Conquête de l'espace mathématique

Frédéric Déglise

21 mars 2014

Euclide :

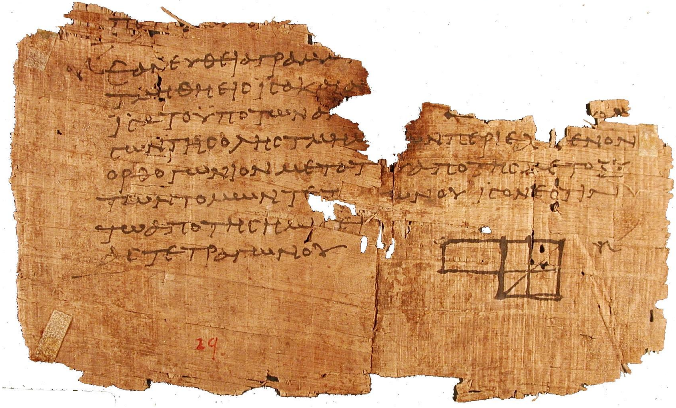
- IIIème siècle av. J.C.
- contemporain des disciples de Platon (Aristote ?)
- se rend à Alexandrie (Égypte) sous Ptolémée ?

Son œuvre majeure :

Les Éléments, (Stoïkheïa, Στοικεία) :

- 13 livres (soit environ 15 rouleaux de papyrus)
- des milliers de copies manuscrites, rééditions, commentaires (du Ier au XXème siècle)

papyrus (fragment), Oxyrhynque (Égypte), Ier siècle ap. J.C.



Les Éléments, (Stoïkheïa, στοιχεία) :

- 13 livres (soit environ 15 rouleaux de papyrus)
- des milliers de copies manuscrites, rééditions, commentaires (du Ier au XXème siècle)

codex (complet), Bibliothèque du Vatican, Xème siècle ap. J.C.

Les Éléments, (Stoïkheïa, Στοιςεία) :

- 13 livres (soit environ 15 rouleaux de papyrus)
- des milliers de copies manuscrites, rééditions, commentaires (du Ier au XXème siècle)

Les Élements contiennent <u>130 définitions</u> (35 dans le livre I).

Définition

1. Un **point** est ce dont il n'y a aucune partie.
2. Une **ligne** est une longueur sans largeur.
4. Une **ligne droite** est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.
23. Des **droites parallèles** sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

Les Élements contiennent 5 postulats, tous dans le livre I.

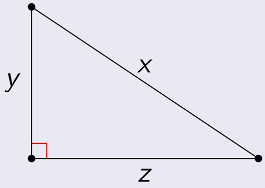
Postulats

Qu'il soit demandé :

1. de mener une ligne droite de tout point à tout point ;
2. de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée ;
5. étant donnée une droite D et un point A, il existe une et une seule droite parallèle à D et contenant A. (*reformulation de Proclus*)

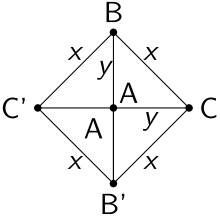
Les Élements contiennent 465 propositions !

Théorème (livre I, Prop. 47, **de Pythagore**)



$$x^2 = y^2 + z^2$$

Preuve dans le cas isocèle : ($y = z$, angle $\widehat{ACB} = 45°$)



Aire de ABC :

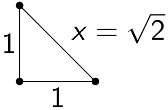
$1/2.y^2$

Aire de $BCB'C'$:

x^2

Donc : $x^2 = 4.1/2.y^2 = 2.y^2$ c.q.f.d.

L'espace mathématique créé par Euclide permet de découvrir *des nombres*.



D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 = 2.1^2 = 2$$

$\Rightarrow$ la première crise des Mathématiques :

Théorème (Grèce, Vème siècle - livre X, Prop. 117)

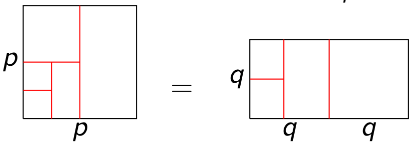
$\sqrt{2}$ *n'est pas un rapport de deux nombres entiers : il est* ***irrationnel****.*

Théorème (Grèce, Vème siècle - livre X, Prop. 117)

$\sqrt{2}$ n'est pas est un rapport de deux nombres entiers : il est **irrationnel**.

