

## Table des matières

<b>Cours IV. Cycles algébriques et diviseurs</b> .....	1
IV.1. Définition .....	1
IV.2. Cycle algébrique associé .....	2
IV.3. Équivalence rationnelle .....	3
IV.4. Degré des 0-cycles algébriques .....	8
IV.5. Diviseurs et groupe de Picard .....	10
Références .....	13

## COURS IV CYCLES ALGÈBRIQUES ET DIVISEURS

**Dans tout le court, les schémas sont supposés noethériens.**

### IV.1. Définition

**IV.1.1.** — Soit  $X$  un schéma (ou un espace topologique).

Rappelons que la *dimension* de  $X$  est égale à la borne supérieure des entiers  $n$  tels qu'il existe une suite strictement décroissante de  $n + 1$  fermés irréductibles de  $X$  :

$$Z^0 \supsetneq Z^1 \supsetneq \dots \supsetneq Z^n.$$

La dimension d'un anneau  $A$  est la dimension du schéma  $\text{Spec}(A)$ .

La codimension de  $X$  en un point  $x \in X$  est la dimension de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  de  $x$  en  $X$ .

Soit  $x$  un point de  $X$  d'adhérence  $Z(x)$  dans  $X$ . On dit aussi que  $x$  est de *dimension* (resp. *codimension*  $n$ ) dans  $X$  si  $\dim(Z(x)) = n$  (resp.  $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = n$ ).

**Exemple IV.1.2.** — 1. Un anneau est artinien<sup>(1)</sup> si et seulement si il est de dimension 0 — tout idéal premier est maximal.

2. Un anneau de valuation discrète est de dimension 1.

3. Les anneaux de Dedekind sont les anneaux intègres intégralement clos de dimension 1.

4. Si  $X$  est un  $k$ -schéma algébrique intègre de corps des fonctions  $K$ ,

$$\dim(X) = \text{degtr}(K/k).$$

Les courbes algébriques intègres sur  $k$  sont donc les  $k$ -schémas algébriques intègres de corps dont le corps des fonctions est de degré de transcendance 1 sur  $k$ .

**IV.1.3.** — Soit  $x$  un point de  $X$  d'adhérence  $Z(x)$  dans  $X$ . On dit aussi que  $x$  est de *dimension* (resp. *codimension*  $n$ ) dans  $X$  si  $\dim(Z(x)) = n$  (resp.  $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = n$ ).

**Définition IV.1.4.** — Soit  $X$  un schéma noethérien. Un *cycle algébrique* de  $X$  est une somme formelle finie

$$\alpha = \sum_{i \in I} n_i \cdot x_i$$

où  $n_i \in \mathbb{Z}$  et  $x_i$  est un point de  $X$ .

On dit que  $\alpha$  est un cycle  $n$ -codimensionnel (resp.  $n$ -dimensionnel) si pour tout indice  $i \in I$  tel que  $n_i \neq 0$ ,  $x_i$  est de dimension  $n$  (resp. codimension  $x$ ) dans  $X$ .

---

1. *i.e.* toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire

On note  $Z(X)$  (resp.  $Z_n(X)$ ,  $Z^n(X)$ ) le groupe des cycles algébriques (resp.  $n$ -dimensionnels,  $n$ -codimensionnels) de  $X$ .

On dit encore *0-cycle* pour « cycle 0-dimensionnel » et *diviseur algébrique* pour « cycle 1-codimensionnel ».

**Exemple IV.1.5.** — Si  $X = C$  est une courbe algébrique sur  $x$ , les groupes des 0-cycles et des diviseurs coïncident.

Dans le cas d'un schéma affine  $X = \text{Spec}(A)$ , les cycles algébriques sont les combinaisons linéaires d'idéaux premiers de  $A$ .

**Définition IV.1.6.** — Soit  $\alpha = \sum_{i \in I} n_i \cdot x_i$  un cycle de  $X$ . On définit le *support* de  $\alpha$  comme le fermé de  $X$

$$Z = \bigcup_{i \in I, n_i \neq 0} \overline{\{x_i\}}$$

adhérence des points qui apparaissent avec un coefficient non nul.

On considère le support  $Z$  d'un cycle de  $X$  comme un sous-schéma fermé de  $X$ , munit de sa structure canonique de sous-schéma fermé réduit de  $X$ .

**Exemple IV.1.7.** — Dans le cas  $X = \text{Spec}(A)$ ,  $\alpha = \sum_{i \in \Lambda} n_i \cdot \mathfrak{p}_i$ , le support de  $\alpha$  est la partie fermée  $V(\mathfrak{a})$  où  $\mathfrak{a}$  est la racine de l'idéal

$$\prod_{i \in I, n_i \neq 0} \mathfrak{p}_i.$$

**IV.1.8.** — Soit  $X$  un schéma noethérien et  $Z$  un sous-schéma fermé de  $X$ ,  $U = X - Z$  l'ouvert complémentaire. Soit  $i$  (resp.  $j$ ) l'immersion de  $Z$  (resp.  $U$ ) dans  $X$ . Par définition on obtient une suite exacte courte de groupes abéliens :

$$(IV.1) \quad 0 \rightarrow Z(Z) \xrightarrow{i_*} Z(X) \xrightarrow{j^*} Z(U) \rightarrow 0$$

où le morphisme  $i_*$  associe à un cycle algébrique sur  $Z$  le même cycle vu dans  $X$  et le morphisme  $j^*$  est défini par la formule :

$$j^* \left( \sum_{i \in I} n_i \cdot x_i \right) = \sum_{i \in I | x_i \in U} n_i \cdot x_i.$$

## IV.2. Cycle algébrique associé

**IV.2.1.** — Rappelons qu'un point d'un schéma  $X$  est générique si et seulement si il est de codimension nulle, autrement dit l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est artinien.

Si  $A$  est un anneau et  $M$  un  $A$ -module, la *longueur* de  $M$  sur  $A$ , notée  $\text{lg}_A(M)$ , est la borne supérieure (éventuellement infinie) des entiers  $n$  tels qu'il existe une suite strictement croissante de  $A$ -modules de la forme :

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M.$$

On montre que l'anneau  $A$  est noethérien si et seulement si il est de longueur finie sur lui-même. On la note simplement  $\text{lg}(A)$ .

