Table des matières

Cours X. Diviseurs et isogénies 1
X.1. Théorème du cube 1
X.1.a. Rigidifications 1
X.1.b. Correspondances divisorielles 2
X.1.c. Preuve et applications 3
X.2. Isogénies 6
X.2.a. Définition 6
X.2.b. Degré d'une isogénie 8
X.2.c. La relation d'isogénie 9
Références 11

COURS X
DIVISEURS ET ISOGÉNIES

X.1. Théorème du cube

X.1.a. Rigidifications. —

Définition X.1.1. — Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas muni d'une section : $e : S \to X$.

Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On appelle *rigidification* de $\mathcal{L}$ le long de e tout isomorphisme de la forme :

$$\alpha : \mathcal{O}_S \to e^*(\mathcal{L}).$$

On dit encore que $(\mathcal{L}, \alpha)$ est un faisceau rigidifié le long de e.

Un morphisme de faisceaux rigidifiés $u : (\mathcal{L}, \alpha) \to (\mathcal{L}', \alpha')$ est la donnée d'un mophisme u de $\mathcal{O}_X$-module compatible aux rigidifications : $e^*(u) \circ \alpha = \alpha'$.

On note $\mathrm{Pic}_e(X)$ le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(X)$ formé des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles rigidifiés le long de e.

La terminologie vient du fait suivant :

Proposition X.1.2. — *Considérons les notations de la définition précédente et supposons $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$.*

Alors, pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible rigidifié $(\mathcal{L}, \alpha)$,

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}) = \{Id\}.$$

Démonstration. — En effet, soit a un automorphisme de $\mathcal{L}$. Alors, a est un élément inversible de l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. L'hypothèse $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$ montre que

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(S, f_*(\mathcal{O}_X)) \simeq \Gamma(S, \mathcal{O}_S).$$

On peut donc supposer que $a \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$.

Mais alors, a est un automorphisme du faisceau rigidifié $(\mathcal{L}, \alpha)$ car l'homothetie de coefficient a commute au morphisme de $\mathcal{O}_S$-module α. Ainsi, a définit un automorphisme du $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{O}_S$, ce qui implique $a = 1$. □

X.1.3. — Rappelons que pour un S-schéma X de type fini, S noethérien, on a défini en VI.1.12 le foncteur de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ de X/S comme le faisceau fppf sur $\mathscr{S}ch_S$ associé au préfaisceau :

$$\underline{\mathrm{Pic}}'_{X/S} : T/S \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)/\mathrm{Pic}(T).$$

On pose $\mathrm{Pic}_S(X) = \Gamma(X, \underline{\mathrm{Pic}}_S(X))$.

On obtient donc un suite courte (non nécessairement exacte) de morphismes :

$$0 \to \mathrm{Pic}(S) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}_S(X) \to 0 \tag{X.1}$$

Rappelons la remarque VI.1.13 :

– si $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$, la suite (X.1) est exacte à droite.

– si de plus f admet une section e, π est un épimorphisme.

La proposition précédente nous permet de montrer :

Corollaire X.1.4. — *Sous les conditions du paragraphe précédent, le morphisme suivant :*

$$\mathrm{Pic}_e(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}_S(X)$$

est un isomorphisme.

Ainsi, la suite (X.1) *est exacte et e en induit une section.*

On a déjà vu que, d'après un théorème de Grothendieck rappelé en VI.1.16, le foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ est représentable dès que X/S est projectif, plat et géométriquement intègre. Malheureusement, un S-schéma abélien n'est pas projectif en général, sauf dans les cas suivants :

– S est le spectre d'un corps (voir théorème XI.1.2 du cours suivant) ;

– (plus généralement) S est un schéma normal (théorème attribué à Grothendieck, cf [**Ray70**]).

Toutefois, M. Raynaud a généralisé le théorème de Grothendieck au cas des S-schémas abéliens arbitraires.

***Théorème X.1.5* (Raynaud)**. — *Si A est un S-schéma abélien, le foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$ est représentable par un S-schéma propre.*

On renvoie à [**FC90**, Th. 1.9] pour la preuve.

X.1.b. Correspondances divisorielles. —

X.1.6. — Soit X_1 et X_2 des S-schémas, $p_1 : X_1 \times_S X_2 \to X_1$ et $p_2 : X_1 \times_S X_2 \to X_2$ les projections canoniques.

