i \geq 0$, on a toujours $\check{H}^i_{Nis}(C, F_{Nis}) = H^i(C, F_{Nis})$ (voir [**MV99**, 1.9, p. 99]).

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire X.10.1. — *Avec les hypothèses et notations du théorème précédent, le faisceau F_{Nis} est invariant par homotopie.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout k-schéma lisse X, le morphisme s^* : $F_{Nis}(\mathbb{A}^1_X) \to F_{Nis}(X)$ induit par la section nulle de $\mathbb{A}^1_X/X$ est un monomorphisme.

D'après la proposition X.9, pour tout ouvert dense U d'un k-schéma lisse X, $F_{Nis}(\mathbb{A}^1_X) \to F_{Nis}(\mathbb{A}^1_U)$ est un monomorphisme. On peut donc remplacer X par nimporte quel ouvert dense U.

Supposons X connexe de corps des fonctions E. Considérant le pro-schéma $(\mathbb{A}^1_E) = \mathbb{A}^1_k \times_k (E)$ avec les notations du paragraphe X.2.1.a, il suffit donc de montrer que le morphisme obtenu par limite inductive

$$F_{Nis}(\mathbb{A}^1_E) \to F_{Nis}(E)$$

est un monomorphisme. Par changement de base, on se ramène au cas d'un préfaisceau homotopique sur $\mathrm{Spec}(E)$ et cela résulte du théorème précédent. □

Ainsi le faisceau F_{Nis}, muni des transferts canoniques obtenus dans le corollaire IX.12.2, est un faisceau homotopique.

Corollaire X.10.2. — *Le foncteur $a_{tr} : \mathscr{P}^{tr}_k \to \mathscr{N}^{tr}_k$ induit un foncteur exact $H\mathscr{P}^{tr}_k \to H\mathscr{N}^{tr}_k$ qui est adjoint à gauche du foncteur d'oubli $H\mathscr{N}^{tr}_k \to H\mathscr{P}^{tr}_k$.*

X.2.2.b. — Il résulte de ce corollaire que le foncteur d'inclusion $\nu : H\mathscr{N}^{tr}_k \to \mathscr{N}^{tr}_k$ est exact et commute aux sommes infinies.

Si F est un faisceau avec transferts, le préfaisceau avec transferts suivant

$$X \mapsto \mathrm{coKer}(F(X) \xrightarrow{s_0^* - s_1^*} F(\mathbb{A}^1_X))$$

est invariant par homotopie. On note $h_0(F)$ le faisceau homotopique qui lui est associé d'après le corollaire précédent. On vérifie facilement que h_0 est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion ν.

Si X est un k-schéma lisse, on pose $h_0(X) = h_0(\mathbb{Z}_k^{tr}(X))$. On a ainsi définit un foncteur canonique

$$h_0 : \pi\mathscr{L}_k^{cor} \to H\mathscr{N}_k^{tr}.$$

Corollaire X.10.3. — *La catégorie $H\mathscr{N}_k^{tr}$ est abélienne de Grothendieck avec pour générateurs les faisceaux homotopiques $h_0(X)$ pour un k-schéma lisse X.*

Elle admet une unique structure monoïdale symétrique fermée telle que le foncteur h_0 est monoïdal symétrique.

Références

[Con07] B. Conrad – « Deligne's notes on Nagata compactifications », *J. Ramanujan Math. Soc.* **22** (2007), no. 3, p. 205–257.

[Dég07] F. Déglise – « Correspondences and transfers », *Algebraic cycles and motives* (J. Nagel & P. Chris, éds.), Cambridge university press, April 2007.

[Har77] R. Hartshorne – *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[MV99] F. Morel & V. Voevodsky – « $\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes », *Publ. Math. IHES* **90** (1999), p. 45–143.

[SV96] A. Suslin & V. Voevodsky – « Singular homology of abstract algebraic varieties », *Invent. Math.* **123** (1996), no. 1, p. 61–94.

2009-2010

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* `deglise@math.univ-paris13.fr`
Url : `http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/`