**Exemple IV.2.2.** — 1. L'exemple typique d'anneau artinien est l'anneau  $k[t]/(t^n)$  pour un corps  $k$  et un entier  $n > 0$ . Par ailleurs,  $\text{lg}(k[t]/(t^n)) = n$ .

2. Si  $A$  est un anneau de valuation discrète,  $v : A^\times \rightarrow \mathbb{N}$  la valuation associée et  $f \in A$  un élément non nul. Alors l'anneau  $A/(f)$  est artinien et :

$$\text{lg}(A/(f)) = v(f).$$

3. Plus généralement : un corps ou un produit de corps est un anneau artinien de longueur 0. Si  $A$  est un anneau artinien, la réduction de  $A$  est un produit de corps. La longueur d'un anneau artinien est donc une mesure de la non réduction de l'anneau.

**Définition IV.2.3.** — On associe à tout sous-schéma fermé  $Z$  de  $X$  un cycle

$$\langle Z \rangle_X = \sum_{x \in Z^{(0)}} \text{lg}(\mathcal{O}_{Z,x}).x.$$

L'entier  $\text{lg}(\mathcal{O}_{Z,x})$  est encore appelé la *multiplicité (géométrique)* de  $x$  dans  $Z$ .

Le support de  $\langle Z \rangle_X$  est  $Z_{red}$ . Ainsi, lorsque  $Z$  est de codimension pure (resp. équidimensionnel de dimension)  $n$ ,  $\langle Z \rangle_X$  est  $n$ -codimensionnel (resp.  $n$ -dimensionnel).

Tout cycle  $\alpha$  de  $X$  admet une unique écriture de la forme

$$\alpha = \sum_{i \in I} n_i \cdot \langle Z_i \rangle_X$$

où  $n_i$  est un entier non nul et  $Z_i$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$ . On l'appelle la *forme normale* du cycle  $\alpha$ .

**Exemple IV.2.4.** — Soit  $A$  un anneau noethérien,  $X = \text{Spec}(A)$ . A tout élément  $f \in A$  régulier<sup>(2)</sup>, on associe un cycle algébrique de  $X$  :

$$\text{div}(f) = \langle \text{Spec}(A/(f)) \rangle_X.$$

Du fait que  $f$  est régulier, c'est un diviseur algébrique de  $X$ . On peut l'écrire en toute généralité

$$\text{div}(f) = \sum_{\mathfrak{p} \in X^{(1)}} \text{ord}_{\mathfrak{p}}(f) \cdot \mathfrak{p}$$

où l'on a posé  $\text{ord}_{\mathfrak{p}}(f) = \text{lg}(A_{(\mathfrak{p})}/(f))$ ,  $A_{(\mathfrak{p})}$  désignant l'anneau localisé de  $A$  en l'idéal premier  $\mathfrak{p}$ .

### IV.3. Équivalence rationnelle

**IV.3.1.** — Considérons un schéma intègre  $X$ . Si  $\eta$  est son unique point générique, le corps résiduel  $K$  de  $\eta$  est appelé le corps des *fonctions rationnelles* de  $X$ , ou simplement *corps des fonctions*.

Par définition, on obtient l'égalité :

$$K = \varinjlim_{U \subset X} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

où  $U$  parcourt l'ensemble filtrant des ouverts non vides de  $X$ . Autrement dit, pour tout élément  $f$  de  $K$ , il existe un ouvert non vide  $U$  de  $X$  tel que  $f$  est représenté dans la limite inductive ci-dessus par une fonction  $a : U \rightarrow \mathbb{A}^1$ . On dit encore que  $f$  est *définie* sur  $U$ .

**Exemple IV.3.2.** — Soit  $X$  un  $k$ -schéma intègre et  $K$  son corps des fonctions.

- Alors,  $K$  est une extension de  $k$  de degré de transcendance  $\dim(X)$  – Exemple IV.1.2.
- Soit  $f \in K$  une fonction rationnelle sur  $X$ . On dit que  $f$  est *constante* si  $f \in k$  – le corps de base est sous-entendu dans cette terminologie. On dit que  $f$  est algébrique (resp. transcendant) si elle c'est un élément algébrique (resp. transcendant) de  $K$  sur  $k$ .
- Le corps des fonctions rationnelles de  $\mathbb{P}_k^1$  est égal à  $k(t)$ .

**IV.3.3.** — Soit  $X$  un schéma intègre et  $x$  un point de codimension 1 dans  $X$ , d'anneau local  $A := \mathcal{O}_{X,x}$ . Alors  $A$  est un anneau intègre de corps des fractions  $K$ . En particulier, une fonction  $f \in K^\times$  peut s'écrire comme une fraction

$$f = \frac{a}{b}$$

2. *i.e.* non diviseur de 0.

pour des éléments  $a$  et  $b$  de  $A$  – on peut voir  $a$  et  $b$  comme des fonctions sur  $X$  définies au voisinage de  $x$ .

**Lemme IV.3.4.** — *Considérons les notations qui précèdent :*

*L'entier  $\lg(A/(a)) - \lg(A/(b))$  ne dépend que de  $f$  et pas du choix de  $a$  et  $b$ .*

Cela résulte facilement de la formule :

$$(IV.2) \quad \lg(A/(ab)) = \lg(A/(a)) + \lg(A/(b))$$

pour tout éléments non nuls  $a, b$  de l'anneau  $A$  (voir par exemple [Dég09, II.21]).

**Définition IV.3.5.** — Sous les hypothèses du lemme précédent, on définit l'ordre de la fonction rationnelle  $f \in K^\times$  sur  $X$  au point  $x$  comme l'entier :

$$\text{ord}_x(f) = \lg(A/(a)) - \lg(A/(b)).$$

On dit que  $f$  a un zéro (resp. pôle) en  $x$  si  $\text{ord}_x(f) > 0$  (resp.  $\text{ord}_x(f) < 0$ ) ; l'entier  $\text{ord}_x(f)$  est alors appelé l'ordre du zéro (resp. pôle). On dit que  $f$  est inversible en  $x$  si  $\text{ord}_x(f) = 0$

Notons que pour tout point  $x$  d'un schéma intègre  $X$ ,  $\text{ord}_x : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$  est un morphisme de groupes abéliens d'après la formule (IV.2).