On appelle *pseudo-S-correspondance divisorielle* de X_1 vers X_2 tout élément $\mathcal{L}$ de $\mathrm{Pic}(X_1 \times_S X_2)$. On dit que $\mathcal{L}$ est *dégénérée* si elle appartient à l'image du morphisme :

$$(p_1^*, p_2^*) : \mathrm{Pic}(X_1) \times \mathrm{Pic}(X_2) \to \mathrm{Pic}(X_1 \times_S X_2). \tag{X.2}$$

On note $\mathrm{Cor}'_S(X_1, X_2)$ le conoyau de ce morphisme, classe des correspondances divisorielles non dégénérées.

La théorie des foncteurs de Picard nous amène à la définition suivante (due à Raynaud) :

Définition X.1.7. — On appelle *foncteur des S correspondances divisorielles de X_1 vers X_2* le faisceau fpqc sur $\mathscr{S}ch_S$ associé au préfaisceau suivant :

$$T \mapsto \mathrm{Cor}'_T(X_1 \times_S T, X_2 \times_S T).$$

On le note $\underline{\mathrm{Cor}}_S(X_1, X_2)$ et on pose : $\mathrm{Cor}_S(X_1, X_2) = \Gamma\big(S, \underline{\mathrm{Cor}}_S(X_1, X_2)\big)$.

Par définition du foncteur de Picard, on dipose donc d'un morphisme canonique de faisceau fpqc sur S :

$$\underline{\mathrm{Pic}}_S(X_1 \times_S X_2) \to \underline{\mathrm{Cor}}_S(X_1, X_2)$$

qui induit en considérant les sections globalse un morphisme canonique :

$$\chi : \mathrm{Pic}_S(X_1 \times_S X_2) \to \mathrm{Cor}_S(X_1, X_2)$$

Remarque X.1.8. — Dans le cas où $S = \mathrm{Spec}(k)$, et X_1 et X_2 sont des courbes propres, lisses géométriquement intègres sur k, le groupe $\mathrm{Cor}_S(X_1, X_2)$ a été introduit par Weil dans son étude des fonctions zêta associées à des courbes algébrique sur un corps fini.

Proposition X.1.9. — *Reprenons les notations de la définition précédente.*

On suppose de plus que pour tout $i = 1, 2$, p_i admet une section e_i et $p_{i*}(\mathcal{O}_{X_i}) = \mathcal{O}_S$. Alors :

1. *La suite suivante est exacte courte :*

$$0 \to \mathrm{Pic}_S(X_1) \times \mathrm{Pic}_S(X_2) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} \mathrm{Pic}_S(X_1 \times_S X_2) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Cor}_S(X_1, X_2) \to 0.$$

2. *Le morphisme composé suivant est un isomorphisme*

$$\mathrm{Pic}_{(e_1,e_2)}(X_1 \times_S X_2) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X_1 \times_S X_2) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}_S(X_1 \times_S X_2) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Cor}_S(X_1, X_2),$$

où le groupe de gauche est formé des $\mathcal{O}_X$-modules inversible $\mathcal{L}$ de $X_1 \times_S X_2$ qui sont rigidifiés par rapport aux deux sections $s_1 := e_1 \times_S X_2$, $s_2 := X_1 \times_S e_2$.

Cela résulte facilement de la remarque VI.1.13 (rappelée dans le paragraphe X.1.3) et du corollaire X.1.4.

On utilisera le théorème suivant dû à Raynaud (cf [**Ray70**, Chap. 4]) :

***Théorème X.1.10* (Raynaud)**. — *Soit X_1 et X_2 deux S-schémas propres, plats et géométriquement intègres.*

Alors $\underline{\mathrm{Cor}}_S(X_1, X_2)$ est représentable par un S-schémas en groupes localement de type fini, net et séparé(1).

X.1.c. Preuve et applications. —

***Théorème X.1.11* (du cube)**. — *Soit I un ensemble fini tel que* $\mathrm{card}(I) \geq 3$.

On considère une famille finie $(f_i : X_i \to S, i \in I)$ de morphismes de schémas propres, plats et géométriquement intègres.

On suppose donné pour tout $i \in I$ une section e_i de f_* et on adopte les notations suivantes :

- $X = \prod_{i \in I} X_i$;
- *pour tout $k \in I$,* $X'_k = \prod_{i \in (I - \{k\})} X_i$;
- *pour tout $k \in I$, on pose* $s_k = e_k \times_S X'_k : X'_k \to X$.

Alors, tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ tel que pour tout $k \in I$, $s_k^*(\mathcal{L}) = \mathcal{O}_{X_k}$ est trivial sur $\mathcal{O}_X$.

