Table des matières

COURS VII
INTÉGRITÉ GÉOMÉTRIQUE ET RIGIDITÉ

VII.1. Cas des schémas algébriques

VII.1.a. Fonctions rationnelles. — La définition suivante généralise la définition du paragraphe IV.3.1 :

Définition VII.1.1. — Soit X un schéma. On défini l'anneau des *fonctions rationnelles* de X comme l'anneau :

$$R(X) := \varinjlim_{U \subset X} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

où U parcourt l'ensemble filtrant des ouverts partout denses de X.

Exemple VII.1.2. — 1. Soit A un anneau, $X = \mathrm{Spec}(A)$.

On dit qu'un élément $f \in A$ est régulier s'il n'est pas diviseur de 0 dans A. Cela revient à dire que le fermé $\mathrm{Spec}(A/(f))$ de X est partout de codimension 1, ou encore que l'ouvert $\mathrm{Spec}(A[f^{-1})$ de X est partout dense.

Par définition de la topologie Zariski, l'ensemble des ouverts de la forme $\mathrm{Spec}(A[f^{-1}])$ pour $f \in A$ un élément régulier est cofinal dans l'ensemble des ouverts partout denses de X.

Il en résulte que $R(X)$ est isomorphe à l'anneau localisé de A par rapport à l'ensemble multiplicatif S des éléments réguliers de A. Notons que cet anneau est encore appelé *l'anneau total des fractions* de A.

2. Soit X un schéma irréductible, η son point générique. Alors, les ouverts partout denses dans X correspondent aux voisinages ouverts de η dans X. Il en résulte que

$$R(X) = \mathcal{O}_{X,\eta},$$

l'anneau total des fractions de X est égal à l'anneau local du point générique η.

Rappelons au passage que c'est un anneau noethérien de dimension 0 : donc un schéma artinien (voir Example IV.1.2). De plus, sa réduction est égale au corps résiduel de η dans X (cf Example IV.2.2).

Dans le cas où X est intègre, l'anneau $R(X)$ est un corps, égal au corps des fonctions (rationnelles) de X – cf Paragraphe IV.3.1.

3. Soit X un schéma noethérien.

   Alors, X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles $(X_i, i \in I)$. Soit Z la réunion des fermés de la forme $X_i \cap X_j$ pour $i \neq j$. Alors, Z est un fermé partout de codimension supérieure à 1 dans X : autrement dit, l'ouvert $U_0 = X - Z$ est partout dense dans X.

   Pour tout ouvert $U \subset X$ partout dense, $U \cap U_0$ est un ouvert partout dense de X, réunion disjointe de ses composantes irréductibles $U_i := X_i \cap U \cap U_0, i \in I$. Il en résulte :
$$\Gamma(U \cap U_0, \mathcal{O}_X) = \prod_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X).$$
   Si η_i désigne le point générique de X_i de sorte que $\{x_i, i \in I\}$ est l'ensemble (fini) des points génériques de X, on obtient donc :
$$R(X) = \prod_{i \in I} \mathcal{O}_{X,\eta_i}; \tag{VII.1}$$
   l'anneau total des fractions de X coïncide avec le produit des anneaux locaux aux points génériques de X.

Proposition VII.1.3. — *Soit X un schéma noethérien, $R(X)$ son anneau total des fractions.*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *le schéma X est irréductible (resp. réduit, intègre),*

(ii) *l'anneau $R(X)$ est irréductible (resp. réduit, intègre).*

C'est immédiat à partir de l'équation (VII.1).

VII.1.b. Intégrité géométrique. —

VII.1.4. — *Produit tensoriel de corps.*– Soit k un corps de caractéristique p et K, L deux extensions corps de k.

Supposons que K est finie monogène : $K = k[x]$. Si $\pi \in k[t]$ est le polynôme minimal de x, on obtient donc : $K = k[t]/(\pi)$. Le polynôme π est irréductible sur k. Ses racines dans une clôture algébrique de k sont conjuguées. Notons que si x est inséparable, alors $\pi = X^q - a$ où q est une puissance de p. On peut voir π comme un polynôme à coefficients dans L ; il n'est plus nécessairement irréductible. Considérons sa factorisation en polynômes irréductibles dans $L[t]$:
$$\pi = \pi_1^{n_1} ... \pi_r^{n_r}.$$
Si x est inséparable sur k, alors $r = 1$ et n_r est une puissance de p, $n_r > 1$ si a est une racine p-ème de l'unité dans L. Si x est séparable sur k, alors, pour tout indice i, $n_i = 1$.

