ENS LYON
Groupe de travail : «Sur un travail de Scholze»
organisé par *V. Pilloni*

LE TILT DES ALGÈBRES PERFECTOÏDES

F. DÉGLISE

TABLE DES MATIÈRES

1. PRESQUES MATHÉMATIQUES

1.1. Dans cette section, on fixe V un anneau et $\mathcal{M}$ un idéal de V tel que :
- $\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}$
- $\mathcal{M}$ est plat en tant que V-module.

1.1. Définitions et structures.

1.1.1. *Définition.*

Définition 1.2. Fixons E, F deux V-modules et $f : E \to F$ un morphisme V-linéaire. On adopte les définitions suivantes :

(1) Le V-module E (resp. le morphism f) est presque nul (resp. un presqu'isomorphisme) si $\mathcal{M} \otimes_V E = 0$ (resp. $\mathcal{M} \otimes_V f$ est un isomorphisme).
(2) On dit que E est $\mathcal{M}$-local si pour tout V-module presque nul P, $\mathrm{Hom}_V(P, E) = 0$.

On note $\mathscr{Z}_{\mathcal{M}}$ la sous-catégorie pleine de $V-\mathrm{mod}$ formée des V-modules presque nuls.

1.3. On vérifie facilement que $\mathscr{Z}_{\mathcal{M}}$ est une sous-catégorie épaisse de la catégorie $V-\mathrm{mod}$.

Date: 3 octobre 2012.

Définition 1.4. On note $V^a-\mathrm{mod}$ la catégorie quotient au sens de Gabriel de la catégorie abélienne $V-\mathrm{mod}$ par $\mathscr{Z}_{\mathcal{M}}$.

On dispose des foncteurs suivants :

$$\mathscr{Z}_{\mathcal{M}} \xrightarrow{i_*} V-\mathrm{mod} \xrightarrow{q^*} V^a-\mathrm{mod}$$

où i_* est l'inclusion canonique et q^* le morphisme de projection. La catégorie V^a- mod est définie de manière universelle par la propriété de disposer d'un foncteur exact $q^* : V-\mathrm{mod} \to V^a-\mathrm{mod}$ tel que $q^*(E) = 0$ si E est presque nul.

Théorème 1.5. *Le foncteur i_* (resp. q^*) admet un adjoint à gauche i^* (resp. $q_!$) et un adjoint à droite $i^!$ (resp. q_*) tels que :*

(1) $i^*i_* = 1$, $i^!i_* = 1$ *:* i.e i_* *est pleinement fidèle.*

(2) $qq_* = 1$ *:* i.e q_* *est pleinement fidèle. Il identifie la catégorie* $V^a-\mathrm{mod}$ *à la sous-catégorie pleine de* $V-\mathrm{mod}$ *formée des V-modules $\mathcal{M}$-locaux.*

(3) $q^*q_! = 1$ *:* i.e $q_!$ *est pleinement fidèle.*

Fixons un V-module M_0.
La suite suivante

$$0 \to i_*i^!(M_0) \to M_0 \to q_*q^*(M_0), \tag{1}$$

formée des morphismes d'adjonction évidents est exacte. C'est l'unique suite exacte de la forme

$$0 \to P \to M_0 \to F$$

telle que P est presque nul et F est $\mathcal{M}$-local.
Par ailleurs, la suite suivante

$$0 \to q_!q^*(M_0) \to M_0 \to i_*i^*(M_0) \tag{2}$$

est exacte et c'est l'unique suite exacte de la forme

$$0 \to F' \to M_0 \to P'$$

telle que F' est $\mathcal{M}$-local et P' est presque nul.

Ce théorème est une conséquence formelle du fait que :

(1) $V-\mathrm{mod}$ est une catégorie abélienne de Grothendieck (*i.e.* admettant un object générateur, des limites et colimites quelconques et telle que sommes directes sont exactes).

(2) La catégorie $\mathscr{Z}_{\mathcal{M}}$ est non seulement épaisse mais aussi stable par limites inductives et projectives quelconques.

1.6. Notons qu'il résulte facilement du théorème qu'on peut écrire la suite (2) comme suit :

$$0 \to \mathcal{M} \otimes_V M_0 \xrightarrow{\nu} M_0 \xrightarrow{\pi} M_0 \otimes_V (V/\mathcal{M}) \to 0$$

où ν est l'inclusion évidente et π est la projection canonique.[1] La suite est caractérisée par son exactitude et par les propriétés suivantes :

– ν est un monomorphisme et un presqu'isomorphisme d'un V-module $\mathcal{M}$-local dans M_0.
– π est un morphisme presque nul de M_0 dans un V-module presque nul.

De plus, du fait que $\mathcal{M}$ est V-plat, on déduit que π est un épimorphisme – c'est une propriété spéciale à la localisation considérée ici.

Par unicité de la suite (2), on déduit les formules :

(1) $q_!q^*(M_0) = \mathcal{M} \otimes_V M_0$.

1. Cela résulte du fait que $\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}$. Intuitivement, $V/\mathcal{M}$ est le V-module presque nul "universel".

(2) $i_* i^*(M_0) = M_0/\mathcal{M}.M_0$.

De la pleine fidélité de q_* et de la formule (1) ci-dessus, on déduit :

$$q_!(M) = \mathcal{M} \otimes_V q_*(M).$$

Ainsi, grâce à l'hypothèse de platitude faite sur $\mathcal{M}$, on obtient que $q_!$ est exact à gauche. C'est donc un foncteur exact puisque c'est un adjoint à gauche.

1.7. Des propriétés d'adjonctions obtenues dans le théorème précédent, et des calculs du paragraphe précédent, on déduit :

(1) $q_* q^*(M_0) = \mathrm{Hom}_V(\mathcal{M}, M_0)$.

(2) $i_* i^!(M_0) = \mathrm{Hom}_V(V/\mathcal{M}, M_0)$.

Par ailleurs, la suite (1) est de la forme :

$$0 \to \mathrm{Hom}_V(V/\mathcal{M}, M_0) \xrightarrow{\pi'} M_0 \xrightarrow{\nu'} \mathrm{Hom}_V(\mathcal{M}, M_0)$$

On notera cette fois que l'on voit bien que la suite n'est pas exacte à droite car le V-module $\mathcal{M}$ n'est pas en général projectif. Par contre, la suite est encore caractérisée par son exactitude et les propriétés suivantes :

– π' un monomorphisme presque nul d'un V-module presque nul dans M_0.
– ν' est un presqu'isomorphisme de M_0 dans un V-module $\mathcal{M}$-local.

La dualité entre cette suite et celle du numéro précédent est évidente.

Remarque 1.8. Pour conclure, on remarquera qu'on a donc obtenu une situation dite de recollement, analogue à la situation des faisceaux sur un ouvert et le fermé complémentaire, qui est résumée par l'existence des foncteurs :

$$V^a\!-\!\mathrm{mod} \underset{q_*}{\overset{q_!}{\underset{\xleftarrow{q^*}}{\rightrightarrows}}} V\!-\!\mathrm{mod} \underset{i^!}{\overset{i^*}{\underset{\xrightarrow{i_*}}{\leftleftarrows}}} \mathscr{Z}_{\mathcal{M}}\,.$$

1.1.2. *Structure monoïdale.*

1.9. La catégorie $V-\mathrm{mod}$ est monoïdale symétrique fermée. De plus, $\mathscr{Z}_{\mathcal{M}}$ est de manière évidente stable par produit tensoriel avec nimporte quel V-module. Il en résulte formellement que le produit tensoriel $\otimes_V$ induit un produit tensoriel symétrique sur V^a-mod définit de manière unique par le fait que q^* est monoïdal.