Démonstration. — En utilisant une induction sur I, on voit facilement qu'il suffit de traiter le cas $I = \{1, 2, 3\}$.

1. *i.e.* l'immersion diagonale relativement à S est ouverte et fermée. Dans le cas d'un S-schéma en groupes cela revient à demander que la section unité soit ouverte et fermée.

On raisonne sur la classe d'isomorphisme $l \in \mathrm{Pic}(X_{123})$ de $\mathcal{L}$. Il suffit de montrer que $l = 0$. D'après le Corollaire X.1.4 et la Proposition X.1.9, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \mathrm{Pic}(X_3) \arrow[d, "p_{123}^{3*}"] & & \\
 & \mathrm{Pic}(X_{13}) \times \mathrm{Pic}(X_{23}) \arrow[r, "p_{123}^{13*} \times p_{123}^{23*}"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(X_{123}) \arrow[d, "\pi"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}_{X_3}(X_{13}) \times \mathrm{Pic}_{X_3}(X_{23}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}_{X_3}(X_{123}) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & \mathrm{Cor}_{X_3}(X_{13}, X_{23}) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

où les morphismes $p_?^?$ sont les projections évidentes et dans lequel toutes les lignes et les colones sont des suites exactes. On pose $u = \chi\pi(l)$. Par définition, on peut le voir comme une section du faisceau $\underline{\mathrm{Cor}}_S(X_1, X_2)$ au-dessus de X_3, soit un morphisme de faisceau sur $\mathscr{S}ch_S$:

$$u : X_3 \to \underline{\mathrm{Cor}}_S(X_1, X_2).$$

D'après le théorème X.1.10, c'est un morphisme de S-schémas, à valeur dans un S-schéma en groupes net et séparé. La section unité de $\underline{\mathrm{Cor}}_S(X_1, X_2)$ est une partie à la fois ouverte et fermée. On note Z son image réciproque dans X_3.

Par hypothèse, $s_3^*(l) = 0$. Autrement dit, $e_3(S) \subset Z$. Il en résulte que pour tout $s \in S$, la fibre Z_s de Z au-dessus de S est une partie ouverte et fermée de la fibre $(X_3), s$ de X_3 en s. Or comme X_3/S est géométriquement intègre, cette fibre est en particulier connexe, ce qui implique $Z_s = X_{3,s}$. Comme ceci est valable pour tout $s \in S$, on en déduit $Z = X_3$. Ainsi, $u = 0$.

Par ailleurs, appliquant à nouveau la Proposition X.1.9, le morphisme composé suivant est un isomorphisme :

$$\mathrm{Pic}_{(s_1,s_2)}(X_{123}) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X_{123}) \xrightarrow{\chi\pi} \mathrm{Cor}_{X_3}(X_{13}, X_{23}).$$

Comme $s_1^*(l) = 0$ et $s_2^*(l) = 0$, l appartient au sous-groupe source de cet isomorphisme, ce qui conclut. $\square$

X.1.12. — Soit A un S-schéma abélien. Comme A/S est un S-schéma en groupes commutatif (Corollaire VIII.3.14), la loi de groupe de A (comme S-schéma ou comme faisceau) est notée additivement.

On considère les morphismes suivants :

- $p_1, p_2, p_3 : A \times_S A \times_S A \to A \times_S A$, les projections respectives sur les premiers, deuxièmes et troisièmes facteurs ;
- pour tout $1 \leq i < j \leq 3$, $p_{ij} = p_i + p_j$;
- $p_{123} = p_1 + p_2 + p_3$.

Corollaire X.1.13. — *Avec les notations précédentes, pour toute classe* $l \in \mathrm{Pic}(A)$*, on obtient dans* $\mathrm{Pic}(A \times_S A \times_S A)$ *:*

$$p_{123}^*(l) = p_{12}^*(l) + p_{23}^*(l) + p_{13}^*(l) - p_1^*(l) - p_2^*(l) - p_3^*(l).$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème du cube à la famille de S-morphismes à trois éléments tous égaux au morphisme structural $A \to S$, chacun considéré avec la section unité de A/S et à l'élément

$$m = p_{123}^*(l) - p_{12}^*(l) - p_{23}^*(l) - p_{13}^*(l) + p_1^*(l) + p_2^*(l) + p_3^*(l)$$

de $\mathrm{Pic}(A \times_S A \times_S A)$. □

Corollaire X.1.14. — *Soit X un S-schéma et A un S-schéma abélien.*

Alors pour tous S-morphismes $f, g, h : X \to A$ et tout classe $l \in \mathrm{Pic}(A)$, on obtient :

$$(f+g+h)^*(l) = (f+g)^*(l) + (f+h)^*(l) + (g+h)^*l - f^*(l) - g^*(l) - h^*(l).$$