De cette discussion, on déduit la proposition suivante :

Proposition VII.1.5. — *Soit k un corps de caractéristique p, K une extension finie de k et L une extension de corps quelconque de k.*

Alors, le schéma $X := \operatorname{Spec}(K \otimes_k L)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. *X est de noethérien dimension 0. C'est un ensemble fini.*
2. *Si K/k est séparable, X est réduit.*
3. *Si K/k est totalement inséparable, X est irréductible, réduit à un point.*
4. *Le cardinal de X est majoré par le degré séparable de K/k – degré de la clôture séparable de k dans K.*
5. *La multiplicité géométrique de toute composante irréductible de X est majorée par le degré d'inséparabilité de K/k – degré de la clôture inséparable de k dans K.*

VII.1.6. — *Extensions de corps infinies.*– Soit K/k une extension de corps quelconque de k.

Rappelons que le *degré de transcendance* de K/k, note $\mathrm{degtr}_k(K)$, est la borne supérieure (éventuellement infinie) des entiers d tels qu'il existe une famille $(x_1, ..., x_d)$ d'éléments de K algébriquement indépendants sur k. Si cet entier est fini, égal à d, $(x_1, ..., x_d)$ étant une famille d'éléments algébriquement indépendants, K est une extension algébrique de $k(x_1, ..., x_d)$. (cf [**Bou50**, §5]).

Soit p l'exposant caractéristique de k. On dit que l'extension K/k est radicielle si pour tout $x \in K$, il existe $r > 0$ tel que $x^{p^r} \in k$. On dit que l'extension K/k est *primaire* si la clôture algébrique de k dans K est radicielle sur k.

Soit Ω une clôture algébrique de k, et Ω' le sous-corps de Ω invariant par les k-automorphismes de Ω :

$$\Omega' = \{x \in \Omega \mid \forall \sigma \in \mathrm{Aut}_k(\Omega), \sigma(x) = x\}.$$

On dit que K/k est *séparable* si K est linéairement disjointe (1) de Ω' sur k dans Ω (cf [**Bou50**, §7, n°2]).

Utilisant ces définitions, on peut généraliser la proposition précédente au cas des extensions quelconques comme suit :

Théorème VII.1.7. — *Soit k un corps et K, L deux extensions de corps de k.*

Alors, le schéma $X = \mathrm{Spec}(K \otimes_k L)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. *Si X est noethérien,* $\dim(X) = \min\big(\mathrm{degtr}_k(K), \mathrm{degtr}_k(L)\big)$.
2. *Si K/k ou L/k est primaire, alors X est irréductible.*
3. *Si K/k ou L/k est séparable, alors X est réduit.*

Pour les démonstrations, on renvoie aux ouvrages suivants :

1. [**Gro67**, 4ème partie, remarque (4.2.1.4), p. 349] ;
2. [**Car56**, Théorème 1, p. 14-04] ;
3. [**Bou58**, §7, n°3, th. 1].

Remarque VII.1.8. —
1. Si k est séparablement clos (toute clôture algébrique de k est radicielle), alors la propriété 2 du théorème précédent est toujours vérifiée.
2. Si k est parfait ($k = k^p$ où p est l'exposant caractéristique de k), alors la propriété 3 du théorème précédent est toujours vérifiée.

Des remarques précédentes, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire VII.1.9. — *Soit k un corps algébriquement clos. Alors, pour toute extension de corps K/k et L/k, l'anneau $L \otimes_k K$ est intègre.*

Théorème VII.1.10. — *Soit k un corps et $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Pour tout k-schéma X, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le schéma $\bar{X} := X \times_k \mathrm{Spec}(\bar{k})$ est réduit (resp. irréductible, intègre).*

(ii) *Pour toute extension finie de corps L/k le schéma $X \times_k \mathrm{Spec}(L)$ est réduit (resp. irréductible, intègre).*

(iii) *Pour toute extension de corps L/k le schéma $X \times_k \mathrm{Spec}(L)$ est réduit (resp. irréductible, intègre).*

1. *i.e.* le morphisme $K \otimes_k \Omega' \to \Omega, x \otimes y \mapsto xy$ est injectif.

Démonstration. — On note (P) l'une des propriétés être réduit, irréductible, intègre.

