COURS I
INTRODUCTION

Table des matières

Dans ce cours, je vais présenter la théorie des complexes motiviques de Voevodsky ainsi qu'une partie de son extension possible. Dans cette introduction, je présente la manière dont on est arrivé à cette théorie. L'idée maîtresse est celle des motifs (purs) de Grothendieck, et celle-ci a grandi sur trois grands thèmes de la géométrie algébrique : la notion de cycles algébriques, les fonctions Zêta, la cohomologie.

1. Cycles algébriques

On peut introduire cette théorie par la problématique du théorème de Bézout : d'une manière élémentaire, il s'agit de compter les racines d'un polynômes, et même de prévoir leur nombre en fontion du degré du polynôme.

Dessin : deux problèmes :

1. la multiplicité d'une racine.
2. pas de racine.

Le problème de la multiplicité d'une racine mène à celui des multiplicités d'intersection. Dans le cas des courbes planes sur un corps algébriquement clos k, rappelons la solution simple suivante (cf [**Ful98**, 1.1.1]) : si f et g sont deux polynômes premiers entre eux dans $k[u, v]$, et x un point de k^2 racine de f et g, on peut définir la multiplicité de l'intersection des courbes $V(f)$ et $V(g)$ en x :

$$i(x; f \cdot g) = \dim_k \left(\mathcal{O}_{Z,x}\right) \qquad (1)$$

où $Z = V(f) \cap V(g)$ et

$$\mathcal{O}_{Z,x} = \big(k[u, v]/(f, g)\big)_{(u-x_1, v-x_2)}$$

est l'anneau local de Z en x.[(1)]

[(1)] Remarquons que $k[u, v]/(f, g)$ est une k-algèbre qui est de dimension finie en tant que k-espace vectoriel. Pour démontrer cela, il faut : montrer que l'ensemble des racines communes de f et g est fini, appliquer le *Nullstelensatz* de Hilbert, savoir que le radical de (f, g) est noethérien.

Pour résoudre le deuxième point dans l'optique du théorème de Bézout, il suffit de considérer la complétion projective $\mathbb{P}^2_k$ du plan $\mathbb{A}^2_k$. Un polynôme f (resp. g) dans $k[u,v]$ définit classiquement une équation homogène dans $k[u,v,w]$ et donc une courbe $V(\bar{f})$ (resp. $V(\bar{g})$) dans $\mathbb{P}^2_k$. La définition des multiplicités d'intersection s'étend à ce cas (remarquer en effet que cette définition ne dépend que du voisinage du point x considéré).

Théorème I.1. — *Soit k un corps algébriquement clos. Soit f et g deux polynômes premiers entre eux dans $k[u,v]$ de degrés repsectifs n et m. Notons $\bar{R}$ l'ensemble de leurs racines communes dans $\mathbb{P}^2_k$. Alors, l'égalité suivante est satisfaite :*

$$\sum_{x \in \bar{R}} i(x, \bar{f} \cdot \bar{g}) = nm.$$

Voir par exemple [**Ful98**, 1.4.1].(2)

On voit que le deuxième problème est résolu, dans le théorème de Bézout, grâce à deux hypothèses : k est algébriquement clos, on utilise la géométrie projective. Pour résoudre ce problème en toute généralité, c'est plutôt la notion de *déformation* (paramétrées par la droite projective) qui a été retenue. Il s'agit de considérer l'ensemble des zéros à une relation d'équivalence près, que l'on appelle maintenant l'équivalence rationnelle. Chow le premier a montré que si l'on utilise cette relation d'équivalence, on peut toujours se ramener au cas d'une intersection dite *propre*. La théorie de l'intersection de nos jours a la forme suivante :

A tout schéma X lisse sur un corps de base k, on associe un groupe abélien $CH(X)$ ayant les propriétés suivantes :

1. Toute partie fermée Z de X possède une classe canonique $\langle Z \rangle$ dans $CH(X)$. Toute élément de $CH(X)$ peut être écrit (de manière non unique) comme combinaison linéaire d'éléments de la forme $\langle Z \rangle$ pour Z intègre.
2. $CH(X)$ possède une structure d'algèbre graduée.

L'anneau $CH(X)$ est appelé l'*anneau de Chow* de X.

Si Z et Z' sont deux fermés de X, on peut donc écrire :

$$\langle Z \rangle \cdot \langle Z' \rangle = \sum_i n_i \langle Z_i \rangle. \tag{2}$$

Bien que cette écriture ne soit pas unique, une méthode de construction plus évoluée permet de se ramener dans l'équation (2) au cas où Z_i est une composante irréductible de $Z \cap Z'$ et n_i est un entier (positif) bien déterminé, appelé la *multiplicité d'intersection* de Z et Z' en Z_i.(3)

Exemple I.1. — L'entier $i(x, f \cdot g)$ définis dans la formule (1) est la multiplicité d'intersection de $V(f)$ et $V(g)$ au point x de $V(f) \cap V(g)$ dans le sens précédent.