Du fait que q^* est exact, on déduit facilement que ce produit tensoriel est exact à droite : il admet donc un adjoint à droite autrement dit un Hom interne. On résume ces faits triviaux dans la définition suivante :

Définition 1.10. On définit sur V^a-mod un produit tensoriel symétrique :

$$M \otimes_{V^a} N := q^*\big(q_*(M) \otimes_V q_*(N)\big).$$

Ce produit tensoriel admet un Hom interne définit par la formule :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{V^a}(M, N) = q^*\, \underline{\mathrm{Hom}}_V(q_*(M), q_*(N)).$$

1.11. On dispose donc des propriétés formelles suivantes :

(1) q^* est monoïdal.

(2) $q_!\big(M \otimes_{V^a} q^*(N_0)\big) = q_!(M) \otimes_V N_0$.

La deuxième formule résulte de la première et de la formule 1.6(2). Pour le Hom interne, on obtient de même :

(1) $q^*\, \underline{\mathrm{Hom}}_V(M, N) = \underline{\mathrm{Hom}}_{V^a}\,\big(q^*(M), q^*(N)\big)$.

(2) $\underline{\mathrm{Hom}}_{V^a}\,\big(q^*(M_0), N\big) = q^*\, \underline{\mathrm{Hom}}_V\,\big(M_0, q_*(N)\big)$.

(3) $\underline{\mathrm{Hom}}_V\,\big(q_!(M), N_0\big) = q_*\, \underline{\mathrm{Hom}}_{V^a}\,\big(M, q^*(N_0)\big)$.

La deuxième formule est obtenue par adjonction à partie de la précédente.

Définition 1.12. (1) Une V^a*-algèbre* A (ou encore un *presqu'anneau*) est un monoïde commutatif dans la catégorie monoïdale V^a-mod. Une *extension* de V^a-algèbres B/A est un morphisme de monoïdes commutatifs de V^a-mod.

On note V^a-alg la catégorie V^a-algèbres.

(2) Soit A une V^a-algèbre.

Un A*-module* M est un objet munit d'une action du monoïde A dans la catégorie monoïdale V^a-mod. Un morphisme de A-modules est un morphismes dans V^a-mod compatible à l'action de A.

On note $A-$mod la catégorie des A-modules.

Un *idéal* I de A est un sous-A-module I de A.

1.13. Le foncteur monoïdal q^* induit trivialement un fonteur

$$q^* : V-\mathrm{alg} \to V^a-\mathrm{alg}\,.$$

Par ailleurs, le foncteur q_* étant adjoint à droite de q^*, il est faiblement monoïdal, ce qui se traduit par l'existence de flèches canoniques :

$$q_*(M) \otimes_V q_*(N) \to q_*q^* \,\underline{\mathrm{Hom}}_V(q_*(M), q_*(N)) = q_*(M \otimes_{V^a} N),$$
$$V \to \underline{\mathrm{Hom}}_V(\mathcal{M}, V) = q_*(V^a).$$

Il en résulte que si A est une V^a-algèbre, $q_*(A)$ est une V-algèbre. On obtient ainsi un foncteur :

$$q_* : V^a-\mathrm{alg} \to V-\mathrm{alg}$$

dont on vérifie formellement qu'il est adjoint à droite du foncteur q^* ci-dessus. Il est alors évident que q_* est pleinement fidèle. La situation devient complètement analogue à la situation décrite

Remarque 1.14. On fera attention qu'il n'y a pas de structure d'anneau évidente sur $q_!(A)$.

1.15. On fixe une V^a-algèbre A et une V-algèbre A_0 telle que $A = q^*(A)$ – par exemple $A_0 = q_*(A)$. La catégorie A_0-mod est abélienne de Grothendieck, monoïdale syémtrique fermée. Formellement, il en est de même de $A-$mod.

En raisonnant comme au paragraphe précédent, on obtient une adjonction de catégories :

$$q^* : A_0-\mathrm{mod} \leftrightarrows A-\mathrm{mod} : q_*$$

telle que q^* est exact et monoïdal et q_* est pleinement fidèle.

Cette situation n'est en fait qu'un cas particulier de celle considérée précédemment : en effet, $(A_0, \mathcal{M} \otimes_V A_0)$ forme un couple satisfaisant les hypothèses 1.1. L'adjonction (q^*, q_*) ci-dessus coïncide avec celle obtenue dans le théorème 1.5 appliqué à ce couple.

Notons qu'étant donné un A_0-module M_0, M_0 est presque nul (resp. $\mathcal{M} \otimes_V A_0$-local) relativement à $(A_0, \mathcal{M} \otimes_V A_0)$ si et seulement si le V-module sous-jacent à M_0 est presque nul (resp. $\mathcal{M}$-local).

On obtient donc une situation de recollement de catégorie abélienne monoïdales symétriques fermées :

$$\begin{tikzcd} A-\mathrm{mod} \arrow[r, shift left=2, "q_!"] \arrow[r, shift right=2, "q_*"'] & A_0-\mathrm{mod} \arrow[l, "q^*" description] \arrow[r, "i_*" description] & \mathscr{Z}_{\mathcal{M}\otimes_V A_0}\,. \arrow[l, shift right=2, "i^*"'] \arrow[l, shift left=2, "i^!"] \end{tikzcd}$$

On se rappellera aussi que les formules du paragraphe 1.11 sont vraies en remplaçant partout V par A_0 et V^a par A.

1.2. **Presqu'algèbre homologique.**

1.2.1. *Conditions de presque finitude.*

1.16. Soit A un presqu'anneau et M un A-module.

La catégorie des A-modules admet des limites inductives. Si $N_\bullet = (N_i)_{i\in I}$ est un système inductif filtrant de A-modules, on dispose toujours d'une flèche :

$$\varinjlim_{i\in I} \underline{\mathrm{Hom}}_A\left(M, N_i\right) \xrightarrow{(*)} \underline{\mathrm{Hom}}_A\Big(M, \varinjlim_{i\in I} N_i\Big).$$

Définition 1.17. Sous les hypothèses qui précèdent, on dit que M est *presque de type fini* (resp. *presque de présentation finie*) si la flèche $(*)$ est un monomorphisme (resp. isomorphisme) pour tout système inductif filtrant $N_\bullet$.

1.18. Posons $M_0 = q_*(M)$, $A_0 = q_*(A)$.

Si $\mathcal{M}$ est un idéal de type fini dans A, M est presque de type fini si et seulement s'il l'est au sens classique : il existe un entier n et un épimorphisme $A^n \to M$ ou ce qui revient au même un morphisme

$$A_0^n \to M_0$$

qui est un presque épimorphisme.

Dans le cas général, il est facile de voir que M est presque de type fini si et seulement si pour tout idéal de type fini $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ il existe un entier $n(\mathcal{M}_0)$ et un morphisme

$$A_0^{n(\mathcal{M}_0)} \to M_0$$

qui est un $\mathcal{M}_0$-presque épimorphisme (*i.e.* son conoyau est tué par $\mathcal{M}_0$). [2]

Remarque 1.19. On peut bien sûr se contenter des idéaux de la forme $\mathcal{M}_0 = (\epsilon)$ pour $\epsilon \in \mathcal{M}$. On notera aussi que les entiers $n(\mathcal{M}_0)$ peuvent ne pas être bornés.

1.2.2. *Platitude et presque projectivité.*

Définition 1.20. Soit A un presqu'anneau et M un A-module.

On dit M est plat (resp. presque projectif) si le foncteur $M \otimes_A -$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, -)$) est exact.

1.21. Soit A un presqu'anneau et M un A-module. Rappelons que $A_* = q_*(A)$ (resp. $M_* = q_*(M)$) admet un structure d'anneau (resp. de A_*-module) canonique.