Notons que pour toute extension de corps L/k, l'anneau $R(X \times_k \mathrm{Spec}(L))$ vérifie (P) si et seulement si l'anneau $R(X) \otimes_k L$ vérifie (P). La proposition VII.1.3 nous ramène donc au cas de $\mathrm{Spec}(R(X))$: on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ où A est un anneau artinien.

Le fait que (iii) implique (ii) est trivial.

Rappelons que $\bar{k}$ est réunion filtrante de ses sous-corps $L \subset \bar{k}$ qui sont des extensions finies de k. On en déduit : $A \otimes_k \bar{k}$ est la réunion filtrante des k-algèbres $A \times_k L$ où $L \subset \bar{k}$ est une sous-k-algèbre finie. L'équivalence de (i) et (ii) en résulte.

Il reste à voir que (i) implique (iii). On suppose que $A \times_k \mathrm{Spec}(\bar{k})$ vérifie (P). Soit L' une extension de corps commune de L et $\bar{k}$ (*i.e.* un composé direct de L/k et $\bar{k}/k$). Alors L' est une extension algébrique de L. D'après l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$, il suffit de montrer que $X \times_k \mathrm{Spec}(L')$ vérifie (P).

Quitte à remplacer L par L' on peut donc supposer que L est un extension de $\bar{k}$. Autrement dit, on peut supposer que k est algébriquement clos.

Le théorème est alors conséquence du corollaire précédent :
- si (P)=« intègre », $A = K$ est un corps et on est ramené au corollaire précédent.
- si (P)=« réduit », alors A est un produit de corps. Traitant chacun de ces corps séparément, on est ramené au cas intègre et donc au corollaire précédent.
- si (P)=« irréductible », il suffit de montrer que $X_{red} \times_k L$ est irréductible. Or A_{red} est un corps : le corollaire précédent permet de conclure.

□

Définition VII.1.11. — On dit qu'un k-schéma X est *géométriquement réduit* (resp. *irréductible, intègre, connexe*) si $X \times_k \mathrm{Spec}(\bar{k})$ est réduit (resp. irréductible, intègre, connexe).

Notons que le théorème précédent montre que ces notions sont toutes stables par une extension arbitraire du corps de base. De plus, la propriété d'être géométriquement réduit (resp. *irréductible, intègre*) implique la propriété d'être réduit (resp. *irréductible, intègre*).

VII.1.c. Rigidité des sections globales. —

Proposition VII.1.12. — *Soit X un k-schéma propre et géométriquement intègre.*
Alors, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$.

Démonstration. — On commence par le cas où X est de plus fini sur k. Un morphisme fini étant affine, on a nécessairement $X = \mathrm{Spec}(A)$ pour A une k-algèbre finie. Par hypothèse, sur X, A est intègre. On en déduit en particulier que A est un corps [(2)] extension finie de k. Soit a un élément de A, et π son polynôme minimal de sorte que A contient l'extension de corps $B = k[t]/(\pi)$. Or $\bar{B} = \big(k[t]/(\pi)\big) \otimes_k \bar{k} = \bar{k}^d$ où d est le degré de π. Du fait que $\bar{B}$ est une sous-k-algèbre de $A \otimes_k \bar{k}$, qui est supposé intègre par hypothèse, on déduit que $\bar{B}$ est intègre, ce qui équivaut à dire que $d = 1$, *i.e.* $a \in k$.

Pour le cas général, comme X est propre sur k et d'après le théorème de finitude de la cohomologie des faisceaux cohérents (Paragraphe III.1.14, [Th. 3]), on obtient $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une k-algèbre finie. Or $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k \bar{k} = \Gamma(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ et on déduit du fait que $\bar{X}$ est intègre le fait que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une k-algèbre finie géométriquement intègre. On est donc réduit au cas traité précédemment. □

2. En effet, pour tout $a \in A - \{0\}$, l'endomorphisme k-linéaire $A \to A, x \mapsto a.x$ est injectif et donc bijectif comme A/k est de dimension finie.

Exemple VII.1.13. — Si X est une courbe algébrique propre et lisse sur un corps k algébriquement clos, et si X est connexe, d'après la proposition précédente, il n'y a pas de fonction $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ non constante – une telle fonction correspond à une section $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Cela correspond au fait que toute fonction rationnelle non constante $f : X \to \mathbb{P}^1_k$ est nécessairement surjective (cf Proposition IV.3.12) : elle admet donc nécessairement un pôle.