Remarque I.1. — Dans ce cours, nous verrons que cet anneau possède bien d'autres structures intéressantes. Par exemple, il est contravariant par rapport à tout morphisme de schémas lisses.(4)

(2)Le théorème original de Bézout, publié en 1779, concerne plus généralement les solutions de n polyômes homogènes à n variables (voir l'énoncé dans [**Béz79**, préface, p. xii]). La méthode consiste à faire diminuer le nombre d'inconnues d'un produit d'équations polynomiales homogènes f_i (Bézout dit « équation complète »). Bézout se ramène à un polynôme d'une seule variable dont le degré est le produit des degrés des f_i.

(3)C'est Samuel ([**Sam51**]) qui a donné le premier une définition de cet entier (quand on se réfère à cette définition, on parle de *multiplicité de Samuel*). Fulton (Baum et MacPherson) ont donnés une définition (en apparence) différente grâce à la déformation au cône normal introduite par Verdier (cf [**Ful98**]). Il faut noter que la méthode de déformation au cône normal offre un regard géométrique à la définition de Samuel qui est purement algébrique. Dans ces méthodes, la nécessité d'utiliser l'équivalence rationnelle disparait.

(4)Suivant Fulton, pour un morphisme de schémas lisses f, l'opération f^* correspondante sur le groupe de Chow est appelée le morphisme de Gysin associé à f.

Notons aussi la propriété suivante pour cette introduction : Considérons un cycle s'écrivant comme combinaison linéaire

$$\alpha = \sum_{i \in I} n_i . x_i$$

de points fermés d'un k-schéma algébrique X.(5) Pour tout indice i, le corps résiduel $\kappa(x_i)$ de x_i est une extension finie de k. On définit le *degré* de α comme la somme :

$$\deg(\alpha) = \sum_{i \in I} n_i . [\kappa(x_i) : k].$$

Cette formule ne dépend pas de l'écriture choisie.

On peut alors réécrire le théorème de Bézout en utilisant l'anneau de Chow : sous les hypothèses du théorème I.1,

$$\deg \big(\langle V(f) \rangle \cdot \langle V(g) \rangle \big) = nm.$$

2. Arithmétique : fonctions Zeta et conjectures de Weil

Soit X un schéma de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. On note $X_{(0)}$ l'ensemble des points fermés de X. Si x est un tel point, on note $N(x)$ le cardinal du corps résiduel $\kappa(x)$ de x.(6)

Définition I.1. — Avec les notations ci-dessus, on définit la *fonction zêta de Hasse-Weil* comme la fonction complexe(7)

$$\zeta_X(s) = \prod_{x \in X_{(0)}} \frac{1}{1 - N(x)^{-s}}$$

Exemple I.2. — Historiquement(8), la théorie s'est construite autour des deux exemples suivants :

1. Pour $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, on obtient la fonction *zêta de Riemann*.
2. Si F est un corps de nombres dont l'anneau des entiers est $\mathcal{O}_F$, dans le cas $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$, on obtient la fonction *zêta de Dedekind* de F.

Notons que la fonction Zeta d'un $\mathbb{Z}$-schéma de type fini X se décompose trivialement comme un produit (éventuellement infini) :

$$\zeta_X = \prod_p \zeta_{X_p}$$

où le produit parcourt l'ensemble des nombres premiers et $X_p = X \times_{\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}(F_p)$ est la fibre de X au point $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

I.2.0.a. — Les conjectures de Weil se placent dans le cas où X est de caractéristique p. Autrement dit, X est un $\mathbb{F}_q$-schéma de type fini, $\mathbb{F}_q$ corps fini de caractéristique p. Dans ce cas là, on peut simplifier la fonction zêta comme suit.

Pour tout $x \in X_{(0)}$, on pose $\delta_x = [\kappa(x) : \mathbb{F}_q]$, et on introduit la fonction :

$$Z(X, t) = \prod_{x \in X_{(0)}} \frac{1}{1 - t^{\delta_x}}$$

(5) On dit encore que α est un 0-cycle de X.

(6) En effet, $\kappa(x)$ est nécessairement un corps fini car il est de type fini en tant que $\mathbb{Z}$-algèbre. S'il est de caractéristique p, c'est une $\mathbb{F}_q$-algèbre de type fini donc nécessairement un corps fini. Le cas de la caractéristique 0 est exclu puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini.

(7) Cette fonction converge pour $\Re(s)$ assez grand car X est de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

(8) Historiquement, suivant Riemann et Dedekind, Emile Artin dans sa thèse considéra le cas des courbes sur un corps fini, puis André Weil considéra les variétés de dimension quelconque sur un corps fini.