Contrairement au cas classique, un A-module presque projectif n'est pas facteur direct d'un A-module libre. On a par contre la variante suivante :

Proposition 1.22. *Soit A un presqu'anneau et M un A-module. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est projectif.*

(ii) *Pour tout $\epsilon \in \mathcal{M}$, il existe un A-module libre L tel que $\epsilon.1_A$ se factorise par L.*

Démonstration. C'est une simple conséquence de la définition du Hom interne :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) = q^* \operatorname{Hom}_{A_*}(M_*, N_*).$$

(on choisit $L = A_*^{(M_*)}$, somme directe de M_* copies de A_*, et on utilise l'épimorphisme canonique $L \to M_*$.) □

2. On laisse au lecteur le soin de formuler l'analogue de cette remarque pour la notion de presque présentation finie.

Remarque 1.23. Rappelons que A_* admet une structure canonique d'anneau et M_* une structure canonique de A_*-module – qui redonne les structures respectives sur A et M par application du foncteur monoïdal q^*.

La proposition précédente montre que M est presque projectif si et seulement si M_* est preqque facteur direct d'un libre – *i.e.* à multiplication par nimporte quel élément de $\mathcal{M}$ près.

Ainsi, lorsque M_* est projectif, M est presque projectif mais la réciproque n'est pas vraie. La proposition suivante montre un cas particulier important où on a vraiment une équivalence.

Proposition 1.24. *Soit A un presqu'anneau et $I \subset A$ un idéal de A. On considère la suite exact courte de A-modules :*

$$0 \to I \xrightarrow{\nu} A \xrightarrow{\pi} A/I \to 0 \tag{σ}$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *A/I est un A-module projectif.*
(ii) *La suite (σ) est scindée.*
(iii) *A_*/I_* est un A_*-module projectif.*
(iv) *La suite $q_*(\sigma)$ est scindée (donc en particulier exacte).*
(v) *Il existe $e \in A_*$ tel que : $e^2 = e$, $(1-e) \in I$, $e.I_* = 0$.*
(vi) *Il existe $u \in A_*$ tel que : $u^2 = u$ et $I_* = (u)$.*

Remarque 1.25. On voit facilement que l'élément e (resp. u) dans (v) (resp. (vi)) est unique. Ces éléments sont liés par la relation : $e + u = 1$.

Démonstration. Le fait que les conditions (iii), (iv), (v) et (vi) sont équivalentes est classique. Du fait que $q^*q_* = 1$, (iv) implique (ii).

(ii) implique (i) : En effet, si π est scindé, le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_A(A/I, -)$ est facteur direct de $\underline{\mathrm{Hom}}_A(A, -) = Id$. Il en résulte formellement qu'il respecte les épimorphismes, et il est donc exact à droite.

Pour terminer, nous montrons que (i) implique (v). Du fait que le morphisme induit par π

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(A/I, A) \to \underline{\mathrm{Hom}}_A(A/I, A/I)$$

est un épimorphisme, on déduit que l'image du morphisme suivant :

$$\mathrm{Hom}_{A_*}(A_*/I_*, A_*) \to \mathrm{Hom}_{A_*}(A_*/I_*, A_*/I_*)$$

est $\mathcal{M}$-nulle. C'est le cas en particulier pour l'image de Id_{A_*/I_*} : pour tout $\epsilon \in \mathcal{M}$, il est existe $s_\epsilon : A_*/I_* \to A_*$ tel que s_ϵ est A_*-linéaire et $\pi_* \circ s_\epsilon = \epsilon.Id_{A_*/I_*}$. Posons $e_\epsilon = s_\epsilon \pi_*(1)$. Notons que $s_\epsilon \pi_*(a) = e_\epsilon.a$. On en déduit facilement :

$$e_\epsilon^2 = \epsilon.e_\epsilon,\ (1 - e_\epsilon) \in I_*,\ e_\epsilon.I_* = 0. \tag{3}$$

Notons maintenant que pour tout couple $(\epsilon, \delta) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, d'après les deux dernières relations ci-dessus,

$$\delta.e_\epsilon - e_\epsilon.\delta = (\delta.1 - e_\delta).e_\epsilon - (\epsilon.1 - e_\epsilon).e_\delta = 0.$$

Ainsi, l'application $(\epsilon, \delta) \mapsto \delta.e_\epsilon$ est bilinéaire symétrique et définie un élément e dans :

$$\mathrm{Hom}_V(\mathcal{M} \otimes_V \mathcal{M}, A_*) = \mathrm{Hom}_{V^a}(q^*(\mathcal{M} \otimes_V \mathcal{M}), A) = \mathrm{Hom}_{V^a}(V^a, A) = A_*. \tag{4}$$

On déduit des relations (3) que l'élément e vérifie bien les relations attendues dans (v). Prenons par exemple la relation $e^2 = e$. L'élément e^2 correspond au morphisme :

$$\mathcal{M} \otimes_V \mathcal{M} \to A_*, (\epsilon, \delta) \mapsto (\delta.e_\epsilon)^2 = \delta^2.\epsilon.e_\epsilon = (\delta.\epsilon).(\delta.e_\epsilon).$$

La relation attendue résulte alors du fait que le morphisme

$$\mathcal{M} \otimes_V \mathcal{M} \to A_*, (\epsilon, \delta) \mapsto \delta.\epsilon$$

est égale à 1 à travers l'identification (4). □

1.26. Considérons les hypothèses de la définition précédente.

Rappelons qu'on dit que M est *rigide* si il existe un A-module M' tel que $-\otimes M'$ est adjoint à droite de $M \otimes -$.

Cela revient à se donner des accouplements :

$$\epsilon : M \otimes M' \to A,$$
$$\eta : A \to M' \otimes M$$

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "M\otimes\eta"] \arrow[dr, "1_M"'] & M \otimes M' \otimes M \arrow[d, "\epsilon\otimes M"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M' \arrow[r, "\eta\otimes M'"] \arrow[dr, "1_{M'}"'] & M' \otimes M \otimes M' \arrow[d, "M'\otimes\epsilon"] \\ & M'. \end{tikzcd}$$

On dit alors que M' est le *dual fort* de M. On a d'ailleurs : $M' = \underline{\mathrm{Hom}}_A(M, A)$.

Le théorème suivant est l'analogue d'un théorème bien connu en algèbre homologique :

Théorème 1.27. *Avec les hypothèses ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est presque projectif presque de type fini.*

(ii) *M est plat presque de présentation finie.*

(iii) *M est rigide.*

Démonstration. Si M est rigide, les foncteurs $M \otimes -$ et $\underline{\mathrm{Hom}}(M, -)$ sont exacts il en résulte que (iii) implique (ii) et (i). Les assertions (ii) implique (i) et (i) implique (iii) se démontrent comme dans le cas classique en utilisant les caractérisations respectives du Paragraphe 1.18 et de la Proposition 1.22. □

Remarque 1.28. Soit A un presqu'anneau, et A_0 une V-algèbre telle que $A = A_0^a$.

La catégorie $A-$mod est abélienne de Grothendieck, engendrée par le A-module trivial A. Il en résulte que sa catégorie dérivée $\mathrm{D}(A-\mathrm{mod})$ est bien définie.

Comme q^* et $q_!$ sont exacts, ils se dérivent trivialement. Le foncteur q_* admet un foncteur dérivé à droite et on obtient la situation :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D}(A_0-\mathrm{mod}) \arrow[r, "q^*"] & \mathrm{D}(A-\mathrm{mod}) \arrow[l, shift right=2, "q_!"'] \arrow[l, shift left=2, "\mathrm{R}\, q_*"] \end{tikzcd}.$$

Notons que du fait que q^* et $q_!$ sont exacts, on obtient facilement les relations : $q^* \mathrm{R}\, q_* = 1$, $q^* q_! = 1$.