**Exemple IV.3.6.** — Dans le cas où  $X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[t])$ , une fonction rationnelle sur  $X$  est une fraction rationnelle à coefficients dans  $k$ . La notion de zéro, de pôle et d'ordre en point fermé  $0$  – correspondant à l'idéal premier  $(t)$  – au sens de la définition ci-dessus coïncide avec la définition classique : l'ordre de  $f \in k(t)$  est le degré en  $t$  de  $f$ .

**Remarque IV.3.7.** — Soit  $f$  une fonction rationnelle sur  $X$ . Les assertions suivantes sont immédiates :

1. Les zéros (resp. pôles) de  $f$  coïncident avec les pôles (resp. zéros) de  $f^{-1}$ .
2. Si  $f$  n'a pas de pôles, elle est définie sur  $X$  :  $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  i.e.  $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ .
3. Si  $f$  n'a ni zéros ni pôles sur  $X$ , elle est globalement définie et inversible sur  $X$  :  $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$  i.e.  $f : X \rightarrow \mathbb{G}_m$ .

**Définition IV.3.8.** — On dit qu'un schéma  $X$  est *normal* si il est intègre et pour tout point  $x \in X$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est intégralement clos (dans son corps des fractions) – si  $X = \text{Spec}(A)$ , il revient au même de demander que  $A$  est intègre et intégralement clos.

**IV.3.9.** — Rappelons que tout anneau local  $A$  de dimension 1 est intégralement clos si et seulement si c'est un anneau de valuation discrète.

Ainsi, pour un schéma normal  $X$  et un point 1-codimensionnel  $x$  de  $X$ , l'anneau  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un anneau de valuation. Rappelons que le corps des fractions de  $\mathcal{O}_{X,x}$  coïncide avec le corps des fonctions  $K$  de  $X$ . On associe donc au point  $x$  une valuation  $v_x : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ . On vérifie facilement que pour tout  $f \in K^\times$ , on a l'égalité suivante :

$$\text{ord}_x(f) = v_x(f).$$

**Lemme IV.3.10.** — *Soit  $X$  un schéma noethérien intègre et  $f$  une fonction rationnelle sur  $X$ . Alors, l'ensemble*

$$\{x \in X^{(1)} \mid \text{ord}_x(f) \neq 0\}$$

*des zéros et pôles de  $f$  est fini.*

*Démonstration.* — Compte tenu de la remarque précédent l'énoncé du lemme, il suffit de montrer que l'ensemble des pôles de  $f$  est fini. Comme  $f$  est une fonction rationnelle sur  $X$ , il existe un ouvert non vide  $U$  de  $X$  tel que  $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) : f$  est définie en  $U$ . Alors pour tout  $x \in U^{(1)}$ ,  $\text{ord}_x(f) \geq 0$ . Ainsi tous les pôles de  $f$  sont dans l'ensemble fermé  $Z = X - U$  qui est nulle part dense dans  $X$ , autrement dit partout de codimension supérieure à 1. Ainsi, tout point de  $Z$  qui est de codimension 1 dans  $X$  est nécessairement un point générique. Puisque  $Z$  est noethérien, il n'a qu'un nombre fini de points génériques ce qui conclut :

$$\{\text{pôles de } f\} \subset (X^{(1)}) \cap Z \subset Z^{(0)}.$$

□

**IV.3.11.** — Soit  $X/k$  une courbe algébrique intègre de corps des fonctions  $K$ .

Soit  $f \in K$  une fonction rationnelle sur  $X$ .

Notons  $Z_0 = \{x \in X_{(0)} \mid \text{ord}_x(f) > 0\}$  (resp.  $Z_\infty = \{x \in X_{(0)} \mid \text{ord}_x(f) < 0\}$ ) l'ensemble des zéros (resp. pôles) de  $f$ .

Alors,  $U = X - Z_0$  (resp.  $V = X - Z_\infty$ ) est l'ouvert maximal de  $X$  sur lequel  $f$  (resp.  $f^{-1}$ ) est définie correspondant à une fonction  $\phi_f : U \rightarrow \mathbb{A}_k^1$  (resp.  $\psi_f : V \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ ).

Il est clair que  $X = U \cup V$ . Considérons les fonctions suivantes à valeurs dans  $\mathbb{P}_k^1$  :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_f : U &\xrightarrow{\phi_f} \mathbb{A}_k^1 \simeq (\mathbb{P}_k^1 - \{\infty\}) \xrightarrow{(*)} \mathbb{P}_k^1 \\ \bar{\psi}_f : V &\xrightarrow{\psi_f} \mathbb{A}_k^1 \simeq (\mathbb{P}_k^1 - \{0\}) \xrightarrow{(*)} \mathbb{P}_k^1 \end{aligned}$$

où les flèches  $(*)$  sont les immersions ouvertes canoniques. Ces deux fonctions coïncident si on les restreint à  $U \cap V$  : elles sont égales à la fonction inversible définie par  $f$  sur  $U \cap V$ . On en déduit donc un morphisme de schémas :

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1.$$

**Proposition IV.3.12.** — *Considérons les notations précédentes et supposons que  $X/k$  est propre.*

*Alors, le morphisme  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  associé à une fonction rationnelle est ou bien une fonction constante ou bien un morphisme fini.*

*De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $(f \in K)$  est transcendante sur  $k$ .
- (ii)  $(f : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1)$  est surjective.
- (ii')  $(f : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1)$  est finie surjective.

*Démonstration.* — Comme  $X$  et  $\mathbb{P}_k^1$  sont propres sur  $k$ , le morphisme  $f$  est nécessairement propre.

L'image  $f(X)$  de  $f$  est une partie fermée irréductible de  $\mathbb{P}_k^1$ , donc réduite à un point fermé ou à tout le schéma  $X$ . Il est clair que  $f(X)$  est réduite à un point fermé  $x$  de  $\mathbb{P}_k^1$  si et seulement si  $f$  est algébrique sur  $k$  (et alors,  $k[f] = \kappa(x)$ ).

Supposons que  $f(X) = Y$ , autrement dit  $f$  est transcendant sur  $K$ .

Alors, les fibres de  $f$  sont finies. Il suffit de le voir sur la fibre d'un point fermé  $x \in \mathbb{P}_k^1$ . Quitte à faire une extension de la base, on peut supposer que  $x$  est un point rationnel. Quitte à changer de coordonnées dans  $\mathbb{P}_k^1$ , on peut supposer  $x = 0$  : on est ramené au lemme précédent.