On vérifie aussitôt que :

(3) $$\zeta_X(s) = Z(X, q^{-s})$$

C'est cette dernière fonction que Weil a considérée dans l'énoncé de ses conjectures. Une propriété remarquable de celle-ci est la formule suivante :

$$\frac{d}{dt} \log Z(X,t) = \sum_{r>0} N_r.t^{r-1}$$

où N_r est le nombre de points fermés de X à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^r}$. On la déduit en effet aisément du fait que

$$N_r = \sum_{x \in X_{(0)}, \delta_x | r} \delta_x.$$

La fonction zêta de X contient donc une information arithmétique très importante concernant $X/\mathbb{F}_q$.

Dans l'article [**Wei49**], après avoir étudié précisément le cas des hypersurfaces de Fermat, A. Weil énonce les conjectures suivantes sur la fonction Z attachée à X.

I.2.0.b. — Considérons un $\mathbb{F}_q$-schéma X projectif lisse de dimension n. On suppose que X est géométriquement connexe ; autrement dit, si $\overline{\mathbb{F}}_q$ désigne une cloture algébrique de $\mathbb{F}_q$, $X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ est connexe.

(W1) *Rationalité.*– $Z(X,t)$ est une fonction rationnelle en t.

Considérons la diagonale Δ de X comme sous-schéma fermé de $X^2 = X \times_{\mathbb{F}_q} X$.(9) On définit la multiplicité d'auto-intersection(10) de Δ dans X comme l'entier :

$$e = \deg(\langle\Delta\rangle \cdot \langle\Delta\rangle).$$

C'est un entier strictement positif.

(W2) *Équation fonctionnelle.*– Si e désigne l'entier introduit ci-dessus,

$$Z\big(X, q^{-n}.t^{-1}\big) = \pm q^{ne/2} t^e Z(X,t).$$

(W3) *Hypothèse de Riemann.*– Il existe des polynômes $P_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$ pour $i = 0, ..., 2n$ tels que

(a)
$$Z(X,t) = \frac{P_1(t)...P_{2n-1}(t)}{P_0(t)...P_{2n}(t)}.$$

(b) $P_0(t) = 1 - t$.

(c) $P_{2n}(t) = 1 - q^n t$.

(d) $\forall r \in [1, 2n-1]$, les racines complexes de $P_r(t)$ sont toutes de valeur absolue $q^{r/2}$.

Remarque I.2. — Dans le cas où X est une courbe, les propriétés (iii)(a), (iii)(b) et (iii)(c) reviennent à demander l'écriture

$$Z(X,t) = \frac{P_1(t)}{(1-t)(1-q^n.t)}.$$

Suivant l'expression (3), la propriété (d) est alors équivalente à l'assertion suivante :

(d') Les zéros de la fonction ζ_X ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$.

C'est bien l'analogue de l'hypothèse de Riemann.(11)

(9) Ce schéma est connexe car X est géométriquement connexe.

(10) En terme moderne, e est le degré de la classe de Chern maximale du fibré tangent de X. Rappelons que si X est un courbe de genre g, $e = 2 - 2g$.

(11) Spec($\mathbb{Z}$) est de dimension 1.

Pour formuler la dernière conjecture de Weil, il nous faut introduire la dernière notion qui est à l'oeuvre dans l'idée de motif.

3. Cohomologie des schémas

A tout $\mathbb{C}$-schéma projectif lisse X de dimension n. On lui associe sa cohomologie de Betti rationnelle :

$$H^*_B(X, \mathbb{Q}) = H^*_{sing}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$$

cohomologie singulière rationnelle de l'espace topologique attaché à l'ensemble des points complexes (*i.e.* fermés) de X (muni de sa topologie analytique).

La première propriété marquante de cette cohomologie est que pour tout k-schéma projectif lisse X de dimension n, $H^*_B(X, \mathbb{Q})$ est une algèbre graduée commutative concentrée en degrés $[0, 2n]$. De plus, pour tout entier i, $H^i_B(X, \mathbb{Q})$ est de dimension finie sur K.

Définition I.2. — Soit X un k-schéma projectif lisse de dimension n. pour tout entier $i \in [0, 2n]$, on définit le i-ème *nombre de Betti* de X comme l'entier

$$b_i(X) = \dim_K(H^i_B(X, \mathbb{Q})).$$

Notons que cette définition s'étend à tout schéma projectif lisse X' défini sur un corps de nombres F, quitte à choisir un plongement complexe de F.[12]

On peut maintenant énoncer la dernière des conjectures de Weil :

(W4) Avec les notations de la conjecture (W3), posons $d_r(X) = \deg(P_r(t))$. Alors,

$$e = \sum_{r=0}^{2n} (-1)^r . d_r(X).$$

Si de plus X est obtenu par réduction d'un schéma projectif lisse X' sur un corps de nombre F – en une place de F au-dessus de p – alors, $d_r(X) = b_r(X')$.