Il en résulte que $\mathrm{D}(A$–mod$)$ peut-être vue comme le quotient de Verdier de la catégorie triangulée $\mathrm{D}(A_0$–mod$)$ par la sous-catégorie triangulée localisante (stable par triangle, somme directes, et facteurs directs) formée des complexes de A_0-modules tels que $q_! q^*(E) = 0$, autrement dit :

$$\mathcal{M} \otimes_V E = 0.$$

Notons aussi que l'on peut dériver la structure monoïdale de $A-$mod.[3] La catégorie $\mathrm{D}($ mod $A)$ devient monoïdale symétrique fermée – le produit tensoriel est $\otimes_A^{\mathrm{L}}$ et le Hom interne est $\mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_A$.

3. Notons que pour obtenir ce résultat, on peut utiliser la structure de catégorie de modèles de [CD09].

Bien sûr, le foncteur dérivé de q^* est encore un foncteur monoïdal. Notons les relations suivantes entre ces foncteurs dérivés :

(1) $q^* \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(E, F) = \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{A_0}\big(q^*(E), q^*(F)\big)$.

(2) $\mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_A\big(q^*(E_0), F\big) = q^* \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{A_0}\big(E_0, \mathrm{R}\,q_*(F)\big)$.

(3) $\mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{A_0}\big(q_!(E), F_0\big) = \mathrm{R}\,q_* \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_A\big(E, q^*(F_0)\big)$.

1.3. **Presque revêtements.**

Définition 1.29. Soit A un presqu'anneau et B une A-algèbre avec pour multiplication $\mu : B \otimes_A B \to B$.

(1) On dit que B/A est non ramifiée si μ est projectif.

(2) On dit que B/A est étale si elle est plate et non ramifiée.

(3) On dit que B/A est finie étale si elle est étale et B est un A-module presque de présentation finie.

1.30. Comme dans le cas classique, on associe à l'extension B/A une suite exacte courte de $B \otimes_A B$-modules :

$$0 \to I_{B/A} \to B \otimes_A B \xrightarrow{\mu} B \to 0. \tag{5}$$

La Proposition 1.24 admet le corollaire suivant :

Corollaire 1.31. *Considérons les hypothèses ci-dessus. Alors les conditions suivantes son équivalentes :*

(i) *B/A est non ramifiée.*

(ii) *La suite exacte* (5) *de $B \otimes_A B$-modules est scindée.*

(iii) *L'idéal $(I_{B/A})_*$ de $(B \otimes_A B)_*$ est engendré par un idempotent.*

Remarque 1.32. L'extension d'anneaux B_*/A_* dispose des invariants différentiels classiques, notamment l'idéal I_{B_*/A_*} noyau de la multiplication. On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_{B_*/A_*} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"'] & B_* \otimes_{A_*} B_* \arrow[r, "\mu_{B_*/A_*}"] \arrow[d, "\alpha"] & B_* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{B/A*} \arrow[r] & (B \otimes_A B)_* \arrow[r, "\mu_*"] & B_* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où α est l'accouplement structural résultant du fait que q_* est l'adjoint à droite d'un foncteur monoïdal. On fera attention en général que α_0 n'a aucun raison d'être un isomorphisme.

2. Corps perfectoïdes et basculement

2.1. Si K est un corps valué, on note conventionellement $|.|_K$ (resp. K^+) la valuation correspondante (l'anneau de valuation correspondant) :

$$K^+ = \{x \in K \mid |x|_K \leq 1\}.$$

Dans toute cette section, on fixe un entier premier p.

2.1. **Corps perfectoïdes.**

Définition 2.2. Un corps perfectoïde est un corps K valué tel que :

(1) K est non archimédien complet.

(2) La valuation de K est non discrète et de rang 1.

(3) Le corps résiduel de K^+ est de caractéristique p.

(4) Le morphisme de Frobenius :

$$\phi : K^+/(p) \to K^+/(p), x \mapsto x^p$$

est surjectif.

Exemple 2.3. (1) Rappelons qu'un anneau R de caractéristique p est dit *parfait* si le morphisme de Frobenius

$$\phi_R : R \to E, x \mapsto x^p$$

est un isomorphisme. Si R est intègre, il revient au même de dire que ϕ_R est surjectif.

Ainsi, pour un corps valué K de caractéristique p satisfaisant les hypothèses (1), (2) et (3), les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) K est perfectoïde.

(ii) K^+ est parfait.

(2) Le complété du corps valué $\mathbb{Q}_p\big(p^{1/p^\infty}\big)$ est un corps perfectoïde.

En inégales caractéristiques, le fait qu'il n'existe pas nécessairement de racine p-ème dans l'anneau des entiers d'un corps perfectoïde est compensé par le lemme facile suivant :

Lemme 2.4. *Soit K un corps perfectoïde. On pose $\Gamma := |K^\times|$ vu comme un sous-groupe de $\mathbb{R}^\times$.*

Alors, Γ est p-divisible.

Démonstration. Si K est de caractéristique p, le résultat est clair vu l'exemple précédent. Supposons donc K de caractéristique 0.

Par hypothèse, Γ est un sous-groupe non discret de $\mathbb{R}^\times$. Il est donc dense dans $\mathbb{R}^\times$: si on pose $r = |p|$,

$$B = \big\{x \in K^+ \mid |x| \in]r, 1[\big\},$$

on en déduit facilement que B engendre le groupe Γ. [4]

Considérons un élément $x \in B$. Pour conclure, il suffit maintenant de montrer que $|x|$ est p-divisible. Or d'après le point (4) de la définition 2.2, on peut trouver $(y, r) \in K^+$ tel que $x - y^p = p.r$. L'élément y^p n'est pas divisible par p dans K^+ puisque x ne l'est pas par hypothèse. On en déduit : $|y^p| > |p| \geq |p.r|$. On obtient donc le calcul suivant :

$$|x| = |y^p + p.r| = |y^p| = |y|^p.$$

ce qui conclut. □

4. En effet, B est non vide. Du fait que la valuation de K est non discrète, $\Gamma \neq \langle r \rangle$. Il existe donc $x \in K^\times$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $r^{n+1} < |x| < r^n$. Dès lors, $xp^{-n} \in B$.
Notons que si $x \in B$, alors $y = px^{-1}$ appartient à B. Ainsi, $p = xy$ appartient au sous-groupe engendré par B, ce qui implique que $\langle r \rangle \subset \langle B \rangle$. Pour un élément $x \in \Gamma - \langle r \rangle$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $r^{n+1} < |x| < r^n$. Alors $y = xp^n \in B$ et $x = yp^n$ ce qui montre $x \in \langle B \rangle$.

2.2. **Corps profondément ramifiés.**

Proposition 2.5. *Soit K un corps valué complet de caractéristique 0 dont la valuation est de rang 1 et le corps résiduel de caractéristique $p > 0$.*

Soit K^s une cloture séparable de K, et K^{s+} l'anneau des entiers pour une valuation sur K^s qui prolonge celle de K.

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Omega_{K^{s+}/K^+} = 0$.

(i') *Le K^+-module $\Omega_{K^{s+}/K^+} = 0$ est presque nul.*

(ii) *Le morphisme de presqu'anneaux :*

$$K^{+a} \to K^{s+a}$$

est presqu'étale.

(iii) *La valuation de K est non discrète et le morphisme de Frobenius :*

$$\phi_K : K^+/(p) \to K^+/(p), x \mapsto x^p$$

est surjectif.

(iii') *La valuation de K est non discrète et il existe $\omega \in K^+$ tel que $|p| \leq |w| < 1$ tel que le morphisme :*

$$\phi'_K : K^+/(w) \to K^+/(w), x \mapsto x^p$$

est surjectif.

indication de preuve. Les implications (i) $\Rightarrow$ (i') et (ii) $\Rightarrow$ (i') sont évidentes.

