ENS Lyon
Groupe de travail : «Sur un travail de Scholze»
organisé par *V. Pilloni*

COMPLEXE COTANGENT

F. DÉGLISE

Table des matières

1. Introduction : Théorème de Riemmann-Roch

1.1. La notion de complexe cotangent a pour origine les travaux de Grothendieck sur la formule de Riemann-Roch :

Considérons un morphisme propre de k-schémas $f : Y \to X$. On suppose d'abord que X (resp. Y) est lisse et on note Ω_X (resp. Ω_Y) son fibré tangent. Dans ce cas la formule de Riemann-Roch s'énonce, pour toute fibré vectoriel virtuel $e \in K_0(Y)$,

$$td(\Omega_X).ch(f_*(e)) = f_*(td(\Omega_Y).ch(e))$$

où ch est le caractère de Chern et td la classe de Todd. C'est un morphisme à valeur dans les unités du groupe de Chow :

$$td_X : K_0(X) \to (CH^*(X) \otimes \mathbb{Q})^\times$$

$$\begin{aligned} ch(f_*(e)) &= td(\Omega_X)^{-1}.f_*(td(\Omega_Y).ch(e)) = td(-\Omega_X).f_*(td(\Omega_Y).ch(e)) \\ &= f_*(f^*(td(-\Omega_X)).td(\Omega_Y).ch(e)) = f_*(td(\Omega_Y - f^{-1}(\Omega_X)).ch(e)). \end{aligned}$$

Si on définit le fibré tangent virtuel $\Omega_f = [\Omega_Y] - [f^{-1}(\Omega_X)]$, vu comme un élément de $K_0(Y)$, on obtient donc la formule :

Date: 3 octobre 2012.

On définit le fibré tangent virtuel de f comme l'élément dans $K_0(Y)$

$$ch(f_*(e)) = f_*(td(\Omega_f).ch(e))$$

qui ne dépend plus que de f.

C'est en cherchant à généraliser cette formule au cas où f est un morphisme localement d'intersection complète que Grothendieck et ses élèves ont l'idée, pour trouver la bonne classe de Todd, d'introduire une variante "dérivée" du fibré tangent à f, soit le *complexe cotangent*. Dans le cas où f admet une factorisation :

$$Y \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} X$$

où p est lisse et i est une immersion fermée régulière, on pose définit $L_{Y/X}$ comme le complexe concentré en degrés homologiques 0 et 1 :

$$\cdots \to 0 \to N_i \xrightarrow{d} i^{-1}(\Omega_{P/X}) \to 0 \to \cdots$$

où N_i est le fibré normal de Y dans P, $\Omega_{P/X}$ le fibré cotangent à P relativement à X et d est induite par la différentielle tautologique $d : \mathcal{O}_P \to \Omega_{P/X}$. On peut associer à ce complexe (qui est borné) un élément canonique de $K_0(Y)$ qui coincide, dans le cas où X et Y sont lisses sur k, avec l'élément Ω_f.

1.2. La définition du complexe cotangent associé à un morphisme f donnée dans le paragraphe précédent est tout à fait suffisante dans le cas où f est localement d'intersection complète (cf [SGA6, VIII]), mais on voit très bien qu'il n'y a pas d'espoir de la généraliser.

Or, pour la théorie qui nous intéresse, celle des extensions presque étales de Faltings telle que formalisée par Gabber et Ramero, les problèmes de déformation qui apparaissent font naturellement apparaître le complexe cotangent d'un morphisme non nécessairement d'intersection complète.

La définition dans le cas où f correspond à une extension quelconque d'anneaux est due indépendament à André ([And67]) et Quillen ([Qui70]). Illusie ([Ill71]) généralise ensuite la définition de Quillen au cas des morphismes de schémas (et même des extensions d'anneaux dans les Topos). Nous présentons dans ce premier paragraphe la théorie du complexe cotangent dans le cas affine.

Remark 1.3. Noton que la théorie du complexe cotangent a été développée par un grand nombre de mathématicien (en l'espace de 10 ans) : par ordre alphabétique : André, Berthelot, Gerstenhabern, Grothendieck, Illusie, Lichtenbaum, Quillen, Schlessinger. La problématique générale en revient certainement à Grothendieck (cf [Gro68]).

2. Définition

2.1. **Formes différentielles et abélianisation.**

Définition 2.1. Soit B/A une extension d'anneaux. Soit I l'idéal définit par la suite exacte :

$$0 \to I \to B \otimes_A B \xrightarrow{\mu} B \to 0.$$

On définit le B-module des formes différentielles par la formulle :

$$\Omega_{B/A} = I/I^2.$$

Rappelons au passage que $\Omega_{B/A}$ est muni de la A-différentielle canonique

$$d : B \to \Omega_{B/A}, x \mapsto (1 \otimes x - x \otimes 1)$$

et que pour tout B-module M, le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \to \mathrm{D}_A(B, M), u \mapsto d \circ u \qquad (2.1.a)$$

est un isomorphisme.

2.2. Le problème est de dériver le foncteur qui à une extension d'anneaux B/A associe le B-module $\Omega_{B/A}$. On voit d'emblée le problème : la catégorie source de ce foncteur est loin d'être abélienne.