La dernière assertion pointe un phénomène très intriguant. Mais toutefois, plutôt que d'essayer de relever X en caractéristique 0, on peut essayer de trouver une théorie cohomologique qui s'applique directement à X et permette de lui attacher des nombres de Betti. L'axiomatique de la définition suivante va beaucoup plus loin :

Définition I.3. — Soit k un corps (de base) et $\mathcal{P}_k$ la catégorie des k-schémas projectifs lisses.

Une cohomologie de Weil (pure) sur k à coefficients dans un corps K de caractéristique 0 est la donnée d'un foncteur :

$$H^* : (\mathcal{P}_k)^{op} \to K - ev^{\mathbb{N}}$$

à valeur dans la catégorie des K-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués, tel que $H^*(X)$ est un anneau gradué et satisfait les propriétés :

(C1) *Formule de Künneth.*– Pour tous X, Y dans $\mathcal{P}_k$,

$$H^*(X \times_k Y) = H^*(X) \hat{\otimes}_K H^*(Y). \tag{4}$$

De plus, $H^*(\mathrm{Spec}(k)) = K$ concentré en degré 0 (élément neutre de $\hat{\otimes}_K$) – autrement dit, H^* est un foncteur monoïdal.

Notons que pour être précis, il faut demander que H^* est un foncteur monoïdal symétrique (ce qui décrit l'effet de l'isomorphisme de permutation des facteurs $X \times_k Y \to Y \times_k Y$ à travers l'identification (4)).

[12] On peut de plus montrer que ces nombres sont indépendants du plongement choisi. On fera attention pourtant que la cohomologie rationnelle de Betti ainsi obtenue, elle, dépend du plongement choisi en général.

On en déduit que $H^*(X)$ admet un structure canonique d'algèbre graduée : si $\delta : X \to X \times_k X$ désigne le morphisme diagonal, on obtient un produit :

$$H^*(X)\hat{\otimes}_K H^*(X) = H^*(X \times_k X) \xrightarrow{\delta^*} H^*(X).$$

Le fait que H^* est monoïdal *symétrique* implique que ce produit est commutatif[13].

(C2) *Orientabilité.*– $\dim_K(\mathbb{P}^1_k) = 1$.

Pour un entier $r \geq 0$, on note $K(r)$ le K-espace vectoriel obtenu en prenant la puissance tensorielle r-ème de $H^2(\mathbb{P}^1_k)$. Pour un K-espace vectoriel V, on pose $V(r) = V \otimes_K K(r)$. Muni de cette notation, on demande encore les données et propriétés supplémentaires suivantes :

(C3) *Dualité.*– Pour tout X dans $\mathcal{P}_k$ de dimension n, on se donne une application K-linéaire

$$Tr_X : H^{2n}(X)(n) \to K$$

appellé *morphism trace* et vérifiant les propriétés suivantes :

(a) Tr_X est un isomorphisme si X est géométriquement connexe.

(b) $Tr_{X \times_k Y} = Tr_X \otimes_K Tr_Y$ en utilisant la formule de Künneth.

(c) L'application K-linéaire

$$H^i(X) \otimes_K H^{2n-i}(X)(n) \xrightarrow{\text{produit}} H^{2n}(X)(n) \xrightarrow{Tr_X} K$$

est un accouplement de dualité.

(C4) *Classes de cycles.*– Pour tout X dans $\mathcal{P}_k$, on se donne une application K-linéaire

$$\gamma : CH^r(X) \to H^{2r}(X)(r)$$

telle que :

(a) γ est une transformation naturelle par rapport à la fonctorialité contravariante des deux membres.

(b) Pour tous cycles α, β, $\gamma(\alpha \cdot \beta) = \gamma(\alpha).\gamma(\beta)$.

(c) Pour X dans $\mathcal{P}_k$ de dimension n, $Tr_X(\gamma(\alpha)) = \deg(\alpha)$.

Exemple I.3. — La cohomologie de Betti est une cohomologie de Weil sur $\mathbb{C}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$. C'est l'exemple qui modèle la définition ci-dessus.

I.3.0.c. — Supposons $k = \mathbb{F}_q$.

Supposons qu'une cohomologie de Weil H sur k à coefficients dans K ait été construite.

Soit X un k-schéma projectif lisse géométriquement connexe de dimension n. On lui attache un endomorphisme $F : X \to X$ définit localement sur l'anneau de coordonnées A de X par la formule

$$A \to A, x \mapsto x^q.$$

On appelle F *l'endomorphisme de Frobenius* de X .