D'après un théorème de Grothendieck, un morphisme propre dont les fibres sont finies est nécessairement fini ([Gro67, III, 4.4.2]), ce qui montre la première assertion. □

**Remarque IV.3.13.** — Soit  $X$  une courbe algébrique propre normale sur  $k$ .

Un morphisme fini surjectif  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  est appelé un *revêtement* de  $\mathbb{P}_k^1$ .<sup>(3)</sup>

La proposition précédente permet de construire une bijection entre les éléments transcendants de  $K/k$  et les revêtements de  $\mathbb{P}_k^1$  de source  $X$ .

Grâce à cette interprétation, il est trivial que les zéros (resp. pôles) d'un revêtement  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ ,

$$f^{-1}(\{0\}) \text{ (resp. } f^{-1}(\{\infty\}))$$

correspondent aux zéros (resp. pôles) de la fonction rationnelle  $f \in K$  suivant la définition IV.3.5.

**Définition IV.3.14.** — Soit  $X$  un schéma intègre de corps des fonctions rationnelles  $K$ . Soit  $f \in K^\times$  une fonction rationnelle non nulle sur  $X$ .

On associe à  $f$  un diviseur algébrique de  $X$  par la formule :

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{x \in X^{(1)}} \operatorname{ord}_x(f).$$

On dit que  $\operatorname{div}(f)$  est un *diviseur principal* de  $X$ .

On a ainsi défini pour tout schéma intègre  $X$  un morphisme de groupes abéliens :

$$\operatorname{div} : K^\times \rightarrow Z^1(X).$$

Notons que si  $Z$  est un sous-schéma de  $X$  on peut voir tout cycle algébrique de  $Z$  comme un cycle algébrique de  $X$ .

**Définition IV.3.15.** — Soit  $X$  un schéma.

Deux cycles algébriques  $\alpha$  et  $\beta$  sont dit *rationnellement équivalents*<sup>(4)</sup> si il existe une famille finie  $(Z_i)_{i \in I}$  de fermés intègres de  $X$  et pour tout indice  $i$  un diviseur principal  $\operatorname{div}(f_i)$  de  $Z_i$  tel que

$$\alpha - \beta = \sum_{i \in I} \operatorname{div}(f_i).$$

On obtient ainsi une relation d'équivalence sur le groupe des cycles algébriques de  $X$ , notée simplement  $\sim_{\text{rat}}$ , et on définit le *groupe de Chow* de  $X$  comme le quotient

$$\operatorname{CH}(X) = Z(X) / \sim_{\text{rat}}.$$

On note  $\operatorname{CH}^n(X)$  (resp.  $\operatorname{CH}_n(X)$ ) le sous-groupe du groupe de Chow engendré par les cycles  $n$ -codimensionnels (resp.  $n$ -dimensionnels).

Le groupe  $\operatorname{CH}^1(X)$  est encore appelé le groupe des *classes de diviseurs* (sous-entendus algébriques) de  $X$ .

**Exemple IV.3.16.** — Soit  $X$  un schéma intègre noethérien.

1. Alors deux diviseurs algébriques  $D$  et  $D'$  sont rationnellement équivalents si et seulement si le diviseur algébrique  $D - D'$  est principal (en effet, dans la définition précédente, chacun des fermés  $Z_i$  doit être de codimension 0 dans  $X$ , donc égal à  $X$  car  $X$  est intègre).
2. Supposons  $X = \operatorname{Spec}(A)$ , pour un anneau  $A$  intègre noethérien. Alors un sous-schéma fermé intègre  $Z$  de  $X$  de codimension 1 est de la forme  $Z = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p})$  pour un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ . De plus, pour un élément  $f \in A$  non nul, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $\langle Z \rangle_X = \operatorname{div} f$ .

(ii)  $\mathfrak{p} = (f)$ .

On en déduit que si  $A$  est factoriel<sup>(5)</sup>, alors tout diviseur algébrique de  $X$  est principal.

3. Il existe un ouvert dense maximal  $U$  de  $\mathbb{P}_k^1$  au-dessus duquel  $f$  est étale. Les points dans le complémentaire de  $U$  sont appelés les *points de ramification* de  $f$  (voir [Har77, IV.2] pour plus de détails).

4. On trouve aussi la terminologie « linéairement équivalents ».

5. *i.e.* tout idéal premier de hauteur 1 est principal.

**Remarque IV.3.17.** — Reprenant les notations du point (2) de l'exemple précédent, on peut montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (i)  $A$  est factoriel.
- (ii)  $A$  est intégralement clos et  $\mathrm{CH}^1(\mathrm{Spec}(A)) = 0$ .

Voir [Bou85, Ch. 7, §3].

**IV.3.18.** — Reprenons les notations du paragraphe IV.1.8 pour un schéma  $X$ ,  $Z$  un sous-schéma fermé et  $U = X - Z$ .

Il est évident que le morphisme noté  $i_*$  préserve l'équivalence rationnelle. Il en de même pour  $j^*$  — une fonction rationnelle  $f$  sur  $X$  définie aussi une fonction rationnelle sur  $U$  et on obtient trivialement :  $j^*(\mathrm{div}_X(f)) = \mathrm{div}_U(f)$ .

Ainsi, la suite exacte (IV.1) est compatible au quotient par l'équivalence rationnelle et on obtient une suite exacte courte :

$$(IV.3) \quad \mathrm{CH}(Z) \xrightarrow{i_*} \mathrm{CH}(X) \xrightarrow{j^*} \mathrm{CH}(U) \rightarrow 0$$