Pour remédier à ce problème, on va restreindre un peu la catégorie source. On considère la catégorie $A-\mathrm{alg}\,/B$ des anneaux C munis de morphismes d'anneaux

$$A \to X \to B$$

- en langage catégorique il s'agit des A-algèbres sur B. Les morphismes sont les morphismes d'anneaux compatibles aux morphismes structuraux (en particulier des morphismes de A-algèbres). On considère alors le foncteur :

$$\Omega^B_{/A} : A-\mathrm{alg}\,/B \longrightarrow B-\mathrm{mod}, X \longmapsto B \otimes_X \Omega_{X/A}.$$

Bien entendu, le problème n'est pas réglé car A–alg $/B$ n'est pas abélienne, ni même additive. Ce côté non abélien est le cœur du problème ; on rappelle en effet que $\Omega^B_{/A}$ peut être vu comme un "fonteur d'abélianisation" grâce aux considérantions suivantes.

Définition 2.3. On considère les notations qui précèdent. Pour tout B-module M on définit la A-algèbre des *nombres duaux sur* M comme le A-module $B \oplus M$ munit de la multiplication suivante :

$$(B \oplus M) \otimes (B \oplus M) \to (B \oplus M), (a, x) \otimes (b, y) \mapsto (ab, a.y + b.x)$$

De manière évidente, $B \oplus M$ est un objet de $A-\mathrm{alg}\,/B$. On a donc définition un foncteur :

$$G^B_{/A} : B-\mathrm{mod} \to A-\mathrm{alg}\,/B, M \mapsto B \oplus M.$$

Si C est un autre anneau dans $A-\mathrm{alg}\,/B$, on vérifie formellement que le morphisme suivant

$$\mathrm{Hom}_{A\text{–alg}\,/B}(C, B \oplus M) \to Der_A(C, M), (f_1, f_2) \mapsto f_2 \tag{2.3.a}$$

est un isomorphisme. Compte tenu de (2.1.a), $\Omega^B_{/A}$ est donc l'adjoint à gauche de $G^B_{/A}$.

2.4. Pour terminer cette étude du foncteur $\Omega^B_{/A}$, rappelons les considérations catégoriques suivantes : dans une catégorie $\mathscr{C}$, on dit qu'un objet X est abélien si le préfaisceau d'ensembles $\mathrm{Hom}(-, X)$ admet une structure de préfaisceau en groupes abéliens.

Notons que dans la situation de la définition précédente, pour tout B-module M, $G^B_{/A}(M)$ est donc abélien. La proposition suivante est évidente :

Proposition 2.5. *Le foncteur $G^B_{/A}$ est pleinement fidèle et a pour image essentielle la sous-catégorie pleine des objets abéliens de $A-\mathrm{alg}\,/B$.*

On en déduit l'interprétation attendue du foncteur Ω : on peut voir $G^B_{/A}$ comme l'inclusion canonique des objets abéliens dans $A-\mathrm{alg}\,/B$ et puisque son adjoint à droite $\Omega^B_{/A}$ est donc le foncteur "objet abélien libre engendré".

Remark 2.6. Les objets abéliens de la catégorie des ensembles $\mathscr{E}ns$ sont exactement les groupes abéliens. Le foncteur d'abélianisation

$$\mathbb{Z} : \mathscr{E}ns \to \mathscr{A}b$$

est le classique groupe abélien libre engendré. On peut dériver à gauche le foncteur $\mathbb{Z}$ – ou plutôt son extension aux ensembles simpliciaux. Le foncteur dérivé gauche n'est rien d'autre que le foncteur

$$\mathrm{L}\,\mathbb{Z} : \mathscr{H}(\mathscr{T}op) \to \mathrm{D}(\mathscr{A}b)$$

qui a un espace topologique à homotopie près associe son complexe des chaînes singulières à quasi-isomorphisme près.

2.2. **Résolution des algèbres simpliciales.** Pour dériver le foncteur $\Omega^B_{/A}$, on le prolonge aux objets simpliciaux de $A-\mathrm{alg}\,/B$. Rappelons la définition classique :

Définition 2.7. On note Δ la catégorie dont les objets sont les ensembles finies $\{0, ..., n\}$ est les morphismes sont les applications croissantes.

Un objet simplicial d'une catégorie $\mathscr{C}$ est un foncteur contravariant de Δ dans $\mathscr{C}$. On note $\Delta^{op}\mathscr{C}$ la catégorie formée par ces foncteurs, les morphismes étant les transformations naturelles.

Un objet simplicial est encore une suite d'objets $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}$ munis d'opérateurs

$$\begin{aligned} d_i^n :& X_n \to X_{n-1}, 0 \leq i \leq n, \\ s_i^n :& X_{n-1} \to X_n, 0 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

Ces opérateurs sont assujetis a des relations dites "simpliciales" - par exemple, $d_i^n d_j^n = d_j^n d_i^n$.