Considérons une cloture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$. On pose $\bar{X} = X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ et on note $\bar{F}$ l'endomorphisme de Frobenius de $\bar{X}$ – obtenu par changement de base à partir de F. Alors, pour tout entier $r > 0$, l'ensemble des points fixes de $F^r_{\bar{X}}$ est égal à $\bar{X}(\mathbb{F}_{q^r})$. Son cardinal est donc l'entier N_r déjà introduit. Notons aussi que cet ensemble de points fixes peut se décrire comme une intersection :

$$X(\mathbb{F}_{q^r}) = \Gamma_{\bar{F}^r} \cap \Delta_{\bar{X}}.$$

où $\bar{F}^r$ est le graphe de $\bar{F}^r$ et $\Delta_{\bar{X}}$ la diagonale de $\bar{X}$, tous deux vus comme des sous-schémas fermés de $\bar{X}^2$. On en déduit la relation suivante :

$$N_r = \deg\left(\langle \Gamma_{F^r} \rangle \cdot \langle \Delta_X \rangle\right). \tag{5}$$

---

[13] *i.e.* pour tout couple $(\rho, \rho') \in H^n(X) \times H^m(X)$, $\rho.\rho' = (-1)^{n+m}\rho'.\rho$.

De cette formule, et des propriétés (C*) de H, on déduit formellement (voir [**And04**, 3.3.3]) la *formule des traces de Lefschetz* :

$$\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i.tr_K\big(F^r, H^i(X)\big) = N_r. \tag{6}$$

où tr_K désigne la trace de F^r agissant sur $H^i(X)$.(14)
On en déduit formellement (cf [**Mil80**, 27.5, 27.6]) le calcul suivant :

$$Z(X,t) = \prod_{i=0}^{2n} det\big(1 - F.t, H^i(X)\big)^{(-1)^{i+1}}.$$

On obtient donc la conjecture (W1) ainsi que (W3)(a), avec

$$P_i(t) = det\big(1 - F.t, H^i(X)\big).$$

Remarque I.3. — 1. L'équation fonctionnelle (W2) est alors une conséquence de la dualité (cf [**Mil80**, 27.12]).

2. Si l'on sait que l'on dispose d'un isomorphisme de foncteurs en X, $H^0(X) \simeq K^{\pi_0(\bar{X})}$, on en déduit que $P_0(t) = 1 - t$, soit (W3)(b). – car alors F agit par l'identité sur $H^0(X)$. Mais par ailleurs, du fait que F est un morphisme fini surjectif de degré q^n ($n = \dim(X)$), la formule du degré(15) en cohomologie montre que F agit par q^n sur $H^{2n}(X)$. Ainsi, $P_{2n}(t) = 1 - q^n.t$, soit (W3)(c).

Quant à (W4), bien sûr le degré du polynôme $P_i(t)$ est égal au nombre de Betti défini par la cohomologie H :

$$b_i^H(X) = \dim_K(H^i(X)).$$

Remarquons que la formule des traces peut se généraliser à nimporte quel endomorphisme de X. Si on l'applique à 1_X, on obtient :

$$\deg(\langle\Delta_X\rangle \cdot \langle\Delta_X\rangle) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r.b_i^H(X).$$

ce qui prouve donc (W4) (en modifiant la définition des nombres de Betti considérée par Weil).

4. Conjectures standards et motifs purs (survol)

Avec en tête ces propriétés, Grothendieck et ses collaborateurs ont développés la théorie de la cohomologie étale qui donne en particulier une cohomologie de Weil sur $\mathbb{F}_q$:

$$H^*_{ét}(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l)$$

à coefficients dans le corps des nombres rationnels l-adiques, pour l premier différent de p.

Comme on l'a vu, cela règle le problème des conjectures de Weil excepté pour l'hypothèse de Riemann, (W3)(d). Mais en même temps, cela introduit une indetermination dans la décomposition (W3)(a) : les polynômes dépendent de l a priori.

Ces deux problèmes ont conduits Grothendieck à renouveler l'approche cohomologique des conjectures de Weil. L'observation est que, dans la preuve des conjectures de Weil, la partie de la cohomologie qui sert principalement est l'image de l'application classe de cycles γ – on dit qu'une classe de cohomologie est *algébrique* si elle est de la forme $\gamma(\alpha)$.

(14) C'est la volonté d'obtenir une telle formule des traces qui justifie l'hypothèse que le corps des coefficients est de caractéristique 0. En effet, l'égalité ci-dessus a lieu dans K.
(15) C'est la formule $F_*F^* = q^n.1$, où F_* est l'endomorphisme de $H^*(X)(*)$ obtenu par transposé de F^* à partir de la dualité (C3).

Un des points de départ de la théorie des motifs est la volonté de trouver une démontration conceptuelle des conjectures de Weil, y compris l'hypothèse de Riemann, à partir des classes de cohomologie algébrique.

Dans [**Gro69**], Grothendieck formule des conjectures sur les cycles algébriques (sur un corps algébriquement clos au moyen d'une cohomologie de Weil abstraite), qu'il appelle *conjectures standards*. Il l'est divise en deux types :

– Conjectures standards de type Lefschetz.
– Conjecture standard de type Hodge.