Démonstration. — En effet, cette égalité est l'image inverse de celle du corollaire précédent pour le morphisme : $(f, g, h) : X \times_S X \times_S X \to A \times_S A \times_S A$. □

X.1.15. — Considérons un S-schéma abélien A. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $n_A : A \to A$ la multiplication par n sur le schéma en groupes abéliens A/S.

Définition X.1.16. — Avec les notations qui précèdent, on dit que l est *symétrique* (resp. *anti-symétrique*) si $(-1)_A^*(l) = l$ (resp. $(-1)_A^*(l) = -l$).

Exemple X.1.17. — Soit A un S-schéma abélien. Notons que l'endomorphisme $(-1)_A$ est un idempotent de A/S.

Considérons l'anneau $\mathrm{Pic}(A)[1/2]$ et considérons l'automorphisme $\sigma := (-1)_A^*$ de cet anneau. Cet automorphisme est idempotent : si l'on pose $p_+ = \frac{1}{2}.(1+\sigma)$ et $p_- = \frac{1}{2}.(1-\sigma)$, on obtient deux projecteurs orthogonaux de $\mathrm{Pic}(A)[\frac{1}{2}]$ et une décomposition canonique :

$$\mathrm{Pic}(A)[1/2] = \mathrm{Im}(p_+) \oplus \mathrm{Im}(p_-),$$

et un élément appartient à $\mathrm{Im}(p_+) = \mathrm{Ker}(p_-)$ (resp. $\mathrm{Im}(p_-) = \mathrm{Ker}(p_+)$) si et seulement si il est symétrique (resp. anti-symétrique).

Corollaire X.1.18. — *Pour tout $l \in \mathrm{Pic}(A)$, on obtient :*

$$n_A^*(l) = \left(\frac{n^2+n}{2}\right).l + \left(\frac{n^2-n}{2}\right).(-1)_A^*(l).$$

En particulier,

$$n_A^*(l) = \begin{cases} n^2.l & \text{si } l \text{ est symétrique,} \\ n.l & \text{si } l \text{ est anti-symétrique.} \end{cases}$$

Démonstration. — Si on applique le corollaire précédent appliqué aux morphisme $f = (n+1)_A$, $g = (1)_A$ et $h = (-1)_A$, on obtient la relation suivante :

La formule est trivialement vraie pour $n = 0, 1$. De plus, si elle est vraie pour un entier $n > 0$, elle l'est pour l'entier $-n$.

$$(n+2)^*l - 2(n+1)^*l + n^*l - (1)^*l - (-1)^*l + (0)^*l = 0.$$

Si l'on prend $n = -1$, on obtient $(0)^*l = 0$, ce qui démontre le corollaire dans le cas $n = 0$. Le cas $n = 1$ est clair. Par ailleurs, on vérifie facilement que si la formule est vraie pour $n > 0$, elle l'est pour l'entier $(-n)$.

Il suffit donc de la démontrer par récurrence sur l'entier $n > 1$, ce qui résulte facilement de la formule obtenue précédemment. □

X.1.19. — Soit A un S-schéma abélien et $x : S \to A$ un S-point de A.

On note T_x le morphisme composé :

$$A \xrightarrow{x \times_S A} A \times_S A \to mA, a \mapsto x + a,$$

où m est l'addition de A/S.

Corollaire X.1.20 (Théorème du carré). — *Avec les notations qui précèdent, pour tous S-points x et y de X, et tout élément $l \in \mathrm{Pic}(A)$, on obtient :*

$$T_{x+y}^*(l) = T_x^*(l) + T_y^*(l) - l.$$

Définition X.1.21. — Il résulte du corollaire précédent que pour tout $l \in \mathrm{Pic}(A)$, l'application :

$$\phi_l : A(S) \to \mathrm{Pic}(A), x \mapsto T_x^*(l) - l$$

est un morphisme de groupes abéliens.