Exemple 2.8. (cf [Wei94]) Considérons un B-module simplicial $M_\bullet$. On lui associe un complexe de chaînes $C(M_\bullet)$ qui en degré n est égal à M_n et ayant pour différentielle :

$$d_n = \sum_i (-1)^i . d_i^n : M_n \to M_{n-1}.$$

Suivant Dold-Kan, on considère aussi un autre complexe $N(M_\bullet)$ dit *complexe normalisé.* Il est égal en degré n au B-module :

$$M_n / \mathrm{Im}(s_0^n + \cdots + s_{n-1}^n)$$

et sa différentielle est induite par d_n définie ci-dessus. L'avantage de N est qu'il définit une équivalence entre la catégorie des R-modules simpliciaux est celle des complexes de R-modules homologiquement en degrés positifs. Rappelons que la flèche canonique :

$$C(M_\bullet) \to N(M_\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme.

Exemple 2.9. Considérons une A-algèbre C augmentée vers B. On définit par itération une suite de A-algèbres augmentées vers B

$$\begin{aligned} P_A(B)_0 &= A[B], \\ \forall n > 0, P_A(B)_n &= A[P_A(B)_{n-1}]. \end{aligned}$$

Cette suite admet naturellement une structure de A-algèbre simpliciale augmentée vers B.

On notera ne particulier les faits suivants :

(1) $P_A(B)$ est une A-algèbre libre en chaque degré.

(2) Le morphisme naturel de complexes de A-modules

$$N(P_A(B)) \to B$$

est un quasi-isomorphisme.

Cela traduit le fait que $P_A(B)$ est une résolution simpliciale libre du A-module B. On l'appelle la *résolution libre standard* de B.

2.10. Soit $C_\bullet$ un objet simplicial de $A-\mathrm{alg}\,/B$. Alors, le foncteur composé :

$$\Delta^{op} \xrightarrow{C_\bullet} A-\mathrm{alg}\,/B \xrightarrow{\Omega^B_{/A}} B-\mathrm{mod}$$

est un B-module simplicial, égal en degré n à :

$$B \otimes_{C_n} \Omega_{C_n/A}.$$

On notera pour simplifier $\Omega^B_{/A}(C_\bullet)$ le complexe de B-modules qui lui est associé suivant l'exemple précédent.

On a ainsi définit un foncteur :

$$\Omega^B_{/A} : \Delta^{op}(A-\mathrm{alg}\,/B) \to \mathrm{Comp}(B-\mathrm{mod}).$$

La définition concrète du complexe cotangent est la suivante :

Définition 2.11. Avec les notations du paragraphe et de l'exemple précédent, on définit le complexe cotangent de B/A comme l'objet

$$L_{B/A} := \Omega^B_{/A}\big(P_A(B)\big)$$

vu dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}(B)$.

Notons que $L_{B/A}$ est un complexe concentré en degrés positifs. Il est naturellement muni d'un morphisme dans $\mathrm{D}(B)$:

$$L_{B/A} \to \Omega_{B/A}. \tag{2.11.a}$$

2.3. **Foncteurs dérivés suivant Quillen.**

2.12. Terminons par la définition abstraite du complexe cotangent.

On dit qu'un morphisme $C_\bullet \to D_\bullet$ de A-algèbres simpliciales B-augmentées est une équivalence faible si le morphisme induit

$$C(C_\bullet) \to C(D_\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme. La catégorie homotopique $\mathcal{H}(A-\mathrm{alg}\,/B)$ est la localisation de $A-\mathrm{alg}\,/B$ par rapport aux équivalences faibles.

La théorie de Quillen permet de montrer que le foncteur $\Omega^B_{/A}$ admet un dérivé à gauche

$$\mathrm{L}\,\Omega^B_{/A} : \mathcal{H}(A-\mathrm{alg}\,/B) \to \mathrm{D}(B).$$

Rappelons que cela signifie que :

– $\mathrm{L}\,\Omega^B_{/A}$ est munit d'une transformation naturelle représentée par la flèche $\Rightarrow$ dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
A-\mathrm{alg}\,/B \arrow[r] \arrow[d, "\Omega^B_{/A}"'] & \mathcal{H}(A-\mathrm{alg}\,/B) \arrow[d, "\mathrm{L}\,\Omega^B_{/A}"] \arrow[dl, Rightarrow] \\
B-\mathrm{mod} \arrow[r] & \mathrm{D}(B)
\end{tikzcd}$$

– Il est universel (initial) pour cette propriété.[1]

Plus concrètement :

– Pour tout $C_\bullet$, il existe une flèche dans $\mathrm{D}(B)$:

$$\mathrm{L}\,\Omega^B_{/A}(C_\bullet) \to \Omega^B_{/A}(C_\bullet)$$

naturelle en $C_\bullet$.

– Pour tout foncteur $F : \mathcal{H}(A-\mathrm{alg}\,/B) \to \mathrm{D}(B)$, munit d'une transformation naturelle

$$F \to \Omega^B_{/A}$$

il existe un unique transformation naturelle :

$$F \to \mathrm{L}\,\Omega^B_{/A}.$$

Le complexe cotangent est alors égal à :

$$L_{B/A} = \mathrm{L}\,\Omega^B_{/A}(B).$$

1. Si un foncteur dérivé à gauche existe, il est unique à isomorphisme unique près.

Remark 2.13. Notons que la flèche $P_A(B) \to B$ est bien une équivalence faible dans le sens précédent défini au paragraphe précédent. C'est une résolution de B dite *cofibrante* par Quillen – analogue des résolutions projectives. Ainsi, la Définition 2.11 coincide avec la méthode générale pour définir un foncteur dérivé.