VII.2. Cas relatif

VII.2.a. Morphismes géométriquement intègres. —

VII.2.1. — Soit S un schéma.

Un *point* s de S est un élément de l'ensemble sous-jacent à S. Il correspond à un morphisme de schémas $\operatorname{Spec}(k) \to S$ d'image s dans S et tel que k est égal au corps résiduel de s dans S. Dans ce cas, on note par la même lettre s le morphisme précédent et l'élément de S qui se correspondent.

Un *point géométrique* de S est un morphisme de schémas de la forme :

$$\bar{s} : \operatorname{Spec}(k) \to S$$

tel que k est un corps algébriquement clos. [3]

Soit $f : X \to S$ et $s : \operatorname{Spec}(k) \to S$ des morphismes de schémas tel que k est un corps. On pose :

$$X_s := X \times_S \operatorname{Spec}(k).$$

Si s est un point de S, l'ensemble sous-jacent à X_s est en bijection avec l'ensemble $f^{-1}(\{s\})$: on l'appelle la *fibre* de f en s. Si $s = \bar{s}$ est un point géométrique de S, on appelle $X_{\bar{s}}$ la *fibre géométrique* de f au point géométrique $\bar{s}$ de S.

Lemme VII.2.2. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout point géométrique $\bar{s} : \operatorname{Spec}(\bar{k}) \to S$, la fibre $X_{\bar{s}}$ est réduite (resp. irréductible, intègre).*

(ii) *pour tout point $s \in X$ de corps résiduel k, la fibre X_s est géométriquement réduite (resp. géométriquement irréductible, géoémtriquement intègre) sur k.*

(iii) *pour tout morphisme $\operatorname{Spec}(k) \to S$ où k est un corps, le schéma $X \times_S \operatorname{Spec}(k)$ est réduit (resp. irréductible, intègre).*

C'est un simple corollaire du théorème VII.1.10.

Définition VII.2.3. — On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to S$ est *géométriquement réduit* (resp. *géométriquement irréductible, géométriquement intègre, géométriquement connexe*) si pour tout point géométrique $\bar{s} : \operatorname{Spec}(\bar{k}) \to S$, la fibre $X_{\bar{s}}$ est réduite (resp. irréductible, intègre, connexe).

Ces trois notions sont de manière évidente stables par changement de base.

Remarque VII.2.4. —

1. Si $S = \operatorname{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps, la définition précédente généralise la définition VII.2.3.
2. Un morphisme lisse est géométriquement réduit : en effet, la notion de lissité étant stable par changement de base, on en réduit au cas où S est le spectre d'un corps k. Alors, X admet une recouvrement par des ouverts U tels qu'il existe un morphisme étale $U \to \mathbb{A}^n_k$. Comme le schéma $\mathbb{A}^n_k$ est réduit, U est nécessairement réduit.

3. On fera attention que dans l'étude de la cohomologie étale, on appelle *point géométrique* un morphisme $\operatorname{Spec}(k) \to S$ tel que k est séparablement clos, ce qui est plus général que la convention adoptée ici.

3. On fera attention que la terminologie de la définition précédente pour les morphismes de schémas ne coïncide pas avec celle des *Éléments de géométrie algébrique* de Dieudonné et Grothendieck (cf [**Gro67**, §4.5, §4.6]).
4. On fera attention que si S irréductible et X/S géométriquement irréductible, alors X n'est pas nécessairement irréductible. Par contre si X/S est géométriquement irréductible et ouvert [(4)], alors S irréductible implique X irréductible (cf [**Gro67**, Lemme (4.4.2) et Remarque (4.4.3)]).

VII.2.b. Foncteurs linéaires et produit tensoriel. —

VII.2.5. — Soit A un anneau commutatif.

Rappelons qu'on dit qu'un A-module M est *noethérien* si toute suite décroissante de sous-A-modules de M est finie.

L'anneau A est noethérien s'il l'est en tant que A-module. Si A est noethérien, on voit facilement que tout A-module de type fini est noethérien.

Commençons par rappeler le lemme de Nakayama :

Lemme VII.2.6. — *Soit A un anneau local de corps résiduel k et M un A-module de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $M = 0$.

(ii) $M \otimes_A k = 0$ *;*

Remarque VII.2.7. — Étant donné un A-module M, nous appellerons *sous-quotient de M* tout A-module N tel qu'il existe un épimorphisme $\phi : P \to N$ de A-modules avec P est un sous-A-module de M. Nous dirons de plus que le sous-quotient N est *propre* si $N \neq M$ ou ϕ n'est pas un isomorphisme.