Si T est un S-schéma de type fini, en appliquant cette construction à l'élément $l_T \in \mathrm{Pic}(A \times_S T)$ obtenu par image inverse le long de T/S, on déduit de même un morphisme

$$\phi_{l,T} : A(T) = (A \times_S T)(T) \to \mathrm{Pic}(A \times_S T) \to \Gamma(T, \underline{\mathrm{Pic}}_S(A)).$$

Ces morphismes sont naturels en T et on en déduit donc un morphisme de faisceaux abéliens sur $\mathscr{S}ch_S$:

$$\underline{\phi}_l : A \to \underline{\mathrm{Pic}}_S(A).$$

X.2. Isogénies

X.2.a. Définition. —

X.2.1. — Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas.

Rappelons que si f plat de type fini, il est équidimensionnel (cf Exemple VIII.0.3). En particulier, si S est irréductible et s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que la fibre générique de f est équidimensionnelle de n, alors pour tout $s \in S$, la fibre X_s est équidimensionnelle de dimension n.

Si X est un S-schéma abélien, X est equidimensionnel au-dessus de toute composante irréductible de S : en effet, si η est un point générique de S, X_η est connexe et lisse sur $\kappa(\eta)$, donc irréductible.

Définition X.2.2. — Soit B un S-schéam abélien.

On appelle dimension de B/S la fonction $\dim(B/S)$ qui à un point générique η de S associe l'entier $\dim(B_\eta)$.

Remarque X.2.3. —
- Pour tout point $s \in S$ qui est un spécialisation d'un point générique η de S, B_s est un $\kappa(s)$-schéma abélien de dimension $\dim(X/S).\eta$.
- Si S est noethérien connexe, la fonction dimension de B/S est constante et on peut l'identifier à un entier, égal à la dimension de la fibre d'un point générique de S.
- Si S est le spectre d'un corps, la dimension de B/S coïncide avec la dimension du schéma B.

Rappelons le théorème suivant :

Théorème X.2.4. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme de type fini tel que X et S sont réguliers, connexes et de même dimension.*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *f est plat.*

(ii) *f est quasi-fini.*

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte des faits rappelés dans le paragraphe précédent le théorème. Pour la réciproque, on renvoie à [**Mat86**, Th. 23.1].

Remarque X.2.5. — On a déjà vu un cas particulier de ce théorème, celui où X et S sont des courbes algébriques propres et normales sur un corps – cf V.1.5.

X.2.6. — Un morphisme de S-schémas abéliens $f : B \to A$ est un morphisme de S-schémas en groupes. On peut définit le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f par la produit cartésien dans la catégorie des schémas :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(f) & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow f \\ S & \xrightarrow{e_A} & A \end{array}$$

où e_A est la section unité de A. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-S-schéma en groupes de B, propre sur S – mais il n'est pas nécessairement lisse sur S.

Lemme X.2.7. — *Considérons les notations précédentes. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est fini.*

(ii) $\mathrm{Ker}(f)$ *est fini.*

Démonstration. — (ii) $\Rightarrow$ (i) : pour tout $x \in A$, la fibre $f^{-1}(x) = T_x(\mathrm{Ker}(f))$ est fini. Comme f est propre, le théorème VIII.3.5 montre que f est fini. L'implication réciproque est évidente. □

Proposition X.2.8. — *Soit $f : B \to A$ un morphisme de S-schémas abéliens. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est fini surjectif.*

(ii) f *est surjectif et* $\dim(B/S) = \dim(A/S)$.

(iii) f *est fini et* $\dim(B/S) = \dim(A/S)$.

(iv) f *est fini et fidèlement plat.*

Démonstration. — On peut supposer que S est connexe de sorte que les fonctions $\dim(B/S)$ et $\dim(A/S)$ sont des entiers.

(i) $\Rightarrow$ (ii) est claire.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Comme f est surjectif, il est génériquement plat : il existe un ouvert non vide $V \subset A$ tel que $f_V : U = f^{-1}(V) \to V$ est plat. Puisque B et A sont irréductibles, (i) entraine que $\dim(U) = \dim(V)$. Le morphisme f_V est donc équidimensionnel de dimension 0 et ses fibres sont toutes de dimension 0 (cf Paragraphe X.2.1). Or pour $x \in V$, $\ker(f) = T_{-x}(f_v^{-1}(x))$. Donc $\ker(f)$ est de dimension 0. Étant de type fini sur k, il est fini, ce qui conclut d'après le lemme précédent.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : le fait que f est plat résulte du théorème X.2.4. Il reste à montrer qu'il est surjectif. Comme f est fini, $f(B)$ est fermé dans A et $B \to f(B)$ est fini. On en déduit $\dim(f(B)) = \dim(B) = \dim(A)$ par hypothèse. Du fait que $f(B)$ et A sont irréductibles, on déduit que $f(B) = A$. □

Définition X.2.9. — Un morphisme $f : B \to A$ de S-schémas abéliens vérifiant les conditions équivalentes de la proposition précédente sera appelé une *S-isogénie*, ou une *isogénie* lorsque la base est claire.