3. Propriétés

3.1. **Lien avec les dérivations.**

Proposition 3.1. *Pour toute extension B/A, le morphisme* (2.11.a) *induit un isomorphisme :*

$$H_0(L_{B/A}) \to \Omega_{B/A}.$$

Cela résulte du fait que B est conoyau de la double flèche $P_A(B)_1 \rightrightarrows P_A(B)_0$ (cf Example 2.9 point (2)) et du fait que $\Omega^B_{/A}$ commute aux conoyaux (puisque c'est un adjoint à droite).

Corollaire 3.2. *Pour toute A-algèbre B et tout B-module M, on obtient un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B)}(L_{B/A}, M) = Der_A(B, M).$$

Remark 3.3. Compte tenu de (2.3.a), on obtient encore :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B)}(L_{B/A}, M) = \mathrm{Hom}_{A\text{–alg}\,/B}(B, B \oplus M).$$

Cet isomorphisme traduit le fait plus général que $\mathrm{L}\,\Omega^B_{/A}$ est l'adjoint à gauche du foncteur dérivé de $M \mapsto B \oplus M$ – une fois étendu aux objets simpliciaux et en identifiant les B-modules simpliciaux aux complexes de B-modules concentrés en degrés positifs d'après la correspondance de Dold-Kan.

3.4. L'avantage de la présentation abstraite du Paragraphe 2.12 est qu'elle permet d'établir facilement certaines propriétés du complexe cotangent. Rappelons tout d'abord les propriétés classiques suivantes :

Proposition 3.5. *Soit B et C deux A-algèbres :*

(1) *Il existe un isomorphisme naturel :* $C \otimes_A \Omega_{B/A} = \Omega_{C \otimes_A B/C}$.
(2) *Pour tout morphisme $B \to C$ de A-algèbres, il existe une suite exacte courte :*
$$C \otimes_B \Omega_{B/A} \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B} \to 0$$
(3) *Si $C = B/I$ pour un idéal I de B, il existe une suite exacte courte :*
$$I/I^2 \to C \otimes_B \Omega_{B/A} \to \Omega_{C/A} \to 0.$$

Ces propriétés se dérivent comme suit :

Proposition 3.6. *Soit B et C deux A-algèbres :*

(1) *Si pour tout $i > 0$, $\mathrm{Tor}_i^A(B, C) = 0$, alors $C \otimes_A L_{B/A} = L_{C \otimes_A B/C}$.*
(2) *Pour tout morphisme $B \to C$ de A-algèbres, il existe un triangle distingué canonique :*
$$C \otimes^{\mathrm{L}}_B L_{B/A} \to L_{C/A} \to L_{C/B} \to C \otimes_A L_{B/A}[1]$$

Compte tenu du corollaire précédent la proposition, on a donc associé à tous morphismes d'anneaux $A \to B \to C$ une suite exacte longue :

$$\begin{aligned}0 \to &Der_B(C, M) \to Der_A(C, M) \to Der_A(B, M|_B) \\ &\to Ext^1_C(L_{C/B}, M) \to Ext^1_C(L_{C/A}, M) \to Ext^1_B(L_{B/A}, M|_B) \\ &\quad \to Ext^2_C(L_{C/B}, M) \to \cdots\end{aligned} \tag{3.6.a}$$

3.2. **Quelques calculs.** On rappelle pour termnier les calculs classiques du complexes cotangents [2] :

Proposition 3.7. *Pour une A-algèbre B de présentation finie, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B/A est lisse.*

(ii) *Le morphisme canonique $L_{B/A} \to \Omega_{B/A}$ est un quasi-isomorphisme et $\Omega_{B/A}$ est un B-module localement libre.*

Proposition 3.8. *Soit A un anneau et I un idéal. On pose $B = A/I$.*

(1) $H_0(L_{B/A}) = 0$.

(2) $H_1(L_{B/A}) = I/I^2$.

(3) *Si I est régulier, pour tout $i \neq 1$, $H_i(L_{B/A}) = 0$.*

On fera attention que, dans les hypothèses de la proposition précédente, l'isomorphisme $L_{B/A} = I/I^2[-1]$ ne caractérise pas le fait que I soit régulier (cf [Qui70]).

Remark 3.9. On laisse au lecteur le soin de vérifier que, lorsque B/A est d'intersection complète, le complexe $L_{B/A}$ coïncide avec celui évoqué dans l'introduction.

4. Problèmes d'extensions

4.1. **Extensions d'algèbres.**

Définition 4.1. Soit R un anneau, A une R-algèbre et I un A-module.

Une *R-extension de A par I* est la donnée d'une suite exacte courte de R-modules

$$X = (0 \to I \to B \xrightarrow{p} A \to 0) \tag{4.1.a}$$

telle que B est une R-algèbre, I un idéal de B de carré nul et p un morphisme de R-algèbres tel que la structure de A-module sur I est induite par p.