**Exemple IV.3.19.** — Soit  $k$  un corps.

1. Du fait que  $k[t]$  est principal et de l'exemple IV.3.16, on déduit :

$$\mathrm{CH}^i(\mathbb{A}_k^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus généralement, on montre que pour tout schéma  $X$ ,

$$\mathrm{CH}^i(\mathbb{A}_X^1) \simeq \mathrm{CH}^i(X).$$

2. On déduit de l'isomorphisme du point précédent que pour tout couple d'entiers  $(i, n)$

$$\mathrm{CH}^i(\mathbb{A}_k^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Pour tout entier  $n \geq 0$ , on peut considérer l'immersion fermée linéaire :

$$\mathbb{P}_k^{n-1} \xrightarrow{h} \mathbb{P}^n, [x_1 : \dots : x_n] \mapsto [x_1 : \dots : x_n : 0]$$

son image est un hyperplan  $H$  de  $\mathbb{P}_k^n$ , l'hyperplan à l'infini et on obtient :  $(\mathbb{P}_k^n - H) \simeq \mathbb{A}_k^n$ .<sup>(6)</sup> De la suite exacte (IV.3) et du point précédent, on déduit donc que pour tout  $i > 0$ , le morphisme suivant :

$$\mathrm{CH}^{i-1}(\mathbb{P}_k^{n-1}) \xrightarrow{h_*} \mathrm{CH}^i(\mathbb{P}_k^n)$$

est surjectif. Notons que dans le cas où  $i = 1$ , l'image de  $h_*$  est le sous-groupe engendré par la classe de cycles  $h := \langle H \rangle_{\mathbb{P}^n}$ . Or ce cycle, ni aucun de ses multiples  $r.h$  pour  $r > 0$ , n'est rationnellement équivalent à 0.<sup>(7)</sup> On en déduit donc que le morphisme

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{CH}^1(\mathbb{P}_k^n), n \mapsto n \cdot \langle H \rangle$$

est un isomorphisme.

De plus, si l'on note  $L^i$  l'image de l'immersion fermée composée :

$$\mathbb{P}_k^i \xrightarrow{h} \mathbb{P}_k^{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{P}_k^n,$$

on obtient par induction que pour tout  $i > 0$ , le morphisme suivant :

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{CH}^i(\mathbb{P}_k^n), n \mapsto n \cdot \langle L^i \rangle$$

est un isomorphisme.

6. Autrement dit, l'espace projectif  $\mathbb{P}_k^n$  est obtenu en complétant l'espace affine  $\mathbb{A}_k^n$  par un hyperplan  $H \simeq \mathbb{P}_k^{n-1}$ .

7. Dans le cas contraire, il existerait une fonction rationnelle non constante sur  $\mathbb{P}_k^n$  qui n'a pas de pôle, autrement dit une fonction globale sur  $\mathbb{P}_k^n$  non constante : or  $\Gamma(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) = k$ .

**Remarque IV.3.20.** — Si  $X$  est un schéma lisse sur un corps, la théorie de l'intersection permet de définir un produit sur le groupe abélien  $\text{CH}(X)$  qui respecte la graduation par la codimension. C'est le produit d'intersection de deux classes de cycles algébriques. On parle donc de l'*anneau de Chow*.<sup>(8)</sup>

De plus, pour tout morphisme de  $k$ -schéma lisses  $f : Y \rightarrow X$ , on peut définir une image inverse sur les classes de cycles algébriques :

$$f^* : \text{CH}^n(X) \rightarrow \text{CH}^n(Y)$$

qui est compatible au produit (c'est facile si  $f$  est plat).

Ainsi, on obtient un foncteur contravariant  $\text{CH}^*$  de la catégorie des  $k$ -schémas lisses vers la catégorie des anneaux gradués : c'est un des premiers exemples d'une théorie cohomologique en géométrie algébrique.

#### IV.4. Degré des 0-cycles algébriques

**IV.4.1.** — Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de schémas. A tout point  $y$  de  $Y$ , d'image  $x = f(y)$  dans  $X$ , est associé un morphisme

$$\kappa(x) \rightarrow \kappa(y)$$

des corps résiduels respectifs de  $x$  et  $y$ . On l'appelle l'*extension résiduelle* de  $f$  en  $y$ ; le degré de cette extension est encore appelé le *degré résiduel* de  $f$  en  $y$ .

**Définition IV.4.2.** — Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme, et

$$\alpha = \sum_{i \in I} n_i \cdot y_i$$

un cycle de  $Y$ . On définit le cycle image directe de  $\alpha$  par  $f$  par la formule :

$$f_*(\alpha) := \sum_{i \in I} n_i \cdot d_i \cdot f(y_i)$$

où pour tout indice  $i \in I$ ,  $d_i$  est le degré résiduel de  $f$  en  $y_i$  si il est fini et 0 dans le cas contraire.

**Exemple IV.4.3.** — Soit  $k$  un corps et  $X$  un  $k$ -schéma de type fini,  $f : X \rightarrow \text{Spec}(k)$  son morphisme structural.

Alors, le morphisme  $f_* : Z(X) \rightarrow Z(\text{Spec}(k)) = \mathbb{Z}$  se factorise par le groupe  $Z_0(X)$  des 0-cycles de  $X$ . En effet, d'après le résultat rappelé au point (4) de l'exemple IV.1.2, si  $x$  est un point de  $X$  et  $Z$  désigne son adhérence dans  $X$ ,  $\dim(Z) = \text{degr}_k(\kappa(x))$ . Comme  $\kappa(x)$  est une  $k$ -algèbre essentiellement de type fini, l'extension  $\kappa(x)/k$  est finie si et seulement si  $Z$  est de dimension nulle. Si  $\alpha = \sum_i n_i \cdot x_i$  est un 0-cycle, on obtient

$$f_*(\alpha) = \sum_i n_i \cdot [\kappa(x_i) : k].$$

Cet entier est appelé le *degré* du 0-cycle  $\alpha$ . On le note  $\text{deg}(\alpha)$ .

---

8. Voici le premier exemple, historiquement, de ce produit d'intersection. On se place dans le cas du schéma  $X = \mathbb{P}_k^2$  pour un corps  $k$  quelconque. On considère deux courbes algébriques projectives planes  $C$  et  $C'$ , soient deux sous-schémas fermés de  $X$ . Alors  $C$  et  $C'$  définissent des diviseurs  $\alpha = \langle C \rangle$  et  $\beta = \langle C' \rangle$  de  $X$ . Le cycle intersection  $\alpha \cdot \beta$ , bien défini modulo équivalence rationnelle, correspond à l'ensemble des points d'intersection des courbes comptés chacun avec sa *multiplicité*. Dans ce langage, le théorème de Bézout s'exprime ainsi :

$$\text{deg}(\langle C \rangle \cdot \langle C' \rangle) = \text{deg}(\langle C \rangle) + \text{deg}(\langle C' \rangle),$$

sachant que le degré d'une courbe plane projective  $C$ , définie par le degré total de l'équation qui la définit, coïncide avec le degré du cycle associé.