Remarque X.2.10. — Sous les conditions de la définition, il est immédiat d'après la propriété (i) que f est un isogénie si et seulement si pour tout point $s \in S$ le morphisme induit entre les fibres $f_s : B_s \to A_s$ est une isogénie de $\kappa(s)$-schémas abéliens.

L'étude des isogénies se réduit donc au cas où la base est un corps.

Il est clair que les isogénies sont stables par changement de base et composition. De plus :

Proposition X.2.11. — *Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ des morphismes de S-schémas abéliens. Alors, si deux des morphismes f, g $g \circ f$ sont des isogénies, le troisième l'est aussi.*

Démonstration. — La stabilité des isogénies par composition est immédiate. Le fait que (f et $g \circ f$ isogénies) $\Rightarrow$ (g isogénie) est une conséquence immédiate de la propriété (ii) de la proposition X.2.8. La dernière implication résulte de la propriété (iii) de *loc. cit* (et du fait que f est nécessairement séparé, voir [**EGA2**, 6.1.5]). □

X.2.b. Degré d'une isogénie. —

X.2.12. — Considérons une isogénie $f : B \to A$ de S-schémas abéliens.

Si η est un point générique de S, $f_\eta : B_\eta \to A_\eta$ est un morphisme fini entre schémas irréductibles. Il en résulte que f_η induit une extension finie entre les corps de fonctions $\kappa(B_\eta)/\kappa(A_\eta)$.

Définition X.2.13. — Avec les notations précédentes, on défini respectivement le degré, degré séparable et degré inséparable de f comme la fonction qui à un point générique η de S associe l'entier :

$$\begin{aligned}
\deg_S(f).\eta &= [\kappa(B_\eta) : \kappa(A_\eta)],\\
\deg_S(f)_s.\eta &= [\kappa(B_\eta) : \kappa(A_\eta)]_s.\\
\deg_S(f)_i.\eta &= [\kappa(B_\eta) : \kappa(A_\eta)]_i,
\end{aligned}$$

On a bien entendu la relation :

$$\deg_S(f) = \deg_S(f)_s + \deg_S(f)_i.$$

Remarque X.2.14. — On peut faire les mêmes remarques que pour la notion de dimension.

En particulier si s est un spécialisation d'un point générique η de S, le degré de l'isogénie f_s coïncide avec le degré de l'isogénie f_η. [(2)]

Ainsi, si S est connexe, de degré de f sur S se réduit à un entier.

X.2.15. — Rappelons qu'un morphisme $f : Y \to X$ de schémas est *radiciel* si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) f est universellement injectif.

(ii) f est injectif, et pour tout point $y \in Y$, $x = f(y)$, l'extension résiduel $\kappa(y)/\kappa(x)$ de f est inséparable (ou encore radicielle).

(iii) pour tout corps K, l'application $Y(K) \to X(K)$ induite par f est injective.

Voir [**EGA1**, I, 3.5.4, 3.5.8, 3.5.10].

Soit k un corps et G un k-schéma en groupes fini. On note G^0 la composante connexe de l'identité (cf Paragraphe VIII.1.1). Rappelons que le quotient de G par G^0 existe dans la catégorie des k-schémas en groupe. C'est un schéma étale sur k que l'on note $G_{ét}$. On a donc une suite exacte courte de k-schémas en groupes :

$$0 \to G^0 \to G \to G_{ét} \to 0. \tag{X.3}$$

De plus, $G_{ét}$ est le quotient minimal de G qui soit étale sur k. En particulier, si $G = G^0$, G est radiciel sur k.

Proposition X.2.16. — *Soit $f : B \to A$ une S-isogénie.*

1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (i) $\deg_S(f)_i = 0$.
   (ii) f *est étale.*
   (iii) $\mathrm{Ker}(f)$ *est un S-schéma en groupe étale.*
2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (i) $\deg_S(f)_s = 0$.
   (ii) f *est radiciel.*
   (iii) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f)^0$ *où le membre de droite est la composante neutre du S-schéma en groupe* $\mathrm{Ker}(f)$.