Sinon : il existe des nombres entiers p et q tels que : $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

Donc $p^2 = 2.q^2$:



On raisonne sur le degré de parité :

- il existe un entier r tel qu'on peut diviser p par 2 exactement r fois, donc on peut diviser p^2 par 2 exactement $2r$ fois (figure $r = 2$).
- Il existe un entier s tel qu'on peut diviser q par 2 exactement s fois, donc on peut diviser q^2 par 2 exactement $2s$ fois (figure $s = 1$).
- Donc on peut diviser $2.q^2$ par 2 exactement $2s + 1$ fois. C'est impossible : $2r = 2s + 1$, le pair devient impair ! [1]

1. *cf.* Aristote, Analytiques I, 23 (d'après S. Ofman)

Descartes :

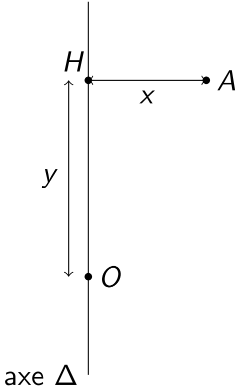
- 1596-1650
- mathématicien, physicien et philosophe français.

Son œuvre mathématique :

La géométrie,

- appendice au **Discours de la méthode** (1637),
- 3 livres, 70 pages.

On se donne un axe Δ et une origine O :



On peut alors repérer tout point de l'espace par deux quantités :

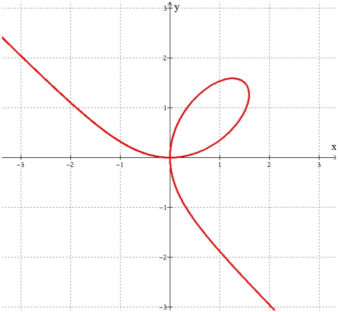
- la distance x à la droite Δ (maintenant : l'**abscisse**)
- l'*ordre* y de H sur Δ, soit sa distance p/r à O (d'où le mot **ordonnée**)

On peut alors décrire les figures d'Euclide par leur équation :

droites :
$y = ax + b$

cercles :
$x^2 + y^2 = a$

et de nouvelles figures :



folium de Descartes :
$x^3 + y^3 = xy$

Définition (Descartes)

Les **courbes géométriques** (planes) sont les figures formés des points (x, y) satisfaisant une relation de la forme :

$$a_{00} + a_{10}.x + a_{01}.y + a_{11}.xy + \ldots + a_{nm}.x^n y^m = 0$$

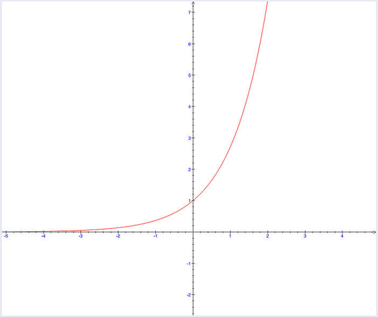
pour des quantités données $a_{00}, \ldots, a_{nm}$.

De nos jours, on parle de **courbes algébriques**.

- Descartes réduit ainsi tout problème géométrique à un simple calcul : il en déduira de nouveaux résultats (problème de Pappus).
- Il rejette hors du champs de sa géométrie les courbes qui ne sont pas de la forme précédente, qu'il qualifie de *mécanique* (on dit maintenant : **courbes transcendantes**).

Exemple

Une courbe transcendante :



l'exponentielle : $y = \exp(x)$

Elle croit plus vite que n'importe quelle courbe algébrique.

Retentissement énorme au XXème siècle, la **géométrie algébrique** :
(*principe*) La géométrie de Descartes garde un sens même si on se restreint à certains types de nombres.

Exemple

On se restreint aux nombres rationnels :

- cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 1$:
  plusieurs solutions : $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}), \ldots$ (en effet : $3^2 + 4^2 = 5^2$, ...)
- courbe algébrique d'équation : $x^n + y^n = 1$, $n \geq 3$:
  Le théorème de Fermat-Wiles affirme qu'il *n'existe pas* de solution rationnelle.
  Conjecturé par Fermat (XVIIème), preuve achevée par Wiles (1995).

5ème Postulat d'Euclide : Étant donné une droite D et un point A, il existe une et une seule droite parallèle à D et contenant A.

Tentatives de démonstration :

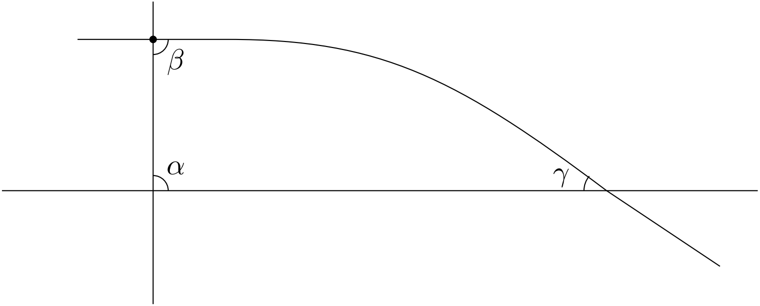
- Ptolémée (IIème av. JC), Proclus (Vème), Aganis (VIème),
- al-Haytam(965-1040), al-Mutaman(XIème), al-Khayyam(1048-1131),
- Gersonide (1288-1344),
- Wallis (1616-1703), Saccheri (1677-1733),...