Un morphisme entre deux telles extensions est formé par un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, "\phi"] & \\ I \arrow[ur] \arrow[dr] & & A \\ & B' \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

où ϕ est un morphisme de R-algèbres.

On note $\underline{\mathrm{Exal}}_R(A, I)$ la catégorie ainsi définie et $\mathrm{Exal}_R(A, I)$ l'ensemble des classes d'isomorphies de cette catégorie.

Notons que la R-algèbre des nombres duaux $A \oplus I$ définie en 2.3 est un exemple d'une telle extension. On l'appellera la *R-extension triviale* de A par I.

4.2. Considérons la situation de la définition ci-dessus. On peut définir les opérations suivantes sur les R-extensions de A par I :

– *Image inverse.*– Soit $u : A' \to A$ un morphisme de R-algèbres. Considérons un extension X comme ci-dessus. Rlors, le produit fibré $B \times_A A'$ a une structure canonique de R-algèbre. La projection $B \times_A A' \to A'$ est un morphisme surjectif d'anneaux dont le noyau s'identifie à I (cf [EGA4, 0_{IV} 18.2.5]). On note $X * u$ l'extension de A' par I ainsi définie.

– *Image directe.*– Soit $v : I \to I'$ un morphisme de A-modules et X une extension comme ci-dessus. Alors la somme amalgamée $B \oplus_I I'$ admet une structure canonique de R-extension de A par I' (cf [EGA4, 0_{IV} 18.2.8]). On la note $v * X$.

2. On anticipe la suite de la théorie car ces propositions se démontrent grâce à l'étude du lien entre complexe cotangent et déformations.

– *Addition.*– Soit X et X' deux extensions de la forme (4.1.a). On en déduit une R-extension somme directe :

$$0 \to I \oplus I \to B \oplus B' \xrightarrow{p+p'} A \oplus A \to 0$$

notée $X \oplus X'$. On note $s : I \oplus I \to I$ (resp. $\delta : A \to A \oplus A$) le morphisme somme (resp. diagonal) de I/A (resp. A/R). On définit l'extension somme par la formule :

$$X + X' = s * (X \oplus X') * \delta.$$

On peut vérifier que ceci définit une loi de groupe abélien sur $\mathrm{Exal}_R(A, I)$ dont l'élément neutre est l'extension triviale $A \oplus I$.

Notons le résultat important suivant :

Proposition 4.3. *La catégorie* $\underline{\mathrm{Exal}}_R(A, I)$ *munie de la loi + est une catégorie monoïdale symétrique avec pour neutre l'objet* $A \oplus I$ *et telle que tout objet admet un inverse.* [3]

Remark 4.4. Notons en particulier que pour tout objet X de $\underline{\mathrm{Exal}}_R(A, I)$, le groupe $\mathrm{Aut}(X)$ ezst canoniquement isomorphe à $\mathrm{Aut}(A \oplus I)$ qui s'identifie lui-même à

$$Der_R(A, I)$$

d'après (2.3.a).

Exemple 4.5. Soit A une R-algèbre et I un idéal de A. On pose $B = A/I$. On en déduit une R-extension de la forme suivante :

$$X(A, I) = (0 \to I/I^2 \to A/I^2 \to A/I \to 0).$$

De plus, on vérifie (cf [EGA4, 0_{IV} 18.3.8]) que pour tout A-module M annulé par I, le morphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_{A/I}(I/I^2, M) \to \mathrm{Exal}_A(A/I, M), u \mapsto u * X(A, I)$$

est un isomorphisme de groupes abéliens.

4.6. Considérons encore les hypothèse de la définition.

Soit $p : P \to A$ la résolution libre standard de la R-algèbre A (Bxample 2.9). Soit X une R-extension de la forme (4.1.a). Si on applique le foncteur $- * p$ à chaque R-algèbres P_i, on obtient une R-extension simpliciale notée $X * p$ que l'on écrit :

$$0 \to I \to Q \to P \to 0$$

où I est désigne l'objet simplicial constant, égal à I en chaque degré. Il est vu ici comme un P-module.

On considère la suite exacte courte associée à $P = Q/I$:

$$0 \to I \xrightarrow{\nu} P \otimes_Q \Omega_{Q/R} \to \Omega_{P/R} \to 0$$

(cf Prop. 3.5, $I^2 = 0$). En effet, du fait que P est libre degré par degré, on déduit que i est injectif (degré par degré). On considèrera la suite précédente comme une suite exacte de complexes de P-modules, en l'identifiant à son image par le foncteur B (ou N) de l'example 2.8. Elle définie donc un élément de

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega_{P/R}, I|_P) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(R\text{–mod})}(S(\Omega_{P/R}), I).$$

Par ailleurs, du fait que $\Omega_{P/R}$ est libre degré par degré, on obtient :

$$\forall i > 0, \mathrm{Tor}_i^R(\Omega_{P/R}, A) = 0.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega_{P/R}, I|_P) = \mathrm{Ext}^1_A(\Omega_{P/R} \otimes_P A, I).$$