Notons ensuite que si $K = K^s$, alors l'assertion (iii) est vraie. On en déduit les implications suivantes :

(i') $\Rightarrow$ (i). En effet, de la remarque précédente il vient que pour tout $x \in K^{s+}$, il existe $y, z \in K^{s+}$ tels que

$$x = y^p + z.p$$

ce qui implique $dx = pd(y^{p-1}) + p.dz$. Autrement dit, dx est p-divisible et il en résulte que le K^+-module Ω_{K^{s+}/K^+} est p-divisible. L'implication en résulte.

(ii) $\Rightarrow$ (iii') : notons que (i), et donc aussi (ii) d'après ce que l'on vient de montrer, implique que la valuation sur K est non discrète. On utilise alors le résultat suivant vraie sous l'hypothèse (ii) : le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} K^+/(p) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_K"'] & K^{s+}/(p) \arrow[d, "\phi_{K^s}"] \\ K^+/(p) \arrow[r] & K^{s+}/(p) \end{tikzcd}$$

est presque cocartésien. On en déduit que ϕ_K est un presqu'épimorphisme : pour tout $\epsilon \in \mathcal{M}_K$, pour tout $x \in K^+$, il existe $y \in K^+$ tel que :

$$\epsilon.x - y^p = 0 \mod p$$

Considérons un élément $\epsilon \in \mathcal{M}_K$ tel que :

$$\epsilon = u^p, |\epsilon| > |p|.$$

Supposons que $1 > |x| > |\epsilon^{-1}.p|$. On trouve donc $y \in K^+$ tel que :

$$u^p.x - y^p = 0 \mod p \Rightarrow x - (u^{-1}.y)^p = 0 \mod (\epsilon^{-1}.p).$$

Or $|u^{-1}.y|^p = |x| > 1$. On en déduit $u^{-1}.y \in K^+$. On a donc montré que l'on peut prendre $\omega = \epsilon^{-1}.p$ pour réaliser (iii'). $\square$

Remarque 2.6. Le théorème de pureté de Faltings : supposons K perfectoïde.

Alors, pour toute extension finie séparable E/K, la cloture intégrale de K^+ dans E est presqu'étale sur K^+ – *i.e.* E^+/K^+ est presqu'étale où $E^+ = K^{s+} \cap E$.

C'est essentiellement l'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Remarque 2.7. Quand les conditions équivalentes de la proposition précédente sont vérifiées, Gabber et Ramero disent que K est profondément ramifié (cf [GR03, Def. 6.6.1, Prop. 6.6.2, 6.6.4]).

Dans le cas d'un anneau de valuation discrète, le terme de "corps profondément ramifiés" a été introduite par Coates et Greenberg. Ce n'est évidemment pas la même notion que celle utilisée par Gabber et Ramero.

Il semble plausible que si K est un corps valué de valuation non discrète de rang 1 les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) K est profondément ramifié au sens précédent.

(ii) pour tout sous-anneau de valuation discrète $\mathbb{Q}_p \subset V \subset K$, il existe un anneau de valuation discrète $V' \subset K$ qui est profondément ramifié au sens de Coates-Greenberg contenant V.

Ainsi, le corps K est profondément ramifié au sens généralisé s'il est réunion filtrante de corps locaux profondément ramifiés au sens de Coates-Greenberg.

2.3. **Basculement.**

Définition 2.8. Soit X un anneau (resp. monoïde) et ψ un endomorphisme de X. On note $\varprojlim_{\psi} X$ la limite projective dans la catégorie des anneaux (resp. monoïdes) de la suite de morphismes constante égale à ψ en chaque degré :

$$X \xrightarrow{\psi} X \to \ldots \to X \xrightarrow{\psi} X \to \ldots$$

2.9. On fixe un corps perfectoïde K ainsi qu'un élément $\varpi \in K$ tel que

$$|p| \leq |\varpi| < 1.$$

On pose :

$$K^{\flat+} = \varprojlim_{\phi_K} K^+/\varpi.$$

Autrement dit :

$$K^{\flat+} = \left\{(\bar{x}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (K^+/\varpi)^{\mathbb{N}} | \bar{x}_i = \bar{x}_{i+1}^p\right\}.$$

Il est clair que $K^{\flat+}$ est un anneau parfait de caractéristique p.

2.10. Fixons un entier $n \geq 0$. Considérons le morphisme multiplicatif canonique :

$$K^+ \to K^+ \to K^+/\varpi^{n+1}, x \mapsto (x^{p^n} \mod \varpi^{n+1})$$

Du fait que $n+1 \leq p^n$, on en déduit un morphisme

$$\alpha_n : K^+/\varpi \to K^+/\varpi^{n+1}$$

qui est même un morphisme d'anneaux. Notons par ailleurs que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} K^+/\varpi \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\phi_K"'] & K^+/\varpi^{n+1} \arrow[d] \\ K^+/\varpi \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] & K^+/\varpi^{n+2} \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de droite est la projection canonique. On a ainsi obtenu un morphisme de tours d'anneaux : prenant sa limite projective, on en déduit un morphisme d'anneaux :

$$K^{\flat +} = \varprojlim_{\phi_K} K^+ \longrightarrow \varprojlim_{n \geq 0} K^+/\varpi^{n+1} = K^+. \tag{6}$$

Définition 2.11. Avec les notations précédentes, si x est un élément de $K^{\flat +}$, on note $x^\sharp$ son image par le morphisme (6).

Exemple 2.12. Concrètement, considérant un élément

$$x = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots) \in K^{\flat +}$$

on définit $x^\sharp$ comme suit. Soit x_n un relèvement de $\bar{x}_n$ dans K^+. Alors :

$$x^\sharp = \varinjlim_{n \to +\infty} x_n^{p^n}.$$

2.13. Considérons l'application $\phi'_K : K^+ \to K^+, x \mapsto x^p$. C'est un morphisme de monoïde pour la multiplication. De plus, le diagramme de monoïdes suivant est évidemment commutatif :

$$\begin{tikzcd} K^+ \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_K"'] & K^+/\varpi \arrow[d, "\phi_K"] \\ K^+ \arrow[r] & K^+/\varpi \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont données par la projection canonique.

Lemme 2.14. *Alors, le diagramme précédent induit un isomorphisme de monoïdes :*

$$\rho : \varprojlim_{\phi'_K} K^+ \to K^{\flat +}$$

avec pour réciproque le morphisme :

$$K^{\flat +} \to \varprojlim_{\phi'_K} K^+, x \mapsto (x^\sharp, (x^{1/p})^\sharp, \dots)$$

Ce lemme résulte des constructions précédentes.

Notons qu'on en déduit que le monoïde multiplicatif sous-jacent à $K^{\flat +}$ ne dépent pas du choix de ϖ.

2.15. D'après le lemme 2.4, il existe $\varpi_1 \in K^+$ tel que $|\varpi_1|^p = |\varpi|$. Du fait que ϕ_K est surjectif, il existe un élément de la forme

$$\varpi^\flat = (0, \overline{\varpi}_1, \dots)$$

dans $K^{\flat +}$.

Lemme 2.16. *Avec les notations qui précèdent,* $|(\varpi^\flat)^\sharp| = |\varpi|$.

C'est évident d'après la définition de $?^\sharp$. Un élément $\varpi^\flat$ satisfaisant la condition du lemme précédent est appelé un *paramètre local* (sous-entendu de $K^{\flat +}$).

Définition 2.17. Avec les notations précédentes, on défini un anneau

$$K^\flat := K^{\flat +}[(\varpi^\flat)^{-1}]$$

et on l'appelle le tilt du corps perfectoïde K.