Kleiman montre dans [**Kle68**] comment ces conjectures standards impliquent l'hypothèse de Riemann.

Mais pour Grothendieck, les conjectures standards révèlent surtout *l'existence* d'une théorie qui préexiste aux cohomologies de Weil, la théorie des motifs. L'idée est de remplacer le foncteur monoïdal d'une cohomologie de Weil

$$H^* : (\mathcal{P}_k)^{op} \to K - ev^{\mathbb{Z}}$$

par un foncteur monoïdal universel

$$h : (\mathcal{P}_k)^{op} \to \mathscr{M}ot_K$$

où $\mathscr{M}ot_K$ est une catégorie abélienne monoïdale semi-simple[16] appelée catégorie des motifs purs. L'universalité se décrit par le diagramme suivant :

(7)
$$\begin{tikzcd} (\mathcal{P}_k)^{op} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "h"'] & K - ev^{\mathbb{Z}} \\ \mathscr{M}ot_K \arrow[ur, dashed, "R_H"'] & \end{tikzcd}$$

Le foncteur R_H est appelé la réalisation attachée à la cohomologie de Weil H.

Considérons un corps algébriquement clos. L'idée pour la construction de la catégorie des motifs est d'utiliser les cycles algébriques pour étendre la fonctorialité des schémas. La première partie de ce cours vise à établir la théorie des correspondances. Supposant cette théorie comme acquise, on peut décrire la construction de Grothendieck comme suit (cf par exemple [**Kle68**]) :

– Si X et Y sont projectifs lisses sur k, X connexe de dimension d, une correspondance de X vers Y est un cycle α dans $CH^d(X \times_k Y) \otimes K$. Comme on le verra, ces correspondances se composent et on obtient donc une catégorie $\mathcal{P}^{cor}(k)_K$.

  Le graphe d'un morphisme de schémas, vu comme un cycle, permet de définir un foncteur contravariant :
$$(\mathcal{P}_k)^{op} \to \mathcal{P}^{cor}(k)_K.$$

– La catégorie $\mathcal{P}^{cor}(k)_K$ est additive, mais elle n'est pas abélienne. On peut par contre la rendre pseudo-abélienne : une catégorie additive $\mathscr{A}$ est pseudo-abélienne si tout projecteur de $\mathscr{A}$ admet un noyau. On obtient ainsi une catégorie $\mathscr{M}ot_{rat}^{eff}(k)_K$ appelée la catégorie des motifs de Chow effectifs.

  On dispose d'un foncteur $h : (\mathcal{P}(k))^{op} \to \mathscr{M}ot_{rat}^{eff}(k)_K$. La catégorie $\mathscr{M}ot_{rat}^{eff}(k)_K$ est de plus monoïdale telle que $h(X) \otimes_K h(Y) = h(X \times_k Y)$.

– On se rappelle que dans la formulation de la dualité est apparu un twist (par $H^2(\mathbb{P}^1_k)$). Dans la catégorie $\mathscr{M}ot_{rat}^{eff}(k)_K$, puisqu'on a rajouté des noyaux aux projecteurs, on peut écrire :[17]
$$h(\mathbb{P}^1_k) = \mathbb{1} \oplus \mathbb{L}.$$

[16] *i.e.* tout objet est une somme directe d'objets simples, c'est-à-dire n'admettant pas de sous-quotient non trivial.
[17] Cette décomposition correspond à la décomposition en cohomologie : $H^*(\mathbb{P}^1_k) = K \oplus H^2(\mathbb{P}^1_k)$.

Le motif $\mathbb{L}$ est appelé *motif de Lefschetz*. L'étape finale consiste à ajouter un $\otimes$-inverse formel à $\mathbb{L}$ dans la catégorie $\mathscr{M}ot^{eff}_{rat}(k)_K$. On obtient alors la catégorie des motifs de Chow $\mathscr{M}ot_{rat}(k)_K$. Elle contient comme une sous-catégorie pleine la catégorie des motifs effectifs. On dispose donc d'un foncteur

$$h : (\mathcal{P}_k)^{op} \to \mathscr{M}ot_{rat}(k)_K.$$

La vérification de la propriété universelle (7) est alors formelle.

La question est maintenant de savoir dans quelle mesure cette construction rend compte des propriétés d'une cohomologie de Weil. A cet égard, le foncteur de réalisation R_H est déterminant. S'il est exact et conservatif, et que la catégorie des motifs est abélienne, il doit nécessairement être fidèle.