3. On dit d'après Deligne que $\underline{\mathrm{Exal}}_R(A, I)$ est une *catégorie de Picard.*

Par définition, $L_{A/R} = \Omega_{P/R} \otimes_P A$ (cf 2.11). On a donc construit une application :

$$\mathrm{Exal}_R(A, I) \to \mathrm{Ext}^1_A(L_{A/R}, I). \tag{4.6.a}$$

Théorème 4.7 (cf [Ill71], III, Th. 1.2.3)**.** *Avec les notations qui précèdent, l'application* (4.6.a) *est un isomorphisme de groupes abéliens compatible à la fonctorialité en A et en I.*

Début de la preuve.– La preuve consiste à construire un isomorphisme réciproque à la flèche (4.6.a). Fixons un élément

$$y \in \mathrm{Ext}^1(\Omega_{P/R}, I).$$

On fera attention que y correspond à une extension de P-modules simpliciaux. Par contre, d'après [Ill71, I, 3.2.3.8], il existe un P-module I' (*i.e.* un R-module simplicial muni d'une action de la R-algèbre simpliciale P) et un morphisme de P-modules $f : I \to I'$ qui est un quasi-isomorphisme (sur les complexes de R-modules associés) et tel que $f_*(y)$ est associé à une extension de P-modules :

$$0 \to I' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} \Omega_{P/R} \to 0.$$

On lui associe une R-extension d'algèbres par le procédé suivant :

$$0 \to I' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}} P \oplus E \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_P & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}} P \oplus \Omega_{P/R} \to 0,$$

où $P \oplus E$ est vu comme la P-algèbre des nombres duaux sur E – généralisant la définition 2.3 au cas d'un anneau simplicial.

On considère le morphisme naturel :

$$j_2 = \begin{pmatrix} 1_P \\ d_{P/R} \end{pmatrix} : P \to P \oplus \Omega_{P/R}$$

L'extension de P-modules $\alpha * j_2$ est de la forme :

$$0 \to I' \to E' \to P \to 0.$$

En lui appliquant le foncteur H_0, on obtient donc une extension de R-modules de la forme :

$$0 \to I \to H_0(E') \to A \to 0.$$

On montre que cette extension ne dépend pas du choix de I' et que l'application ainsi définie

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega_{P/R}, I) \to \mathrm{Exal}_R(A, I)$$

est inverse à (4.6.a) (cf preuve de *loc. cit.*).

4.8. Ainsi, la suite exacte longue (3.6.a) se réécrit :

$$\begin{aligned} 0 \to & Der_A(B, M) \to Der_R(B, M) \to Der_R(A, M|_A) \\ & \to \mathrm{Exal}_A(B, M) \to \mathrm{Exal}_R(B, M) \to \mathrm{Exal}_R(A, M|_A) \\ & \quad \to Ext^2_B(L_{B/A}, M) \to \cdots \end{aligned} \tag{4.8.a}$$

Exemple 4.9. On reprend les notations de l'example 4.5. Du théorème précédent, appliqué à la A-algèbre $B = A/I$, on déduit un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{A/I}(I/I^2, M) = \mathrm{Ext}^1_B(L_{B/A}, M).$$

Aien sûr, $\Omega_{B/A} = 0$. Ainsi, on obtient :

$$H_0(L_{B/A}) = 0, H_1(L_{B/A}) = I/I^2,$$

ce qui démontre les deux premiers points de la proposition 3.8.

Notons que le point (3) se démontre en se ramenant au cas où l'anneau A est local et en considérant la résolution de Koszul associée à un système régulier de paramètres du A-module I.

4.2. **Déformation des A-algèbes plates.**

4.10. Soit R un anneau de base. On fixe maintenant une R-extension

$$X = (0 \to I \to A \to A_0 \to 0),$$

et des morphismes :

$$\begin{array}{ccc} I & & A_0 \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\ J & & B_0 \end{array}$$

où f_0 est une extension de R-algèbres, J un B_0-module et u un morphisme A_0-linéaire

On s'intéresse au problème de trouver une R-extension Y solution du problème suivant :

$$\begin{tikzcd} Y : (0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & 0) \\ X : (0 \arrow[r] & J \arrow[r] & B \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & 0) \end{tikzcd} \tag{4.10.a}$$

Or, d'après l'example 4.5, on obtient :

$$\mathrm{Hom}_{A_0}(I, J) = \mathrm{Exal}_A(A_0, J).$$

De plus, les solutions Y du problème ci-dessus s'identifient aux éléments de $\mathrm{Exal}_A(B_0, J)$ dont l'image par la composée

$$(*) : \mathrm{Exal}_A(B_0, J) \to \mathrm{Exal}_A(A_0, J) = \mathrm{Hom}_{A_0}(I, J)$$

est égale à u.