Notons les faits évidents suivants :
- $K^\flat$ est un anneau parfait de caractéristique p.
- D'après le lemme 2.14, le monoïde multiplicatif sous-jacent à $K^\flat$ est indépendant du choix de ϖ.

– Si K est de caractéristique p, $K^\flat = K$.

2.18. Par ailleurs, l'application multiplicative (6) s'étend en un morphisme de monoïdes multiplicatifs :

$$K^\flat \to K, x \mapsto x^\sharp. \tag{7}$$

Proposition 2.19. *Considérons les notations de la définition précédente.*

Alors $K^{\flat+}$ est un anneau de valuation complet de corps des fractions $K^\flat$.

De plus, le morphisme (6) induit un isomorphisme d'anneaux

$$K^{\flat+}/\varpi^\flat \xrightarrow{\sim} K^+/\varpi. \tag{8}$$

A fortiori, il permet d'identifier le corps résiduel de $K^{\flat+}$ avec celui de K^+.

Démonstration. L'application multiplicative (6) permet de définir une valuation sur $K^{\flat+}$:

$$x \mapsto |x^\sharp|.$$

Par ailleurs, on déduit du lemme 2.14 que $K^{\flat+}$ est complet pour cette valuation.

Notons enfin que le morphisme (7) est évidemment injectif. On vérifie facilement qu'il est surjectif. Il en résulte que $K^\flat$ est un corps. Comme il est obtenu à partir de $K^{\flat+}$ en inversant un élément, c'est nécessairement le corps des fractions de $K^{\flat+}$. □

Exemple 2.20. Supposons que K est le complété du corps valué $\mathbb{Q}_p\big(p^{1/p^\infty}\big)$ (exemple 2.3). Alors on obtient $K^\flat = \mathbb{F}_p((t))[t^{1/p^\infty}]$ où t correspond à l'élément suivant de $K^\flat = \varprojlim_{\phi_K} K^+/p$:

$$(p, p^{1/p}, p^{1/p^2}, \ldots).$$

On peut prendre pour la construction $\varpi = p$ et le paramètre local de $K^{\flat+}$: $\varpi^\flat = t$. On obtient bien en effet :

$$K^+/\varpi = \mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]/p = \mathbb{F}_p[t^{1/p^\infty}]/t = K^{\flat+}/\varpi^\flat.$$

où l'on identifie p^{1/p^n} à t^{1/p^n}.

Notons aussi que le morphisme $K^\flat \to K$ vérifie bien (cf example 2.12) :

$$(3+t^5)^\sharp = \varinjlim_{n\to+\infty} (3+p^{5/p^n})^{p^n}.$$

La théorie de Scholze permet d'identifier le groupe de Galois absolu de K et celui de $K^\flat$. Notons dans cette direction le résultat suivant :

Proposition 2.21. *Soit K un corps perfectoïde. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *K est algébriquement clos.*

(ii) *$K^\flat$ est algébriquement clos.*

Démonstration. On montre (ii) implique (i).

Pour montrer que K est algébriquement clos, il suffit de montrer que tout polynôme irréductile unitaire f à coefficients dans K^+ admet une racine.

Soit d le degré de f. Notons que $|K^\times| = |K^{\flat\times}|$: comme $K^\flat$ est algébriquement clos, ce groupe est donc $\mathbb{Q}$-divisible. En particulier, il existe $u \in K^+$ tel que $|f(0)| = |u^d|$. Notons que f étant irréductible, le polygone de Newton de f est une droite : il en résulte que $f_0(t) = u^{-d}.f(u.t)$ est à coefficients dans K^+. Quitte à remplacer f par f_0, on peut supposer que $|f(0)| = 1$.

Rappelons que $K^+/\varpi = K^{\flat+}/\varpi^\flat$. On peut donc trouver un polynôme g à coefficients dans $K^{\flat+}$ tel que :

$$f \mod \varpi = g \mod \varpi^\flat.$$

Soit y_0 une racine de g. Alors, $f(y_0^\sharp) = 0 \mod \varpi$, ce qui implique :

$$|f(y_0^\sharp)| \leq \varpi.$$

Considérons un élément $u_1 \in K^+$ tel que $|f(y_0^\sharp)| = |u_1^d|$. Le polynôme $f(t + y_0^\sharp)$ est encore irréductible. Son polygone de Newton est donc une droite et le polynôme $f_1(t) = u_1^{-d} f(u.t + y_0^\sharp)$ en t est à coefficients dans K^+.

Si on reprend la construction précédente avec le polynôme f_1, on obtient $y_1 \in K^{\flat +}$ tel que

$$|f(u_1.y_1^\sharp + y_0^\sharp)| \leq |\varpi|^2$$

Donc, en itérant le procédé et en utilisant le fait que K^+ est complet, on obtient une racine de f. □

2.4. **Théorème principal.**

Théorème 2.22. *Soit K un corps perfectoïde.*

Alors le foncteur canonique :

$$K^{+a}_{f\acute{e}t} \to K_{f\acute{e}t}, M \mapsto M_* \otimes_K^+ K$$

est une équivalence de catégorie entre les revêtements finis étales du presqu'anneau K^{+a} et les revêtements finis étales de K.

Remarque 2.23. Notons que ce théorème est essentiellement ce que nous avons appelé le « théorème de pureté de Faltings »(cf Remarque 2.6).

Il a donc été démontré par Faltings, généralisé et redémontré par Gabber et Ramero. Scholze va en fait donner une nouvelle généralisation de la théorie de Gabber et Ramero (et redémontré ce théorème).

On en déduit le théorème de comparaison attendu :

Corollaire 2.24. *Soit K un corps perfectoïde, $K^\flat$ son tilt et $\varpi^\flat \in K^{\flat +}$ un paramètre local.*

Alors, les foncteurs suivants sont des équivalences de catégories :

$$K_{f\acute{e}t} \xleftarrow[(1)]{\sim} K^{+a}_{f\acute{e}t} \xrightarrow[(2)]{\sim} (K^{+a}/\varpi)_{f\acute{e}t} \xrightarrow{\sim} (K^{\flat +a}/\varpi^\flat)_{f\acute{e}t} \xleftarrow[(2)]{\sim} (K^{\flat +a})_{f\acute{e}t} \xrightarrow[(1)]{\sim} K^\flat_{f\acute{e}t}$$

La flèche (1) est l'équivalence de catégories du théorème précédent. Pour la flèche (2), on rappel le résultat suivant :

Proposition 2.25. *Soit A une K^{+a}-algèbre et ϖ un presqu'élément de A tel que A est complet pour la topologie ϖ-adique :*

$$A = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A/\varpi^n.$$

Posons $A_0 = A/\varpi$.

Alors, le foncteur $B \mapsto B \otimes_A A_0$ induit une équivalence de catégories

$$A_{f\acute{e}t} \to (A_0)_{f\acute{e}t}$$

Indication de preuve. La preuve est la même que dans le cas classique.

On considère la tour des quotients successifs :

$$A/\varpi \to A/\varpi^2 \to \ldots \to A/\varpi^n \to$$

et on se ramène à montrer inductivement que toute A/ϖ^n-algèbre B_n presque finie étale se relève en une A/ϖ^{n+1}-algèbre presque finie étale B_{n+1} et on montre que

$$B = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

est une A-algèbre presque fini étale (il est clair alors que $B \otimes_A A_0 = B_0$).