Nous utiliserons le résultat suivant laissé en exercice : pour tout A-module M, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est noethérien ;

(ii) tout suite $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de A-modules telle que $N_0 = M$ et N_{i+1} est un sous-quotient propre de N_i est nécessairement finie : $N_i = 0$ pour i assez grand.

VII.2.8. — Soit A un anneau commutatif.

Une catégorie $\mathscr{C}$ est dite *A-linéaire* si les conditions suivantes sont satisfaites :

– pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathscr{C}$, l'ensemble des morphismes
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$$
admet une structure de A-modules ;

– pour tous triplet d'objets (X, Y, Z) de $\mathscr{C}$, la composition des morphismes
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z)$$
est A-bilinéaire vis-à-vis des structures de A-module du point précédent.

Étant donné deux catégories A-linéaire $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, on dit qu'un foncteur $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est A-linaire si pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathscr{C}$, le morphisme canonique :
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(T(X), T(Y))$$
est A-linaire.

On appliquera en particulier ces définitions aux catégories $A{-}\mathrm{mod}$ et $A{-}\mathrm{mod}^{tf}$ respectivement des A-modules et des A-modules de type fini.

4. L'image d'une partie ouverte de X est une partie ouverte de S. C'est le cas si X/S est plat.

Si T un endofoncteur de l'une de ses catégories, nous dirons que T est *semi-exact* si pour toute suite exacte de A-module (resp. de type fini)

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

le suite de A-modules

$$T(M') \to T(M) \to T(M'')$$

est exacte.

Lemme VII.2.9. — *Soit A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k. Soit T un endofoncteur de $A-\mathrm{mod}^{tf}$ supposé A-linéaire et semi-exact.*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *pour tout A-module de type fini M, $T(M) = 0$;*

(ii) $T(k) = 0$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que (ii) implique (i).

Soit donc M un A-module de type fini. D'après le paragraphe VII.2.5, M est noethérien. Par induction, on peut supposer que pour tout sous-quotient propre N de M, $T(N) = 0$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé à M : autrement dit un idéal de A qui est un annulateur d'un élément de x de M et qui est maximal pour cette propriété (il est alors nécessairement premier ; cf par exemple [**Dég09**, Déf. III.1]).

Par définition, le noyau du morphisme

$$\delta_x : A \to A, a \mapsto a.x$$

est donc l'idéal $\mathfrak{p}$. Si on note $A.x$ le A-module image de δ_x, on obtient donc un isomorphisme : $A/\mathfrak{p} \simeq A.x$.

Notons que $A.x$ est un sous-A-module non nul de M. En particulier, le quotient $M/A.x$ est un sous-quotient propre de M : l'hypothèse d'induction montre que $T(M/A.x) = 0$. Comme T est semi-exact, on obtient par ailleurs une suite exacte de A-modules :

$$T(A.x) \to T(M) \to (T(M/A.x) = 0).$$

Il suffit donc de montrer que $T(A.x) = 0$.

Si $\mathfrak{p}$ est maximal, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, alors la propriété (i) permet de conclure du fait que $A.x = A/\mathfrak{p} = A/\mathfrak{m}$.

Dans le cas contraire, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. Soit $u \in (\mathfrak{m} - \mathfrak{p})$. Pour tout A-module N, on note γ_u le morphisme suivant :

$$N \to N, z \mapsto u.z.$$

Du fait que $A.x = A/\mathfrak{p}$ est un anneau intègre et que u est non nul modulo $\mathfrak{p}$, on obtient une suite exacte courte :

$$0 \to A.x \xrightarrow{\gamma_u} A.x \to A.x/A.(ux) \to 0.$$

Or le A-module $A.x/A.(ux)$ est un quotient propre de $A.x$ qui est un sous-A-module de M. Autrement dit, $A.x/A.(ux)$ est un sous-quotient propre de M. Par hypothèse d'induction noethérien, on en déduit : $T(A.x/A.(ux)) = 0$. Ainsi, a semi-exactitude de T pour la suite exacte courte précédente, montre que le morphisme suivant

$$T(\gamma_u) : T(A.x) \to T(A.x)$$

est un épimorphisme : autrement dit, $u.T(A.x) = T(A.x)$, ce qui implique $\mathfrak{m}.T(A.x) = T(A.x)$, d'où $T(A.x) \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0$ et donc $T(A.x) = 0$ d'après le lemme VII.2.6. $\square$

VII.2.10. — Reprenons les notations du lemme précédent.