**Lemme IV.4.4.** — Pour tous morphismes de schémas

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X,$$

on a la relation :  $g_* f_* = (gf)_*$ .

C'est évident par transitivité des degrés des extensions résiduelles.

**Exemple IV.4.5.** — Soit  $C$  une courbe algébrique projective complexe plane de degré  $d$  obtenue comme la complétion projective d'une courbe algébrique affine d'équation

$$f(x, y) = y^d - \sum_{i,j, i+j < d} a_{i,j} x^i y^j = 0$$

où  $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ . Alors le degré  $d$  de  $C$  est encore égal au degré du cycle intersection de  $C$  avec la droite d'équation  $x = 1, z = 1$  : en effet, ce cycle intersection est le cycle associé au schéma

$$\text{spec}(\mathbb{C}[y]/(f(1, y)))$$

est le polynôme  $f(1, y)$  a exactement  $d$ -solutions complexes comptées avec leur multiplicités.

Pour généraliser cet énoncé à n'importe quel courbe, on est amené à considérer la classe d'équivalence rationnelle du cycle associé à la courbe.

**Théorème IV.4.6.** — 1. Soit  $\pi : Y \rightarrow X$  un morphisme fini surjectif entre schémas intègres. Soit  $L$  (resp.  $K$ ) le corps des fonctions de  $Y$  (resp.  $X$ ). Alors pour tout élément  $g \in L^\times$ ,

$$\pi_*(\text{div}(g)) = \text{div}(N_{L/K}(g))$$

où  $N_{L/K}$  est le morphisme norme de l'extension finie  $L/K$ .<sup>(9)</sup>

2. Soit  $X$  un courbe algébrique propre intègre sur un corps  $k$  de corps des fonctions rationnelles  $K$ . Alors, pour tout élément  $f \in K^\times$ ,

$$\text{deg}(\text{div}(f)) = 0.$$

*Démonstration.* — On peut raisonner localement en  $X$  au voisinage d'un point générique du support de  $\pi_*(\text{div}(g))$ . Quitte à remplacer  $X$  par  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$  et  $Y$  par  $Y \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ , on peut donc supposer  $X$  (resp.  $B$ ) est un schéma local (resp. semi-local), d'anneau local  $A$  (resp. semi-local  $B$ ). Par additivité de  $\text{div}$ , on peut supposer que  $g \in B$ . Posons  $f = N_{L/K}(g)$ . On doit alors démontrer :

$$\sum_{\mathfrak{q}} d_{\mathfrak{q}} \cdot \text{lg}_{B_{\mathfrak{q}}}(B_{\mathfrak{q}}/(g)) = \text{lg}_A(A/(f)).$$

Pour ce calcul de longueur, on se réfère à [Dég09, II.10].

Considérons maintenant le point (2).

On commence par le cas où  $X = \mathbb{P}_k^1$ . Alors  $K = k(t)$ . Comme  $\text{div}$  et  $\text{deg}$  sont des morphismes de groupes abéliens, on peut supposer  $f \in k[t]$  est un polynôme en  $t$  que l'on peut supposer irréductible.

Dès lors  $(f)$  est un idéal premier de  $k[t]$  qui définit donc un point fermé  $x$  de  $\mathbb{A}_k^1 \subset \mathbb{P}_k^1$ . De plus,

$$\text{ord}_x(f) = \text{lg}(k[t]_{(f)}/(f)) = 1.$$

Un point fermé  $y$  de  $\mathbb{A}_k^1$  distinct de  $x$  correspond à un idéal premier  $(g)$  avec  $g$  polynôme irréductible distinct de  $f$ , donc premier avec  $f$  :  $f$  est une unité dans  $k[t]/(g)$  : l'ordre de  $f$  en  $y$  est donc 0. Soit  $d$  le degré de  $f$ .

Reste à comprendre l'ordre de  $f$  au point à l'infini de  $\mathbb{P}_k^1$ . La valuation correspondant à ce point est la valuation sur  $k(t)$  d'uniformisante  $1/t$ , autrement dit le degré au sens usuel des fonctions

9. La norme relativement à  $K$  d'un élément non nul de  $L$  est le déterminant du morphisme  $K$ -linéaire  $L \rightarrow L, x \mapsto g.x$ .

rationnelles dans  $k(t)$ . Donc l'ordre de  $f$  au point à l'infini est égal à  $\text{val}_t(f(1/t))$  du polynôme  $f$ , soit  $-d$ . Donc

$$\text{div}(f) = x - d.\infty.$$

ce qui permet de conclure car  $\kappa(x) = k[t]/(f)$  est un corps de degré  $d$  sur  $k$ .

**Cas général :** Le corps des fonctions  $K$  de  $X$  est une extension transcendante de  $k$  de degré 1 – Exemple IV.1.2. Il existe donc un élément  $\pi \in K$  transcendant sur  $k$ . D'après la proposition IV.3.12, il lui correspond donc un  $k$ -morphisme fini surjectif  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ .

Le point (2) résulte donc du point (1), du cas de  $\mathbb{P}_k^1$  et du lemme IV.4.4.  $\square$

**Remarque IV.4.7.** — Le deuxième point de ce théorème s'interprète donc en disant que la somme des zéros de  $f$  comptés avec leur multiplicité, coïncide avec la somme des pôles de  $f$  comptés avec leur multiplicité.

**Corollaire IV.4.8.** — Pour toute courbe  $X$  algébrique propre sur  $k$ , le morphisme degré :

$$\text{deg} : Z_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

se factorise modulo la relation d'équivalence rationnelle et induit un morphisme

$$\text{deg} : \text{CH}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

**Remarque IV.4.9.** — Plus généralement, on déduit du théorème précédent que pour tout morphisme propre  $f : Y \rightarrow X$ , le morphisme image direct  $f_*$  se factorise modulo la relation d'équivalence rationnelle sur les cycles algébriques et induit un morphisme :

$$f_* : \text{CH}(Y) \rightarrow \text{CH}(X).$$

– on l'a montré pour les morphismes finis surjectifs ; pour les morphismes propres voir [Ful98, Th. 1.4] pour plus de détails.

Ainsi, pour tout  $k$ -schéma propre, le degré des 0-cycles est invariant par équivalence rationnelle et induit :  $\text{deg}_X : \text{CH}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Notons qu'en général, le morphisme  $f_*$  ainsi obtenu la graduation par la dimension.