On peut alors réécrie la suite (4.8.a) dans la situation particulière de ce paragraphe :

$$0 \to \mathrm{Exal}_{A_0}(B_0, J) \to \mathrm{Exal}_A(B_0, J) \xrightarrow{(*)} \mathrm{Hom}_{A_0}(I, J) \xrightarrow{\partial} Ext^2_{B_0}(L_{B_0/A_0}, J). \tag{4.10.b}$$

Son exactitude se traduit par le résultat suivant :

Proposition 4.11 ([Ill71], III, 2.1.2.3)**.** *Avec les hypothèses et notations qui précèdente, l'élément*

$$\partial(u) \in Ext^2_{B_0}(L_{B_0/A_0}, J)$$

s'annule si et seulement si il existe une solution Y au problème (4.10.a).

Quand cette obstruction est nulle, l'ensemble des classes d'isomorphies de solutions Y est un torseur sous le groupe :

$$\mathrm{Exal}_{A_0}(B_0, J) = \mathrm{Ext}^1(L_{B_0/A_0}, J).$$

De plus, le groupe des automorphismes d'une solution est isomorphe à :

$$Der_{A_0}(B_0, J) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B_0)}(L_{B_0/A_0}, J).$$

Le dernier point résulte de la remarque 4.4.

Dans [Ill71], L. Illusie pose $\omega(X, f_0, u) := \partial(u)$. On appelle cet élément *l'obstruction* au problème (4.10.a).

Exemple 4.12. Cette proposition s'applique en particulier dans le cas où :

$$J = I \otimes_{A_0} B_0, u = 1_I \otimes f.$$

Rappelons que dans ce cas, étant donné un diagramme (4.10.a), les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) B_0/A_0 est plate.

(ii) B/A est plate.

Dans ce cas, la classe

$$\omega(X, f_0, u) \in Ext^2_{B_0}(L_{B_0/A_0}, I \otimes_{A_0} B_0)$$

obtenue précédement est encore l'obstruction à l'existence d'une A-algèbre plate B telle que $B \otimes_A A_0 = B_0$ (*i.e.* une déformation plate de B_0 sur A).

4.13. Rappelons qu'un revêtement étale d'un schéma affine Spec(A) correspond à une extension B/A telle que :
- B est plat et de présentation finie en tant que A-module,
- Le morphisme de multiplication $B \otimes_A B \to B$ fait de B un $B \otimes_A B$-module plat.

On dira que B/A est *étale finie*.

Une application frappante du théorème précédent est le résultat suivant :

Proposition 4.14. *Soit A un anneau, I un idéal nilpotent et $A_0 = A/I$. Alors, le foncteur*

$$B \mapsto B \otimes_A A_0$$

établit un isomorphisme entre les classes d'isomorphies de A-algèbres étales finies et celles des A_0-algèbres étales finies.

Démonstration. Notons qu'on se réduit au cas $I^2 = 0$. Si $I^n = 0$, on factorise $A \to A/I$ en une suite de morphismes surjectifs dont l'idéal est de carré nul :

$$A = A/I^n \to A/I^{n-1} \to \cdots \to A/I.$$

Fixons une A_0-algèbre B_0 étale finie. L'exemple précédent montre que l'obstruction à l'existence d'une déformation plate B de B_0 sur A vit dans

$$Ext^2_{B_0}(L_{B_0/A_0}, I \otimes_{A_0} B_0)$$

qui est nulle puisque B_0/A_0 est étale (cf Prop. 3.7).

Si B/A est une telle déformation, on en déduit que B/A est étale finie. Donc le foncteur est surjectif sur les classes d'isomorphies.

Par ailleurs, l'ensemble des déformations plates B B_0 sur A est en bijection avec $\mathrm{Ext}^1(L_{B_0/A_0}, I \otimes_{A_0} B_0)$ qui est nul, à nouveau parceque B_0/A_0 est étale. On en déduit l'injectivité. □

Le corollaire qui nous intéressera dans le cas de la théorie de Scholze (ou plutôt son analogue en termes de revêtements presqu'étales) :

Corollaire 4.15. *Soit A un anneau, I un idéal tel que A est séparé complet pour la topologie I-adique ; autrement dit, le morphisme canonique :*

$$A \to \varprojlim_{n>0} A/I^n$$

est un isomorphisme.

Posons $A_0 = A/I$. Alors, le foncteur

$$B \mapsto B \otimes_A A_0$$

établit un isomorphisme entre les classes d'isomorphies de A-algèbres étales finies et celles des A_0-algèbres étales finies.

Soit $A_n = A/I^{n+1}$ pour un entier $n \geq 0$. Notons que pour démontrer ce corollaire, on utilise les fait suivants :

(1) Tout A-module projectif de type fini M vérifie :
$$M = \varprojlim_{n \geq 0} \big(M \otimes_A A_n\big).$$

(2) Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ un système projectif de A-modules tel que M_n est annulé par I^{n+1} et le morphisme canonique $M_{n+1} \otimes_{A_{n+1}} A_n \to M_n$ est bijectif. On suppose en outre :
   - pour tout $n \geq 0$, le A_n-module M_n est projectif,
   - le A_0-module M_0 est de type fini.

   Alors le A-module $M = \varprojlim_{n\geq 0} M_n$ est projectif de type fini.