Du fait que T est A-linéaire, on obtient par définition un morphisme de A-modules :

$$M = \mathrm{Hom}_A(A, M) \to \mathrm{Hom}_A(T(A), T(M))$$

naturel en M. Or le produit tensoriel par le A-module $T(A)$ est adjoint à gauche foncteur $\mathrm{Hom}_A(T(A), -)$. On déduit donc du morphisme précédent un unique morphisme :

$$\gamma_M : T(A) \otimes_A M \to T(M)$$

qui encore naturel en M.

Théorème VII.2.11. — *Considérons un anneau local noethérien A et un endofoncteur T de $A-\mathrm{mod}^{tf}$ qui est A-linéaire, additif et semi-exact.*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *T est exact à droite ;*

(ii) *pour tout A-module M, γ_M est un isomorphisme ;*

(iii) *pour tout A-module M, γ_M est un épimorphisme ;*

(iv) *le morphisme canonique $T(A) \to T(k)$ est un épimorphisme.*

Démonstration. — Les implications $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ sont claires.

On commence par montrer que (i) implique (ii). Comme M est un A-module de type fini et A est noethérien, il existe une suite exacte courte de la forme :

$$A^s \to A^r \to M \to 0$$

où s et r sont des entiers positifs. On obtient donc un diagramme commutatif de A-modules :

$$\begin{tikzcd}
T(A) \otimes_A A^s \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{A^s}"'] & T(A) \otimes_A A^r \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{A^r}"'] & T(A) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_M"'] & 0 \\
T(A^s) \arrow[r] & T(A^r) \arrow[r] & T(M) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Du fait que T est exact à droite, les lignes horizontales sont des suites exactes. Du fait que T est additif, les morphismes γ_{A^s} et γ_{A^r} sont des isomorphismes. On en déduit que γ_M est un isomorphisme (lemme du serpent).

Montrons que (iv) implique (i). Pour tout A-module M, on pose $Q(M) = \mathrm{coKer}(\gamma_M)$. Il en résulte que Q est un endofoncteur semi-exact et A-linéaire de A–mod^{tf}. La propriété (iv) implique que $Q(k) = 0$. Le lemme précédent montre donc que $Q = 0$: pour tout A-module de type fini M, γ_M est un épimorphisme.

Étant donné une suite exacte à droite :

$$M' \to M \to M'' \to 0,$$

on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T(A) \otimes_A M' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{M'}"'] & T(A) \otimes_A M^r \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_M"'] & T(A) \otimes_A M'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{M''}"'] & 0 \\
T(M') \arrow[r] & T(M) \arrow[r] & T(M'') \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Or, du fait que le foncteur $(T(A) \otimes_A -)$ est exact à droite, la ligne horizontale supérieure est exacte. On déduit donc du fait que $\gamma_{M''}$ est un épimorphisme et de la semi-exactitude de T que la suite horizontale inférieure est exacte. □

VII.2.12. — Considérons encore un anneau commutatif A. Soit $A-\mathrm{mod}$ la catégorie des A-modules.

Rappelons que la catégorie A–mod admet des limites inductives quelconques : pour tout foncteur $M : \mathcal{I} \to A-\mathrm{mod}, i \mapsto M_i$, il existe un A-module M_∞ muni pour tout $i \in \mathcal{I}$ de morphismes A-linéaires

$$\phi_i : M_i \to M_\infty$$

tel que pour tout flèche $f : i \to j$ dans $\mathcal{I}$, le diagramme suivante commute :

(VII.2)
$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[d, "M(f)"'] \arrow[dr, "\phi_i"] & \\ & M_\infty; \\ M_j \arrow[ur, "\phi_i"'] & \end{tikzcd}$$

et M_∞ est universel (initial) parmis les A-modules vérifiant ces propriétés. On note :

$$M_\infty := \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} M_i$$

et on l'appelle la limite inductive du foncteur M. On dit que la catégorie $\mathcal{I}$ est *filtrante à droite* si elle est non vide et pour tout couple d'objets (i, j) de $\mathscr{C}$, il existe un objet k de $\mathscr{C}$ est des flèches de $\mathscr{C}$ de la forme $i \to k$, $j \to k$. On dit encore que M_∞ est une *limite inductive filtrante.*