On est donc ramené à montrer la proposition dans le cas où $\varpi^2 = 0$ – on peut le faire plus généralement pour un idéal I nilpotent quelconque. Pour cela, Gabber et Ramero associent à une extension de presqu'anneaux B/A un complexe cotangent [5] :

$$L_{B/A}$$

dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}(B)$ qui généralise la théorie déjà connue dans le cas classique :

– lien avec les différentielles : $H_0(L_{B/A}) = \Omega_{B/A}$.
– lien avec les dérivations : $\mathrm{Ext}^0(L_{B/A}, M) = Der_A(B, M)$.
– lien avec les extensions : $\mathrm{Ext}^1(L_{B/A}, M) = Exal_A(B, M)$.
– Pour des extension C/B et B/A, on obtient un triangle distingué :

$$C \otimes_B L_{B/A} \to L_{C/A} \to L_{C/B} \xrightarrow{+1}$$

A partir de là, la théorie des obstructions aux relèvements infinitésimaux des presqu'algèbres plates se met en place comme dans le cas classique. Des propriétés différentielles des A-algèbres presqu'étales B (rappelons notamment $\Omega_{B/A} = 0$), on déduit qu'il n'y a pas d'obstruction au relèvement d'une A_0-algèbre étale B_0. Si B_0/A_0 est projectif fini presqu'étale, on en déduit que le relèvement B est projectif fini presqu'étale (le point délicat est de montrer que B/A est encore presque de présentation finie).

Il en est de même pour la théorie de l'obstruction au relèvement des morphismes, ce qui permet d'en déduire non seulement l'essentielle surjectivité du foncteur mais encore sa pleine fidélité. $\square$

3. Algèbres perfectoïdes et basculement

On fixe un corps perfectoïde K, ainsi qu'un paramètre local $\varpi^\flat$ de $K^\flat$. On pose $\varpi = (\varpi^\flat)^\sharp$. Notons que pour tout n, ϖ admet un racine p^n-ème :

$$\varpi^{1/p^n} = [(\varpi^\flat)^{1/p^n}]^\sharp.$$

3.1. Définition.

Définition 3.1. On définie les catégories suivantes :

(1) $\underline{K\text{-Perf}}$: sous-catégorie pleine des K-algèbres formée des K-algèbres de Banach R telles que :
   – l'ensemble R^+ des éléments de puissance borné est ouvert et fermé.
   – le morphisme de Frobenius $\phi_R : R^+/\varpi \to R^+/\varpi$ est surjectif.

(2) $\underline{K^{+a}\text{-Perf}}$: sous-catégorie pleine des K^{+a}-algèbres formée des K^{+a}-algèbres A telles que :
   – A est plate sur K^{+a} et ϖ-adiquement complète.
   – Le morphisme de Frobenius induit un isomorphisme :
   $$A/\varpi^{1/p} \xrightarrow{\sim} A/\varpi.$$

(3) $\underline{K^{+a}/\varpi\text{-Perf}}$: sous-catégorie pleine des K^{+a}/ϖ-algèbres formée des K^{+a}-algèbres $\bar{A}$ telle que :
   – $\bar{A}$ est plate sur K^{+a}/ϖ.
   – Le morphisme de Frobenius induit un isomorphisme :
   $$\bar{A}/\varpi^{1/p} \xrightarrow{\sim} \bar{A}/\varpi.$$

5. En fait, pour obtenir cette théorie, ils introduisent une extension de vraix anneaux $B_{!!}/A_{!!}$ déduite de celle de B/A et définissent le complexe cotangent comme un complexe de $B_{!!}$-modules. Il n'y a pas de mal à appliquer le foncteur q^* à ce complexe et à obtenir le complexe $L_{B/A}$ dont on parle ci-dessus – n'oublions pas que q^* est exact.

Dans chaque cas, un objet de la catégorie considérée satisfaisant les conditions demandées est dit *perfectoïde.*

On peut alors énoncer un analogue du corollaire 2.24 :

Théorème 3.2. *Considérons les notations de la définition précédente. Alors, on obtient des équivalences de catégories de la forme suivante :*

$$K\text{–Perf} \underset{(1)}{\simeq} K^{+a}\text{–Perf} \underset{(2)}{\xrightarrow{\sim}} (K^{+a}/\varpi)\text{–Perf} \xrightarrow{\sim} (K^{\flat+a}/\varpi^{\flat})\text{–Perf} \underset{(2)}{\xleftarrow{\sim}} (K^{\flat+a})\text{–Perf} \underset{(1)}{\simeq} K^{\flat}\text{–Perf}$$

où la flèche du milieu est induite par l'isomorphisme (8) *et les flcèhes (2) sont données respectivement par la réduction modulo ϖ et $\varpi^{\flat}$.*

Indication de preuve. Dans le cas de K, on obtient l'équivalence du type (1) en considérant les foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre suivants :
- À une K-algèbre perfectoïde R, on associe la K^{+a}-algèbre R^a dont on vérifie facilement qu'elle est perfectoide.
- À une K^{+a}-algèbre perfectoïde A, on associe la K-algèbre $R = A_*[\varpi^{-1}]$. On munit cette dernière de la structure de K-algèbre de Banach pour laquelle A_* est l'ensemble des éléments de puissance bornée. On vérifie que R est perfectoïde.

Le reste de cette section est consacré à montrer que les foncteurs du type (2) sont des équivalences. □

3.3. Soit R une $\mathbb{F}_p$-algèbre. On note $R_{(\phi)}$ la R-algèbre R avec pour morphisme structural le morphisme de Frobenius $\phi : R \to R, x \mapsto x^p$.

Rappelons qu'on associe à toute extension S/R de $\mathbb{F}_p$-algèbres un morphisme de Frobenius relatif :

$$\phi_{S/R} : R_{(\phi)} \otimes_R S \to S_{(\phi)}$$

induit par la propriété universelle du produit tensoriel. Quitte à prendre une résolution plate de $R_{(\phi)}$ sur R, on en déduit un morphisme de Frobenius relatif dérivé :

$$\phi_{S/R*} : R_{(\phi)} \otimes^{\mathrm{L}}_R S \to S_{(\phi)}$$

dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}(R)$. Un des points clés pour montrer que (2) est une équivalence est le fait suivant :

Proposition 3.4. *Soit S/R une extension de $\mathbb{F}_p$-algèbres telle que $\phi_{S/R*}$ est un isomorphisme.*

Alors, le complexe cotangent $L_{S/R}$ est acyclique.

Notons aussi que si S/R est de présentation finie, Le fait que le Frobenius relatif $\phi_{S/R}$ est un isomorphisme équivaut à dire que S/R est étale (cf SGA5, XIV, prop. 2). Donc le complexe cotangent $L_{S/R}$ est bien nul comme on la déjà vu. Pour notre propos, on a besoin du cas plus général, sans condition de finitude.

Démonstration. Notons que l'hypothèse montre d'emblée que le morphisme canonique

$$R_{(\phi)} \otimes_R L_{S/R} \xrightarrow{\sim} L_{S_{(\phi)}/R_{(\phi)}} = L_{S/R}.$$

est un isomorphisme (cf [Dég11, Prop. 3.6]).

Or on peut calculer ce quasi-isomorphisme. Soit $P_\bullet$ la résolution libre standard R-module S. On peut calculer le morphisme de Frobenius relatif

$$\phi_{S_\bullet/R} : R_{(\phi)} \otimes_R S_\bullet \to (S_\bullet)_{(\phi)}.$$

En degré n, on peut écrire $S_n = R[X_i, i \in I]$ pour un certain ensemble i et le morphisme $\phi_{S_\bullet/R}$: alors $\phi_{S_n/R}$ est le morphisme de $R_{(\phi)}$-modules qui envoie X_i sur X_i^p.