4.3. **Déformation des morphismes.**

4.16. On reprend les hypothèses du paragraphe 4.10. On se donne de plus deux R-extensions Y et Y' au-dessus de X et on s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{tikzcd}
Y:(0 \arrow[rr] & & J \arrow[rr] \arrow[dr, "v"] & & B \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & B_0 \arrow[rr] \arrow[dr, "g_0"] & & 0) \\
& Y':(0 \arrow[rr] & & J' \arrow[rr] & & B' \arrow[rr] & & B'_0 \arrow[rr] & & 0) \\
X:(0 \arrow[rr] & & I \arrow[rr] \arrow[uu] \arrow[ur, "u'"] & & A \arrow[rr] \arrow[uu] \arrow[ur] & & A_0 \arrow[rr] \arrow[uu] \arrow[ur] & & 0)
\end{tikzcd} \tag{4.16.a}$$

v et g_0 étant fixés.

Notons que la donnée d'une flèche pointillée rendant commutatif le diagramme est équivalente à la donnée d'un isomorphisme entre les A-extensions $v * Y$ et $Y' * g_0$ de B'_0 par J. Ainsi, l'existence d'une telle flèche équivaut à l'égalité dans $\mathrm{Exal}_A(B_0, J')$:
$$v * Y = Y' * g_0.$$

D'après le théorème 4.7, l'extension $v*Y - Y'*g_0$ correspond de manière unique à un élément :
$$\omega \in \mathrm{Ext}^1_{B_0}(L_{B_0/A}, J').$$

Compte tenu des égalités :
$$Der_A(A_0, J') = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/A_0}, J') = 0, \qquad \text{formule (2.1.a)}$$
$$\mathrm{Ext}^1(L_{A_0/A}, J') = Hom_{A_0}(I, J'), \qquad \text{Example 4.5,}$$

on peut écrire la suite (3.6.a) pour les morphismes $A \to A_0 \to B_0$ comme suit :
$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{B_0}(L_{B_0/A_0}, J') \to \mathrm{Ext}^1_{B_0}(L_{B_0/A}, J') \xrightarrow{(*)} Hom_{A_0}(I, J') \to \cdots$$

On vérifie que la flèche $(*)$ est isomorphe à la flèche :
$$\mathrm{Exal}_A(B_0, J') \to Hom_{A_0}(I, J')$$

qui envoie une A-extension de B_0 par J' sur le morphisme structural $I \to J'$. Ainsi, par construction, ce dernier morphisme envoie la A-extension $v * Y$ (resp. $Y' * g_0$) sur u'. Donc $(*)$ envoie la classe ω sur 0 qui se relève donc de manière unique en une classe :
$$\omega \in \mathrm{Ext}^1_{B_0}(L_{B_0/A_0}, J').$$

En conclusion, on a obtenu le théorème suivant :

Théorème 4.17 ([Ill71], III, 2.2.2)**.** *Avec les notations qui précèdent, la classe ω définie ci-dessus est nulle si et seulement si il existe une flèche pointillée rendant commutatif le diagramme* (4.16.a)*.*

De plus, l'ensemble de ces flèches est en bijection avec

$$Der_{A_0}(B_0, J') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B_0)}(L_{B_0/A_0}, J').$$

Notons que la deuxième partie provient du fait que l'ensemble des isomorphismes de $v * Y$ sur $Y' * g_0$ est en bijection avec le groupe $Der_{A_0}(B_0, J')$ (cf Proposition 4.3).

4.18. Ce théorème permet de montrer le résultat classique suivant :

Proposition 4.19. *Soit B/A une extension d'anneaux. Considérons les conditions :*

(i) *$L_{B/A} = \Omega_{B/A}$ et $\Omega_{B/A}$ est projectif sur B (resp. $L_{B/A} = \Omega_{B/A} = 0$).*

(ii) *Pour tout B-algèbre C et tout idéal nilpotent I, $C = C/I$, pour tout diagramme commutatif de flèches solides :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & C/I \end{tikzcd}$$

il existe une flèche (resp. unique flèche) pointillée rendant le diagramme commutatif.

Alors (i) implique (ii).

La démonstration est laissée au lecteur à titre d'exercice.[4]

On peut aussi améliorer le résultat de la proposition 4.14.

Proposition 4.20. *Soit A un anneau, I un idéal nilpotent et $A_0 = A/I$. Alors, le foncteur*

$$B \mapsto B \otimes_A A_0$$

établit une équivalence de catégories entre les A-algèbres étales finies et les A_0-algèbres étales finies.

Références

[And67] Michel André. *Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 32. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[EGA4] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (20, 24, 28, 32), 1964–1967.

[Gro68] A. Grothendieck. *Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif.* Lecture Notes in Mathematics, No. 79. Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[Ill71] Luc Illusie. *Complexe cotangent et déformations. I.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Qui70] Daniel Quillen. On the (co-) homology of commutative rings. In *Applications of Categorical Algebra (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVII, New York, 1968)*, pages 65–87. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

[SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck, and L. Illusie. *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, volume 225 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, 1971. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie 1966–67 (SGA 6).

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

---

4. Rappelons bien sûr que la réciproque est vraie si on demande en plus que B/A est de présentation finie (resp. projectif de présentation finie).