Considérons un endofoncteur T de $A-\mathrm{mod}$ et un foncteur $M : \mathcal{I} \to A-\mathrm{mod}$ noté comme ci-dessus. Alors, pour tout objet i de $\mathcal{I}$, on obtient un morphisme A-linéaire :

$$T(\phi_i) : T(M_i) \to T(M_\infty).$$

La commutativité des diagrammes du type (VII.2) et la propriété universelle de la limite inductive donne donc une flèche canonique :

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} T(M_i) \to T(M_\infty) = T\left(\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} M_i\right).$$

Nous dirons que T *commute aux limites inductives* (resp. *filtrantes*) si cette flèche canonique est un isomorphisme pour tout foncteur $M : \mathcal{I} \to A-\mathrm{mod}$ (resp. tel que $\mathcal{I}$ est filtrante à droite).

Lemme VII.2.13. — *Soit T un endofoncteur de A–mod. On suppose que T commute aux limites inductives filtrantes.*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *pour tout A-module M, $T(M) = 0$;*

(ii) *pour tout A-module de type fini M, $T(M) = 0$.*

C'est une conséquence immédiate du fait que tout A-module M est réunion filtrante (donc en particulier limite inductive filtrnate) de ses sous-A-modules de type fini.

Remarque VII.2.14. — Si T est un foncteur qui admet un adjoint à droite, alors T commute aux limites inductives.

VII.2.15. — Notons que pour un endofoncteur A-linéaire T de $A-\mathrm{mod}$, les considérations du paragraphe VII.2.10 permettent encore d'obtenir une transformation naturelle en M :

$$\gamma_M : T(A) \otimes_A M \to T(M).$$

Le lemme précédent nous permet d'étendre le théorème VII.2.11 comme suit :

Corollaire VII.2.16. — *Soit A un anneau local noethérien et T un endofoncteur A-linéaire de $A-\mathrm{mod}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

– *Pour tout A-module de type fini M, $T(M)$ est un A-module de type fini ;*

– *T commeute aux limites inductives filtrantes.* [5]

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *T est exact à droite ;*

5. Il est donc en particulier additif.

(ii) *pour tout A-module M, γ_M est un isomorphisme ;*

(iii) *pour tout A-module M, γ_M est un épimorphisme ;*

(iv) *le morphisme canonique $T(A) \to T(k)$ est un épimorphisme.*

En effet, le lemme précédent nous permet de nous ramener au cas de l'endofoncteur T_0 de $A-\mathrm{mod}^{tf}$ obtenu par restriction de T.

VII.2.c. Théorème de rigidité. —

VII.2.17. — On aura besoin d'une généralisation du théorème de finitude cohomologique rappelé dans le Th. 3 du paragraphe III.1.14. On l'appliquera au cas où X est un schéma propre sur $\mathrm{Spec}(A)$ pour un anneau noethérien A. Alors, si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, pour tout entier $n \geq 0$, le groupe abélien $H^m(X, \mathcal{F})$ est un A-module. De plus :

Th. 3'. Si X est un A-schéma propre, alors $H^m(X, \mathcal{E})$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Dans le théorème qui suit, nous n'auront besoin que du cas $m = 0$.

Le théorème suivant est un corollaire du Th. 3' pour $m = 0$ et une généralisation de la proposition III.1.25.

Théorème VII.2.18. — *Soit S un schéma noethérien et $f : X \to S$ un morphisme propre, plat, géométriquement intègre.*

Alors, le morphisme canonique :

$$f^\sharp : \mathcal{O}_S \to f_*(\mathcal{O}_X)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Notons que pour tout ouvert $U \subset S$, si l'on note $f_U : V \to U$ le changement de base de f au-dessus de U, on obtient un diagramme commutatif de faisceaux sur U :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S|_U & \xrightarrow{f^\sharp|_U} & f_*(\mathcal{O}_X)|U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_U & \xrightarrow{g^\sharp} & g_*(\mathcal{O}_V) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes.

Par ailleurs, pour vérifier que $f^\sharp$ est un isomorphisme de faisceaux sur S, il suffit de le vérifier sur les fibres aux points de S. La compatibilité dégagée précédemment nous ramène donc au cas des schémas $S_{(s)} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ pour un point $s \in S$ et au morphisme $f_{(s)} = f \times_S S_{(s)}$.