2. Cela résulte du fait que le degré d'un morphisme fidèlement plat fini est invariant par spécialisation.

Démonstration. — Comme f est un S-morphisme plat, il suffit de vérifier les équivalences au-dessus de chaque point de S, donc on peut supposer que S est le spectre d'un corps.

Soit L/K l'extension des corps de fonctions induite par le morphisme f. Rappelons que (i) (resp. (ii)) signifie que L/K est étale (resp. radicielle) ; autrement dit, la fibre générique de f est étale (resp. radicielle).

Dans les deux cas, toutes les équivalences sont claires compte tenu du fait que, f étant plat, la condition qu'il soit étale (resp. radiciel) se teste sur ses fibres, lesquelles sont toutes isomorphes à $\mathrm{Ker}(f)$ par translation. □

Définition X.2.17. — Avec les notations de la proposition précédente, on dit que l'isogénie f est séparable (resp. radicielle ou totalement inséparable) si elle vérifie les conditions équivalentes du point 1 (resp. point 2).

Proposition X.2.18. — *Soit $f : B \to A$ une isogénie de S-schémas abéliens. Alors, f se factorise en $f = f_s \circ f_i$ où f_i est une isogénie radicielle et f_s est une isogénie séparable. À isomorphisme unique près cette factorisation est unique.*

Démonstration. — Il suffit de considérer la factorisation naturelle de f :

$$0 \to B \xrightarrow{f_i} B/\mathrm{Ker}(f)^0 \xrightarrow{f_s} A \to 0$$

compte tenu de la proposition précédente et de la suite exacte courte (X.3) appliqué au cas de $G = \mathrm{Ker}(f)$. L'unicité de la factorisation de f résulte de l'universalité de la suite exacte courte (X.3). □

X.2.c. La relation d'isogénie. —

X.2.19. — Pour tout schéma de base S, on note $\mathscr{A}b_S$ la catégorie des S-schémas abéliens. C'est une catégorie $\mathbb{Z}$-linéaire.[(3)] Dans cette section, on va admettre le fait que pour tout entier $n \neq 0$ et tout S-schémas abéliens A, le morphisme n_A est un isogénie. La seule démonstration que je connaisse utilise le cas d'un corps de base : voir Corollaire XI.1.4.

Lemme X.2.20. — *Soit $f : B' \to B$ et $g : A \to A'$ des S-isogénies. Alors pour tous morphismes de S-schémas abéliens $h_1, h_2 : B \to A$ tels que $g \circ h_1 \circ f = g \circ h_2 \circ f$, on a nécessairement : $h_1 = h_2$.*

Démonstration. — Quitte à raisonner au-dessus de tout point de s, on peut supposer que S est le spectre d'un corps. Comme f est fidèlement plat, c'est un épimorphisme de schémas (cf preuve de VIII.3.9). On en déduit donc : $g \circ h_1 = g \circ h_2$. Il en résulte que l'image Z de $h_1 - h_2$ est incluse dans $\mathrm{Ker}(g)$. C'est donc un ensemble fini puisque g est unisogénie. Comme B est connexe, I est nécessairement connexe, donc réduit à un point. Comme $h_1(0_B) = h_2(0_B)$, on peut conclure. □

Proposition X.2.21. — *Soit $f : B \to A$ une S-isogénie de degré constant n.*

Alors, il existe une S-isogénie $g : A \to B$ telle que $g \circ f = n_B$ et $f \circ g = n_A$.

Démonstration. — Par hypothèse, le noyau de f est un k-schéma en groupes fini de rang n. Il est donc annulé par n. Il en résulte que le morphisme de multiplication par n sur B se factorise par f :

$$n_B = (B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B).$$

Comme n_B et f sont des isogénies, g est nécessairement une isogénie d'après la Proposition X.2.11.

Enfin, $g \circ n_A = n_B \circ g = (g \circ f) \circ g = g \circ (f \circ g)$. Le lemme précédent montre donc que $n_A = f \circ g$. □

3. On fera attention qu'elle n'est pas additive : elle n'admet pas de sommes finies à cause de la condition de connexité géométrique sur le morphisme structural d'un S-schéma abélien.

Corollaire X.2.22. — *Soit S un schéma connexe et A, B deux S-schémas abéliens. Alors, le groupe des morphismes*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{Ab}_S}(A,B)$$

est sans torsion.

Définition X.2.23. — On dit que deux S-schémas abéliens A et B sont S-isogènes si il existe une S-isogénie $f : B \to A$.

On note $A \sim_k B$.

D'après la proposition précédente, la relation d'isogénie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de k-schémas abéliens.