Or cette propriété est fausse avec la construction que je viens de décrire. En effet, il existe des cycles α non nuls dans $CH(X)$ dont la classe de cohomologie $\gamma(\alpha)$ est nulle. Il faut donc éliminer ces cycles, ce qui nous conduit à tuer les correspondances (co)homologiquement triviales dans la construction ci-dessus. Cela revient à introduire une relation d'équivalence sur les cycles algébriques, appelée l'équivalence homologique, et à ne regarder que les classes d'équivalence pour cette relation.

Mais ceci n'est pas satisfaisant car la catégorie qui en résulte dépend de la cohomologie choisie. Il faut trouver une autre relation d'équivalence, qui soit plus forte que la relation d'équivalence homologique définie par nimporte quelle cohomologie de Weil. C'est la relation d'*équivalence numérique*. En considérant les classes de correspondances pour cette relation dans la construction ci-dessus, on obtient la catégorie des motifs purs notée $\mathscr{M}ot_{num}(k)_K$ qui vérifie toujours la propriété universelle attendue. On sait grâce à un théorème de Jannsen [**Jan92**] qu'elle est même abélienne semi-simple (ce théorème n'utilise que l'existence d'une cohomologie de Weil satisfaisant les propriétés (C$*$) ci-dessus).

Toutefois, la question de savoir si R_H est conservatif est encore entière. Elle revient à se demander si l'équivalence numérique coincide avec l'équivalence homologique pour les cycles algébriques.

C'est une des conséquences les plus importantes des conjectures standards (cf [**Gro69**], [**Kle68**] ou [**And04**, 5.4.2.1]).[18]

Les conjectures standards sont pour l'instant sans réponse (elles sont connues dans certains cas particuliers). Le renouveau apporté par la théorie des motifs mixtes est de proposer une nouvelle approche de *l'idée de motif* qui ne repose plus sur les conjectures standards.

5. Motifs mixtes triangulés

La définition des motifs purs est extrêmement économe. L'approche nouvelle dont il sera question dans ce cours suit une voie différente. Elle vise au contraire à définir une catégorie beaucoup plus grosse.

5.1. Ouverts et mixité. — Le premier point est qu'on ne se limitera plus aux schémas projectifs lisses sur un corps k. La première hypothèse qu'on peut relâcher est la projectivité. Hors les théories cohomologiques que l'on a vu précédemment sont en réalité déjà définies sur les schémas lisses. Le phénomène nouveau qui émerge dans ce cas est révélé par la suite exacte longue de localisation : pour un schéma lisse X et un sous-schéma fermé Z lisse de codimension c, on obtient une suite exacte longue :

$$\ldots \to H^{n-2c}(Z)(-c) \xrightarrow{i_*} H^n(X) \xrightarrow{j^*} H^n(X-Z) \to H^{n-2c+1}(Z)(-c) \to \ldots$$

[18] D'après Grothendieck (cf [**Gro69**, p. 198, l.3–5]) cette conjecture était « bien connue » lorsqu'il énonca les conjectures standards.

où i et j désigne les immersions évidentes. Ainsi, la cohomologie du complémentaire $X - Z$ est une *extension* d'un sous-groupe de la cohomologie de X par un quotient de la cohomologie de Z tordue. Ce phénomène d'extension n'avait pas lieu dans le cas projectif lisse. L'adjectif *mixte* fait référence à ce phénomène, par opposition à *pur* – cette terminologie vient de la théorie de Hodge-Deligne.

Or le groupe de Chow est aussi défini pour les schémas lisses. La classe de cycles se prolonge à ce cas et on peut considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{2r-1}(Z)(r) \arrow[r] & H^{2(r-c)}(Z)(r-c) \arrow[r, "i_*"] & H^{2r}(X)(r) \arrow[r, "j^*"] & H^{2r}(X-Z)(r) \arrow[r] & \cdots \\
\arrow[r] & ? \arrow[u, dashed] \arrow[r] & CH^{r-c}(Z) \arrow[u] \arrow[r, "i_*"] & CH^r(X) \arrow[u] \arrow[r, "j^*"] & CH^r(X-Z) \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le morphisme j^* sur le groupe de Chow est surjectif, mais par contre, i_* est loin d'être injectif. Ainsi, la question de prolonger la définition des groupes de Chow pour étendre la classe de cycles se pose. Cette extension est la *cohomologie motivique.*(19)

5.2. Motifs mixtes et catégorie dérivée. — Comme on l'a déjà signalé, la catégorie des motifs purs est abélienne semi-simple. Le phénomène dégagé ci-dessus nous montre que le motif d'un schéma lisse X n'est pas en général semi-simple ; il est (au moins) obtenu par extension de motifs de schémas projectifs lisses P. Pour cette raison, on dit que $M(X)$ (à définir) est mixte et $M(P)$ est pur.

Ce phénomène d'extension nous amène à considérer la catégorie dérivée de l'hypothétique catégorie abélienne des motifs mixtes. Suivant Beilinson, on va définir celle-ci, en tant que catégorie triangulée, sans connaître la catégorie abélienne des motifs mixtes.