Autrement dit, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$ où A est un anneau local noethérien. Alors, $\mathcal{O}_X$ est un faisceau de A-modules. Du fait que X est plat sur S, on obtient de plus que pour tout ouvert U de X, $\mathcal{O}_X(U)$ est un A-module plat. En particulier, le préfaisceau sur X :

$$(U \subset S) \mapsto \mathcal{O}_X(U) \otimes_A M$$

est un faisceau. On le note simplement : $\mathcal{O}_X \otimes_A M$. On considère le foncteur suivant :

$$\begin{array}{rcl} T : A-\mathrm{mod} & \to & A-\mathrm{mod} \\ M & \mapsto & \Gamma(X, \mathcal{O}_X \otimes_A M). \end{array}$$

Notons que si M est un A-module de type fini, alors $\mathcal{O}_X \otimes_A M$ est un faisceau cohérent sur X. On déduit donc du Th. 3' ci-dessus (par. VII.2.17) que $T(M)$ est un A-module de type fini. Par définition, le foncteur T est semi-exact, A-linéaire et commute aux limites inductives. [6]

6. Du fait que $\mathcal{O}_X$ est un faisceau de A-modules plats, on déduit que le foncteur $M \mapsto \mathcal{O}_X \otimes_A M$ est exact et commute aux limites inductives. Il est bien sûr A-linéaire. Par ailleurs, le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ est A-linéaire, semi-exact et commutes aux limites inductives. On en déduit l'assertion sur T.

Autrement dit, le foncteur T satisfait les hypothèses du corollaire VII.2.16. Pour voir qu'il est exact à droite, il suffit donc de voir que le morphisme canonique :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = T(A) \xrightarrow{\pi} T(k) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X \otimes_A k)$$

est un épimorphisme. Or, si l'on pose $X_0 = X \times_S \mathrm{Spec}(k)$, on obtient :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X \otimes_A k) = \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = k$$

la dernière égalité résultant de la proposition III.1.25 appliquée au k-schéma propre géométriquement intègre X_0. Le fait que π est surjectif résulte donc du fait que la composée suivante :

$$A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S) \xrightarrow{f^*} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\pi} \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = k$$

est la surjection canonique.

Le corollaire VII.2.16 montre donc que T est exact à droite, donc exact puisqu'on a déjà vu que T commute aux limites inductives. De plus, pour tout A-module M,

$$T(M) = T(A) \otimes_A M.$$

L'exactitude de T montre que le A-module de type fini $T(A)$ est plat sur. Comme A est un anneau local, on en déduit que $T(A)$ est libre de rang fini. Or on vient de voir que $T(A) \otimes_A k = k$. On en déduit donc $T(A) = A$.

Le faisceau $f_*(\mathcal{O}_X)$ est quasi-cohérent sur S.[(7)] C'est donc le faisceau de $\mathcal{O}_S$-module associé au A-module $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = T(A) = A$ (voir Exemple II.2.2). Ainsi, $f_*(\mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{O}_S$-module inversible. La section canonique $\mathcal{O}_S \to f_*(\mathcal{O}_X)$ est donc nécessairement un isomorphisme. □

Remarque VII.2.19. — Le *théorème de connexion de Zariski* permet de donner une réciproque à ce théorème. Plus précisément :

Soit S un schéma noethérien et $f : X \to S$ un morphisme propre tel que $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$. Alors, f est géométriquement connexe (Définition VII.2.3 ; voir [**Gro63**, 4.3.2 et 4.3.4] pour la démonstration de ce dernier résultat).

Références

[Bou50] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 5.* Hermann, 1950.

[Bou58] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 8.* Hermann, 1958.

[Car56] P. Cartier. Extensions régulières. In *Séminaire Henri Cartan, 8*, volume Exposé No. 14, pages (14–01)–(14–10). `http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A14_0`, (1955-1956).

[Dég09] F. Déglise. Complexes motiviques. (cours M2) `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/cours.html`, 2009.

[EGA3] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de jean dieudonné) : III. étude cohomologique des faisceaux cohérents. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11, 17), 1961, 1963.

[EGA4] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de jean dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (20, 24, 28, 32), 1964-1967.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

7. Il est bien sûr cohérent car f est propre. La stabilité de la quasi-cohérente pour f_* est un fait beaucoup plus élémentaire. Voir par exemple [**Har77**, Prop. II.5.8].

premier semestre 2013

FRÉDÉRIC DÉGLISE, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* frederic.deglise@ens-lyon.fr
Url : http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/