Saccheri

Euclides ab omni naevo vindicatus

(Euclide lavé de toute tache), 1733.

Raisonnement par l'absurde :

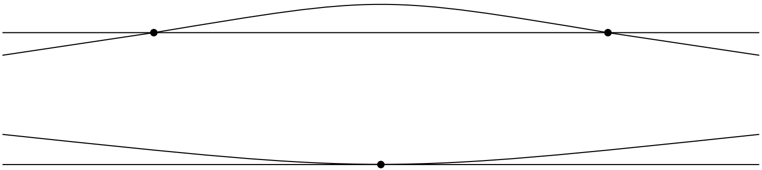


Alors : $\alpha + \beta + \gamma > 180°$. Absurde ?

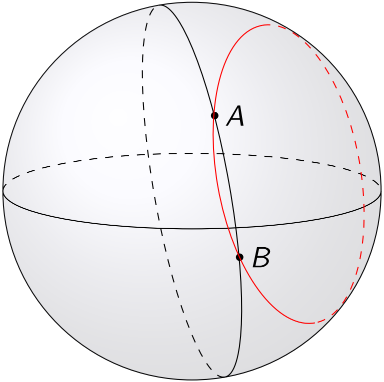
Saccheri

Euclides ab omni naevo vindicatus (Euclide lavé de toute tache), 1733.

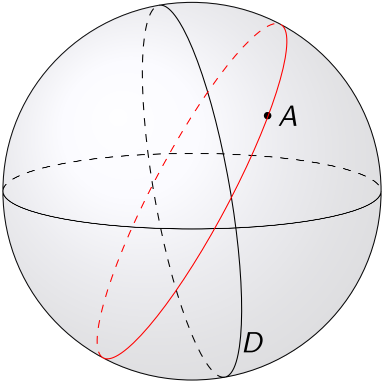
Poussant plus loin le raisonnement, on trouve qu'il peut y avoir deux types de parallèles *délictueuses* :



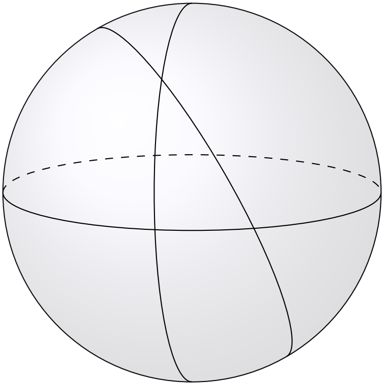
Il suffit d'avoir les pieds sur Terre !



Les lignes droites sur terre sont des cercles !
Étant donné deux points A et B,
plus court chemin de A à B : grand cercle (**géodésique**), ~~cercle rouge~~.
$\Rightarrow$ Les lignes droites sont les grands cercles (passant par 2 points opposés).

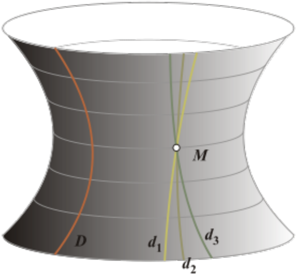


5ème postulat d'Euclide : une droite D, un point A, toute droite passant par A coupe nécessairement D.



Dans la géométrie sphérique, la somme des angles d'un triangle fait toujours plus de 180° :
on dit que la sphère est une **surface courbée positivement**.

On se rend compte qu'il existe plusieurs géométries cohérentes :



géométrie hyperbolique (*courbure négative*) :
il existe une infinité de droite parallèle à D.

Riemann (1826-1866) invente une géométrie rendant compte notamment de la notion de courbure.
On définit les objets géométriques *localement* à l'aide d'une ou plusieurs coordonnées cartésiennes $(x, y, z, t, \ldots)$.

Plus de 2 millénaires après Euclide, la contradiction ayant été acceptée, on découvre un espace mathématique infiniment plus vaste :

- des espaces mathématiques (**variétés**) définis par diverses propriétés (courbure, dimension (nombre de coordonnées), type de nombres autorisés,...) rendant compte d'une géométrie particulière : différentielle, analytique, topologique, algébrique, symplectique,...
- Einstein utilisera cette généralisation : l'espace physique qu'il décrit dans la théorie de la relativité a 4 dimensions, la 4ème étant le temps.