Il en résulte que le morphisme induit :

$$R_{(\phi)} \otimes_R \Omega_{S_\bullet/R} \to \Omega_{(S_\bullet)_{(\phi)}/R_{(\phi)}}$$

est nul puisque $d(X_i^p) = p.d(X_i^{p-1}) = 0$. Or ce morphisme n'est autre que l'isomorphisme considéré au début de la preuve. $\square$

Corollaire 3.5. *Soit $\bar{A}$ une K^{+a}/ϖ-algèbre perfectoïde. Alors, $L_{\bar{A}/K^{+a}/\varpi} = 0$.*

Les hypothèses faites sur $\bar{A}$ sont exactement celles dont on a besoin pour appliquer la proposition précédente (dans le monde des presque-anneaux).

A l'aide de ce corollaire, on termine la preuve du théorème 3.2 selon la méthode qu'on a déjà vue dans la démonstration de la proposition 2.25.

Définition 3.6. Si R est une K-algèbre perfectoïde, on note $R^\flat$ la $K^\flat$-algèbre perfectoïde qui lui correspond par l'équivalence de catégories du théorème 3.2. On l'appelle le basculement de R.

Si S est une $K^\flat$-algèbre perfectoïde, on note $S^\sharp$ la K-algèbre perfectoïde qui lui correspond par l'équivalence de catégories du théorème 3.2. On l'appelle l'anti-basculement de S.

Remarque 3.7. On peut voir qu'une K-algèbre pefectoïde R est un corps si et seulement si son tilt $R^\flat$ est un corps.

Exemple 3.8. Si K est un corps perfectoïde, on pose :

$$K\langle T_1^{1/p^\infty}, \ldots, T_n^{1/p^\infty}\rangle = \left(K^+[T_1^{1/p^\infty}, \ldots, T_n^{1/p^\infty}]\right)^\wedge[\varpi^{-1}].$$

Alors,

$$\left(K\langle T_1^{1/p^\infty}, \ldots, T_n^{1/p^\infty}\rangle\right)^\flat = K^\flat\langle T_1^{1/p^\infty}, \ldots, T_n^{1/p^\infty}\rangle$$

3.9. Considérons maintenant une K-algèbre perfectoïde R. Reprenant chaque équivalence du théorème 3.2, on lui associe une suite d'algèbres perfectoïdes :

$$A, \bar{A}, A^\flat, R^\flat$$

au-dessus respectivement de

$$K^{+a}, K^{+a}/\varpi, K^{\flat+a}/\varpi^\flat, K^{\flat+a}, K^\flat.$$

Lemme 3.10. *Avec les notations qui précèdent, si $\bar{B}$ est une $\bar{A}$-algèbre finie étale, alors $\bar{B}$ est une K^{+a}/ϖ-algèbre perfectoïde.*

Le fait que $\bar{B}$ soit plate sur K^{+a}/ϖ est triviale. Le fait que le morphisme de Frobenius qui lui correspond soit un isomorphisme n'est pas évident (cf [GR03, 3.5.13, ii]).

Remarque 3.11. C'est un des seuls endroits de [GR03] où les auteurs citent précisément un résultat de Faltings.

3.12. Reprenons les notations du paragraphe 3.9. D'après le lemme précédent et le théorème 3.2, on obtient un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
R_{\text{fét}} & A_{\text{fét}} \arrow[l] \arrow[r, "(*)"] & \bar{A}_{\text{fét}} \arrow[d, hook] & A^\flat_{\text{fét}} \arrow[l, "(*)"'] \arrow[r] & R^\flat_{\text{fét}} \\
K\text{-Perf} & K^{+a}\text{-Perf} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & (K^{+a}/\varpi)\text{-Perf} & (K^{\flat+a})\text{-Perf} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & K^\flat\text{-Perf}
\end{tikzcd}$$

La proposition 2.25 montre que les flèches labellisées $(*)$ sont des équivalences de catégories. On peut donc compléter le diagramme précédent en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
R_{\text{fét}} & A_{\text{fét}} \arrow[l, "(1)"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \bar{A}_{\text{fét}} \arrow[d, hook] & A^\flat_{\text{fét}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "(2)"] \arrow[d, hook] & R^\flat_{\text{fét}} \\
K-\text{Perf} & K^{+a}-\text{Perf} \arrow[l, "(1')"', "\sim"] \arrow[r, "\sim"'] & (K^{+a}/\varpi)-\text{Perf} & (K^{\flat+a})-\text{Perf} \arrow[l, "\sim"] \arrow[r, "(2')", "\sim"'] & K^\flat-\text{Perf}
\end{tikzcd}$$

et les flèches verticales sont toutes pleinement fidèles. Par définition, la flèche (1) (resp. (2)) est la restriction de la flèche (1) (resp. (2')). Elle est donc pleinement fidèle.

Proposition 3.13. *La flèche (2) dans le diagramme ci-dessus est une équivalence de catégories.*

Plus généralement, si K est de caractéristique p : pour toute K-algèbre perfectoïde R et toute R-algèbre finie étale S, on a :
- *S est une K-algèbre perfectoïde,*
- *S^{+a} est fini étale et uniformément projectif fini sur R^{+a}.*

Corollaire 3.14. *Avec les notations du paragraphe 3.12, il existe un foncteur canonique pleinement fidèle :*

$$?^\sharp : R^\flat_{\textit{fét}} \to R_{\textit{fét}}$$

qui à une $R^\flat$-algèbre étale T associe son anti-basculement $T^\sharp$.

De plus, l'image essentielle de ce foncteur est formée par les recouvrements étales S/R tels que S est perfectoïde et S^{+a}/R^{+a} est finie étale.

Ce foncteur préserve les degrés des revêtements.

On montrera dans les exposés suivants que ce foncteur est toujours une équivalence de catégories. Pour l'instant on se contente du résultat suivant qui termine la démonstration du théorème 2.22 et donc de son corollaire.

Lemme 3.15. *Le foncteur du corollaire précédent, dans le cas $R = K$, est essentiellement surjectif.*

Démonstration. Soit M le complété d'une cloture algébrique de $K^\flat$. Alors M est corps complet et parfait : il est donc perfectoïde, vu comme $K^\flat$-algèbre. Soit $M^\sharp$ son anti-basculement, qui est une K-algèbre perfectoïde. Alors d'après la remarque 3.7 et la proposition 2.21, $M^\sharp$ est un corps algébriquement clos.

Soit $L/K^\flat$ une extension finie incluse dans M. Alors, appliquant à nouveau la remarque 3.7, $L^\sharp$ est un corps. On a donc obtenue une tour d'extension :

$$K^\flat \subset L^\sharp \subset M^\sharp,$$

avec $L^\sharp/K^\flat$ une extension finie. On pose :

$$N = \cup_L L^\sharp \subset M^\sharp.$$

Alors N est un sous-corps dense de $M^\sharp$. On déduit du lemme de Krasner qu'il est algébriquement clos.

En particulier, toute extension finie F/K s'envoie dans N, donc dans l'un des $L^\sharp$ pour une extension finie L, que l'on peut supposer Galoisienne. Comme le foncteur $?^\sharp$ préserve les degrés et les automorphismes, $L^\sharp$ est encore Galoisienne et de plus $Gal(L^\sharp/K) = Gal(L/K^\flat)$.

Le corps F correspond à un sous-groupe H de $Gal(L^\sharp/K)$. On définit $F^\flat$ comme le sous-corps de L correspond au sous-groupe $H \subset Gal(L/K^\flat)$. $\square$

Références

[CD09] D.-C. Cisinski and F. Déglise. Local and stable homological algebra in Grothendieck abelian categories. *HHA*, 11(1) :219–260, 2009.

[Dég11] F. Déglise. Complexe cotangent. `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`, 2011.

[GR03] Ofer Gabber and Lorenzo Ramero. *Almost ring theory*, volume 1800 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Sch11] P. Scholze. Notes on perfectoid spaces. `http://www.ihes.fr/~abbes/CAGA/PerfectoidSpaces.pdf`, 2011.