## IV.5. Diviseurs et groupe de Picard

**IV.5.1.** — Soit  $X$  un schéma intègre de corps des fonctions  $K$ . On note  $K_X$  le faisceau constant sur  $X$  de valeur  $K$ . C'est une  $\mathcal{O}_X$ -algèbre car pour tout ouvert  $U \subset X$ , l'anneau  $\mathcal{O}_X(U)$  est intègre de corps des fractions  $K$  :  $K$  est donc une  $\mathcal{O}_X(U)$ -algèbre. On note  $\nu : \mathcal{O}_X \rightarrow K_X$  le morphisme correspondant – c'est un monomorphisme de faisceaux.

Nous allons voir comment associer à tout  $\mathcal{O}_X$ -module inversible un diviseur. Pour cela, on utilise le lemme facile suivant :

**Lemme IV.5.2.** — Considérons les notations précédentes. Soit  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible.

Alors, le  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} K_X$  est isomorphe au faisceau constant  $K_X$ .

En particulier, il existe un monomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -module :

$$\mathcal{L} \xrightarrow{1 \otimes \nu} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} K_X \simeq K_X.$$

*Démonstration.* — Les fibres de  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} K_X$  sont toutes isomorphes à

$$\mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K \simeq \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K$$

après le choix d'une trivialisations de  $\mathcal{L}$  au voisinage de  $x$ . Ainsi,  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} K_X$  est un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules de valeur  $K$ , donc isomorphe à  $K_X$ .  $\square$

**IV.5.3.** — Considérons un schéma normal  $X$  de corps des fonctions  $K$ .

Fixons un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X$ . D'après le lemme précédent, on peut choisir un monomorphisme

$$\mathcal{L} \rightarrow K_X.$$

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$  tel que  $\mathcal{L}$  est trivial sur  $U_i$ . Ainsi,  $\mathcal{L}(U_i)$  est un sous- $\mathcal{O}_X(U_i)$ -module de  $K$  libre de rang 1 qui admet donc un générateur  $f_i \in K$ .

Pour tout couple d'indices  $(i, j)$ ,  $f_i f_j^{-1}$  est une fonction inversible sur l'ouvert  $U_{ij} = U_i \cap U_j$ , donc en particulier :

$$\operatorname{div}_{U_{ij}}(f_i) - \operatorname{div}_{U_{ij}}(f_j) = \operatorname{div}_{U_{ij}}(f_i f_j^{-1}) = 0.$$

Il en résulte que les cycles  $\operatorname{div}(f_i)$ , vu dans  $X$ , se recollent et définissent un cycle algébrique  $\alpha(\mathcal{L})$ . On a par ailleurs la formule :

$$\alpha_X(\mathcal{L}) = \sum_{x \in X^{(1)}} v_x(f_i) \cdot x$$

où  $v_x$  est la valuation associée à  $x$  et  $i \in I$  est un indice quelconque tel que  $x \in U_i$ .

**Proposition IV.5.4.** — *Considérons un schéma normal  $X$  ainsi que les notations qui précèdent.*

*Alors,  $\alpha_X$  définit un morphisme injectif de groupes abéliens :*

$$\operatorname{Pic}(X) \rightarrow \operatorname{CH}^1(X).$$

*Démonstration.* — En effet, supposons que  $\alpha(\mathcal{L}) = \operatorname{div}(f)$  pour une fonction rationnelle  $f \in K^\times$ .

Alors, pour tout  $U_i$ ,  $\operatorname{div}_{U_i}(f_i) = \operatorname{div}_{U_i}(f)$ , ce qui implique que  $f f_i^{-1}$  est inversible sur  $U_i$ . On en déduit un isomorphisme :

$$\mathcal{L}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_X|_{U_i} \cdot f_i \simeq \mathcal{O}_X|_{U_i} \cdot f$$

de sous- $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ -modules de  $K_{U_i}$ . De plus, du fait que les  $f_i$  sont des paramétrisations locales de  $\mathcal{L}$ , on en déduit que ces isomorphismes se recollent et induisent un isomorphisme de sous- $\mathcal{O}_X$ -modules de  $K_X$ .

$$\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X \cdot f.$$

Autrement dit,  $\mathcal{L}$  est globalement trivial. □

**Exemple IV.5.5.** — Soit  $C$  une courbe algébrique sur un corps  $k$ .

D'après l'exemple précédent, et le corollaire IV.4.8, si  $C$  est propre et normale, on peut associer à tout fibré inversible sur  $C$  un entier qu'on appelle son degré :

$$\operatorname{Pic}(X) \xrightarrow{-\alpha_X} \operatorname{CH}^1(X) = \operatorname{CH}_0(X) \xrightarrow{\operatorname{deg}} \mathbb{Z}.$$

Rappelons à ce propos les faits suivants, valable pour une courbe algébrique sur un corps  $k$  quelconque :

1. Si  $C$  est lisse alors  $C$  est normale.
2. Si  $k$  est un corps parfait et  $C$  est normale, alors  $C$  est lisse.

Cela résulte facilement des rappels sur les schémas normaux (Définition IV.3.8) et des faits plus généraux suivants, valables pour un  $k$ -schéma  $X$  localement de type fini :

1. Si  $X$  est lisse alors  $X$  est régulier (*i.e.* pour tout point  $x$  de  $X$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est régulier).
2. Si  $k$  est un corps parfait et  $X$  est régulier, alors  $X$  est lisse.

(voir [Gro03, II, 5.4])

**Définition IV.5.6.** — On dit qu'un schéma  $X$  est localement factoriel si pour tout point  $x \in X$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est factoriel.

**Remarque IV.5.7.** — 1. Si  $X$  est localement factoriel, il est de plus normal.

2. Si  $A$  est un anneau factoriel,  $\text{Spec}(A)$  est localement factoriel (car la propriété d'être un anneau factoriel est stable par localisation).
3. Tout anneau local régulier  $A$  est factoriel (théorème d'Auslander-Buchsbaum, [Gro67, 21.11.1]). On déduit de l'exemple précédent que tout schéma lisse sur un corps est localement factoriel.
4. Si  $X/k$  est une courbe algébrique normale, alors  $X$  est localement factoriel (cf Définition IV.3.8).