X.2.24. — Si $\mathscr{C}$ est une catégorie additive, on définit la *rationalisation naïve* de $\mathscr{C}$ comme la catégorie $\mathscr{C} \otimes \mathbb{Q}$ ayant même objets que $\mathscr{C}$ et dont les morphismes entre deux objets X et Y sont donnés par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\otimes\mathbb{Q}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

La catégorie $\mathscr{C} \otimes \mathbb{Q}$ munie du foncteur $\mathscr{C} \to \mathscr{C} \otimes \mathbb{Q}$ est initiale parmi les catégories $\mathbb{Q}$-linéaires en-dessous de $\mathscr{C}$.

Définition X.2.25. — On définit la catégorie des S-schémas abéliens à isogénie près comme la rationalisation naïve de $\mathscr{Ab}_S$. On la note $\mathscr{Ab}^0_S$ et pour deux S-schémas abéliens, on pose :

$$\mathrm{Hom}^0(A,B) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{Ab}_S}(A,B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

D'après le corollaire précédent, $\mathscr{Ab}_S$ est une sous-catégorie de $\mathscr{Ab}^0_S$.

X.2.26. — Étant donnée une catégorie $\mathscr{C}$ et une classe de flèche $\mathcal{W}$, on définit la localisation de $\mathscr{C}$ par $\mathcal{W}$ comme la plus petite catégorie $\mathscr{D}$ munie d'un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tel que si $f \in \mathcal{W}$, $F(f)$ est un isomorphisme dans $\mathscr{D}$. [(4)] On la note $\mathscr{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Proposition X.2.27. — *Soit S un schéma noethérien. La catégorie $\mathscr{Ab}^0_S$ est la localisation de la catégorie $\mathscr{Ab}_S$ par rapport aux isogénies.*

Démonstration. — Notons que si S et S' sont deux schémas, on a des équivalences de catégories canoniques :

$$\mathscr{Ab}_{S\sqcup S'} = \mathscr{Ab}_S \times \mathscr{Ab}_{S'}, \quad \mathscr{Ab}^0_{S\sqcup S'} = \mathscr{Ab}^0_S \times \mathscr{Ab}^0_{S'}.$$

On peut donc supposer que S est connexe.

D'après la Proposition X.2.21, une isogénie de S-schémas abéliens – qui est nécessairement de degré constant sur S comme S est supposé connexe – devient un isomorphisme dans $\mathscr{Ab}^0_S$. On en déduit donc un foncteur canonique :

$$\mathscr{Ab}_S \otimes \mathbb{Q} \to \mathscr{Ab}^0_S.$$

Pour voir que c'est une équivalence de catégories, il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme X.2.28. — *Pour tout morphisme $f : A \to B$ dans $\mathscr{Ab}^0_S$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un isomorphisme dans $\mathscr{Ab}^0_S$.*

(ii) *Il existe un entier n tel que $n.f$ est un morphisme dans $\mathscr{Ab}_S$ et une S-isogénie.*

4. Modulo des problèmes de fondements logiques, cette catégorie existe toujours de même que la localisation d'un anneau par rapport à une partie multiplicative.

On considère (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit g un inverse de f dans $\mathscr{A}b_S^0$. Il existe un entier $n > 0$ tel que $n.f$ et $n.g$ sont des morphismes de S-schémas abéliens. Dans $\mathscr{A}b_S^0$, on a la relation :

$$(n.f) \circ (n.g) = n^2.Id = n_A^2.$$

D'après le Corollaire X.2.22, cette relation est déjà vraie dans $\mathscr{A}b_S$. Comme $n.g$ et n_A^2 sont des isogénies, on en déduit que $n.f = f \circ n_A$ est un isogénie, ce qui implique que f est une isogénie (cf Proposition X.2.11).

La réciproque résulte du fait que n_A est un isogénie et que de plus une isogénie induit un isomorphisme dans $\mathscr{A}b_S^0$ comme remarqué en début de preuve. □

Références

[EGA1] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de jean dieudonné) : I. le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (4), 1960.

[EGA2] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de jean dieudonné) : II. étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8), 1961.

[FC90] Gerd Faltings and Ching-Li Chai. *Degeneration of abelian varieties*, volume 22 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. With an appendix by David Mumford.

[Mat86] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Translated from the Japanese by M. Reid.

[Ray70] Michel Raynaud. *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 119. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

---

premier semestre 2013

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* `frederic.deglise@ens-lyon.fr`
Url : `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`