5.3. Première description. — Fixons un corps parfait k. Suivant Voevodsky, on définie une catégorie triangulée

$$DM_{gm}(k)$$

des motifs mixtes triangulés avec les propriétés suivantes :

– Tout k-schéma lisse X définit un objet $M(X)$ de $DM_{gm}(k)$. D'où un foncteur *covariant* :
$$M : \mathscr{L}_k \to DM_{gm}(k).$$
– La catégorie $DM_{gm}(k)$ est monoÏdale telle que $M(X) \otimes M(Y) = M(X \times_k Y)$. On note $\mathbb{Z}$ son objet unité.
– On obtient une décomposition canonique
$$M(\mathbb{P}^1_k) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[2].$$
Le motif de Tate $\mathbb{Z}(1)$ est inversible.
– Si X est un k-schéma lisse et Z un sous-schéma fermé de X de codimension c, on obtient un triangle distingué

$$M(X-Z) \xrightarrow{j_*} M(X) \xrightarrow{i^*} M(Z)(c)[2x] \xrightarrow{+1} \tag{8}$$

On définira la cohomologie motivique en degré n et twist m comme suit :

$$\mathrm{H}^{n,m}_{\mathcal{M}}(X) = \mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M(X), \mathbb{Z}(n)[m]).$$

Cette théorie des motifs mixtes prolonge la théorie que l'on vient de voir :

1. Pour tout entier $n \geq 0$, $\mathrm{H}^{2n,n}_{\mathcal{M}}(X) = CH^n(X)$.

---

(19) Á ne pas confondre avec le foncteur $h : (\mathcal{P}_k)^{op} \to \mathscr{M}ot_{num}(k)_K$ qui aurait pu s'appeler la cohomologie motivique.

2. Considérons une des cohomologies de Weil H qui est apparue ci-dessus. On peut lui associer canoniquement un foncteur :

$$R_H : DM_{gm}(k)^{op} \to D(K-ev)$$

contravariant monoïdal tel que $H^i(R_H(M(X))(n)) = H^i(X)(n)$, pour X lisse sur k.

3. Il existe un foncteur pleinement fidèle

$$(\mathscr{M}ot_{rat}(k)_K)^{op} \to DM_{gm}(k). \tag{9}$$

Remarque I.4. — 1. Compte tenu de la suite (8), les deux premiers points constituent la réalisation de notre premier objectif.

2. Concernant le dernier point, il est important de préciser que la définition de $DM_{gm}(k)$ ne nécessite pas de considérer une relation d'équivalence sur les cycles, et que nous partirons non pas du groupe de Chow mais des cycles algébriques élémentaires.(20)

6. Plan du cours

Dans ce cours, on exposera à la fois la théorie de Voevodsky pour un corps parfait k, mais on montrera aussi comment elle se prolonge au cas où l'on remplace k par un schéma régulier.(21)

I- Théorie de Voevodsky.

Cycles algébriques, correspondances finies, faisceaux avec transferts, invariance par homotopie.

II- Complexes et spectres motiviques (suivant Voevosdky).

Catégories de modèles et catégories dérivées, $\mathbb{A}^1$-localisation, $\mathbb{P}^1$-stabilisation, orientation, pureté, dualité.

Références

[And04] Y. André – *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[Béz79] É. Bézout – *Théorie générale des équations algébriques*, Ph. D. Pierres, 1779, (disponible sur le site `http://gallica.bnf.fr/`).

[Ful98] W. Fulton – *Intersection theory*, second éd., Springer, 1998.

[Gro69] A. Grothendieck – « Standard conjectures on algebraic cycles », Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, p. 193–199.

[Jan92] U. Jannsen – « Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity », *Invent. Math.* **107** (1992), no. 3, p. 447–452.

[Kle68] S. L. Kleiman – « Algebraic cycles and the Weil conjectures », Dix esposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 359–386.

[Mil80] J. S. Milne – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980, `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/LEC.pdf`.

[Sam51] P. Samuel – « La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique. I, II », *J. Math. Pures Appl. (9)* **30** (1951), p. 159–205, 207–274.

[Wei49] A. Weil – « Numbers of solutions of equations in finite fields », *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), p. 497–508.

(20) Pour faire apparaître l'équivalence numérique au lieu de l'équivalence rationnelle dans (9), il faut réussir à introduire la catégorie abélienne à l'intérieur de $DM_{gm}(k)$, ce qui passe par la définition d'une *t-structure motivique*. Cette étape n'est pas encore réalisée à l'heure actuelle.

(21) Ce prolongement est motivé par la théorie des syst-mes de coefficients l-adique. Il donnera certainement lieu a une deuxième (petite) introduction.

2009-2010

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* deglise@math.univ-paris13.fr
Url : http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/