**IV.5.8.** — Considérons maintenant un schéma  $X$  intègre localement factoriel.

Soit  $D$  un diviseur algébrique de  $X$ . Pour tout point  $x$  de  $X$ , posons  $X_{(x)} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$  et notons  $D_{(x)}$  la diviseur algébrique de  $X_{(x)}$  obtenu par restriction de  $D$ .<sup>(10)</sup> Par hypothèse,  $X_{(x)}$  est le spectre d'un anneau factoriel. D'après le point (2) de l'exemple IV.3.16, le diviseur algébrique associé à  $D_{(x)}$  est donc principal : il existe  $f_x \in K^\times$  tel que :

$$D_{(x)} = \text{div}(f_x).$$

Comme  $D$  est une somme finie de points de  $X$  et que  $f_x$  n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles, on peut de plus trouver un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  dans  $X$  telle que l'égalité précédente de cycles algébriques se relève sur  $U_x$  est induit donc une égalité de cycles algébriques sur  $U_x$  :

$$D \cap U_x = \text{div}(f_x)$$

où  $D \cap U_x$  est le diviseur algébrique de  $U_x$  obtenu par restriction de  $D$ .

Supposons effectué le choix de  $(U_x, f_x)$  pour tout point  $x$  de  $X$ . Alors, si  $U_{xy} = U_x \cap U_y \neq \emptyset$ , on obtient :

$$\text{div}(f_x|_{U_{xy}}) = \text{div}(f_y|_{U_{xy}})$$

ce qui implique :  $f_x f_y^{-1}$  est une fonction inversible sur  $U_{xy}$ .

On en déduit que les sous- $\mathcal{O}_X|_{U_x}$ -modules inversibles de  $K_{U_x}$  :

$$\mathcal{O}_X|_{U_x} \cdot f_x$$

se recollent et induisent un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible noté  $\mathcal{L}'_X(D)$ . On vérifie facilement que  $\mathcal{L}'_X(D)$  ne dépend pas du choix de  $(U_x, f_x)_{x \in X}$ . De cette indépendance par rapport au choix, on déduit que  $\mathcal{L}'_X(D)$  ne dépend que de la classe (d'équivalence rationnelle) du diviseur  $D$  et qu'elle est additive par rapport à  $D$ .

On a donc défini un morphisme de groupes abéliens :

$$\mathcal{L}'_X : \text{CH}^1(X) \rightarrow \text{Pic}(X), D \mapsto \mathcal{L}'_X(D).$$

**Théorème IV.5.9.** — Soit  $X$  un schéma localement factoriel.

Avec les notations qui précèdent, le morphisme  $\mathcal{L}'_X$  est un isomorphisme avec pour inverse le morphisme  $\alpha_X$  défini dans la proposition IV.5.4.

Le fait que  $\mathcal{L}'_X$  et  $\alpha_X$  sont des bijections réciproques l'une de l'autre résulte facilement des définitions.

**Exemple IV.5.10.** — 1. Soit  $X$  un schéma localement factoriel et  $j : U \rightarrow X$  un ouvert de  $X$ . Notons que  $\mathcal{L}_X$  est compatible à la restriction à un ouvert.

On déduit donc de la suite exacte (IV.3) que le morphisme suivant est surjectif :

$$j^* : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(U).$$

10. Si  $D = \sum_{i \in I} n_i \cdot x_i$ ,  $D_{(x)} = D = \sum_{i \in I, x_i \in X_{(x)}} n_i \cdot x_i$ .

2. Considérons les notations du point (3) de l'exemple IV.3.19 :  $H$  est donc l'hyperplan à l'infini de  $\mathbb{P}_k^n$ .

Alors,  $\mathcal{L}(H)$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_X(-1)$ . On déduit donc du théorème précédent et de l'exemple *loc. cit.* que le morphisme :

$$\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}_k^n), n \mapsto \mathcal{O}_X(n)$$

est un isomorphisme.

**Définition IV.5.11.** — Par convention, pour tout diviseur algébrique  $D$  sur un schéma localement factoriel  $X$ , on pose :

$$\mathcal{L}_X(D) = \mathcal{L}'_X(-D).$$

**Exemple IV.5.12.** — Cette convention de signe, qui coïncide avec celle de [Har77, II.6], est motivée par le résultat suivant. Soit  $D$  un sous-schéma fermé purement de codimension 1 dans  $X$ , et notons  $\mathcal{I}_D \subset \mathcal{O}_X$  son faisceau d'idéaux. Alors il existe un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -modules :

$$\mathcal{I}_D \simeq \mathcal{L}_X(-D).$$

Cela résulte en effet de la construction effectuée au paragraphe IV.5.8.

**IV.5.13.** — Reprenons les notations de l'exemple IV.5.5 : pour une courbe algébrique propre et normale  $C/k$ , on dispose d'un morphisme degré :

$$\text{deg} : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

qui avec nos conventions est caractérisé de manière unique par la relation :

$$\text{deg}(\mathcal{L}(D)) = \text{deg}(D).$$

**Définition IV.5.14.** — Avec les notations précédentes, on note  $\text{Pic}^0(C)$  le noyau du morphisme degré, qui est donc isomorphe au groupe des classes de diviseurs de degré 0.

**Remarque IV.5.15.** — 1. Nous verrons que le groupe abélien  $\text{Pic}^0(C)$  coïncide avec les points rationnels d'un  $k$ -schéma abélien : il s'agit de la jacobienne de  $C/k$ .  
2. Dans le cas où  $k = \mathbb{C}$ , le morphisme degré obtenu ici coïncide avec le morphisme (III.8) défini précédemment.

La définition précédente et la situation définie dans le point précédent sont donc consistants avec la définition III.2.4.

## Références

- [Bou85] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 5 à 7*. Masson, 1985.
- [Dég09] F. Déglise. Complexes motiviques. (cours M2) <http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/cours.html>, 2009.
- [EGA4] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (20, 24, 28, 32), 1964-1967.
- [Ful98] W. Fulton. *Intersection theory*. Springer, second edition, 1998.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [SGA1] A. Grothendieck et al. *Revêtements étales et groupe fondamental*, volume 3 of *Documents Mathématiques*. Soc. Math. France, 2003. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960–61 (SGA 1). Édition recomposée et annotée du LNM 224, Springer, 1971.

---

*premier semestre 2013*

FRÉDÉRIC DÉGLISE, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364  
LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail* : frederic.deglise@ens-lyon.fr  
*Url* : <http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/>