Table des matières

COURS VIII
SPECTRES ORIENTÉS

VIII.1. K-théorie

VIII.1.a. Fibrés vectoriels. —

VIII.1.1. — Rappelons l'exemple II.2.3(3) : pour un espace fixé F, un*fibré topologique* de fibre F est un morphisme $p : E \to B$ tel que pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b dans B et un homéomorphisme $\varphi_U : p^{-1}(U) \to U \times F$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F, \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

où p_1 est la première projection. On dit encore que (U, φ_U) est une *trivialisation locale* de p au voisinage de b. Notons que φ_U induit notamment un homéomorphisme canonique :

$$\varphi_{U,b} : p^{-1}(b) \to F.$$

Définition VIII.1.2. — Soit K un corps topologique.

Un *fibré K-vectoriel*[1] $p : E \to B$ de rang n est un fibré topologique de fibre $F = K^n$ (muni de sa topologie produit) tel que pour tout $b \in B$, et toutes trivialisations locales (U, φ_U), (V, φ_V) de p en b, l'isomorphisme suivant :

$$F \xrightarrow{\varphi_{U,b}^{-1}} p^{-1}(b) \xrightarrow{\varphi_{V,b}^{-1}} F$$

est K-linéaire.

Plus généralement, un *fibré K-vectoriel* E sur un espace B est un espace muni d'un morphisme $p : E \to B$ tel que sur chaque composante connexe par arc B' de B, p est un fibré K-vectoriel de dimension n pour un entier donné n.

Notons en particulier que pour tout $b \in B$, $p^{-1}(b)$ a une structure de K-espace vectoriel canonique, obtenue en considérant un isomorphisme $\varphi_{U,b}$ quelconque. La fonction qui à un point de B associe le rang de $p^{-1}(b)$ sur K est appelé le rang de E/B ; c'est une fonction localement constante (constante sur chaque composante connexe par arc de B).

Un fibré K-vectoriel de rang 1 est appelé un *fibré en droites* ou encore *fibré inversible.*

1. Dans le cas $K = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$) on parle de fibré vectoriel réel (resp. complexe, symplectique).

Exemple VIII.1.3. — 1. Il n'existe à homéomorphisme près qu'un seul fibré K-vectoriel de dimension 0, homéomorphe à B en tant qu'espace. On le note simplement 0.

2. Rappelons (cf. III.1.9) que l'espace projectif complexe de dimension n est défini topologiquement par la formule :
$$\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*.$$
Si $[x]$ est un point de $\mathbb{CP}^n$, x correspond à un élément $x \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ bien défini modulo un scalaire, autrement dit à un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel $L_x \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de dimension 1. On en déduit un espace
$$\lambda_n := \big\{([x], L_x) \mid x \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\big\}$$
et la projection évidente $\lambda_n \to \mathbb{CP}^n$ fait de λ un fibré en droites complexe sur $\mathbb{CP}^n$.

   De manière évidente, la même discussion vaut si l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}$.

3. Si M est une variété différentielle réelle (resp. complexe) lisse [(2)] (resp. analytique), son fibré tangent T_M admet une structure de fibré vectoriel réel (resp. complexe).

4. Une variété différentielle réelle est dite *presque-complexe* si son fibré tangent T_M admet une structure de fibré vectoriel complexe — une telle structure est appelée une structure presque complexe sur M.

VIII.1.4. — Rappelons qu'on parle d'un B-espace X pour un morphisme $p : X \to B$, et on appelle p le morphisme structural de p. Pour un point $b \in B$, la fibre de X au-dessus de b est l'espace $X_b := p^{-1}(b)$.

Définition VIII.1.5. — Soit E et F deux fibrés K-vectoriels sur un espace B. Un morphisme de E dans F est un morphisme de B-espaces $f : E \to F$ tel que pour tout $b \in B$, le morphisme induit $f_b : E_b \to F_b$ est K-linéaire.

On notera $V_K(B)$ la catégorie des fibré K-vectoriels sur B.

VIII.1.6. — Soit $f : Y \to X$ une application continue.

Pour tout fibré K-vectoriel E sur X, considérons le carré cartésien (dans la catégorie des espaces topologiques) suivant :
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X. \end{tikzcd}$$
On vérifie facilement que F est un K-espace vectoriel sur X. On l'appelle *l'image inverse de E par f* (on parle aussi de *changement du base de E suivant f*) et on le note $f^{-1}(E)$.

On dit aussi que φ est un *f-morphisme* de fibrés K-vectoriels.

Exemple VIII.1.7. — Soit $f : M \to N$ un morphisme de variétés différentielles lisses. On dit que f est lisse si et seulement si f est donné localement par des morphismes C^∞ entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

Alors, f induit un morphisme $Tf : TM \to TN$ entre les espaces tangents qui se factorise comme suit :
$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "\varphi_f"'] \arrow[rr, bend left, "Tf"] \arrow[dr] & f^{-1}(TN) \arrow[r] \arrow[d] & TN \arrow[d] \\ & M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

2. ici, lisse signifie de classe C^∞ ;

où φ_f est un morphisme de fibrés vectoriels réels et le carré est cartésien. De plus, f est une submersion (resp. immersion) si et seulement si Tf est surjectif (resp. injectif) fibres à fibres.

Le même exemple vaut pour les variétés analytiques.

VIII.1.b. Torseurs, fibrés principaux, classifiants. —

VIII.1.8. — Considérons un fibré K-vectoriel $p : E \to X$ de rang n. Soit (U, φ_U) et (V, φ_V) des trivialisations locales de E/X au voisinage d'un même point $x \in X$. D'après la définition, le morphisme suivant :

$$t_{UV} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi_U^{-1}} p^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_V} (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire. Autrement dit, f_{UV} est un morphisme continu :

$$t_{UV} : U \cap V \to \mathrm{GL}(n, K).$$

Si on se donne des trivialisations locales sur des voisinages ouverts U, V et W de x, on a de plus la relation suivante, dite de *cocyle*, pour tout $y \in U \cap V \cap W$:

$$t_{UW}(y) = f_{UV}(y).f_{VW}(y). \tag{VIII.1}$$

Si on choisit un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X, et que l'on pose $t_{ij} = t_{U_i, U_j}$, on dit que le couple de familles $t = (U_i, t_{ij})$ forme un $\mathrm{GL}_n(F)$-torseur.

Par ailleurs, on peut définit un faiseau de groupes (non abéliens) sur l'espace X :

$$\mathrm{GL}(n, K)_X : U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(U, \mathrm{GL}(n, K)).$$

Alors, t est un élément en degré 1 du complexe de Čech associé au recouvrement ouvert $U_\bullet$ et au faisceau $\mathrm{GL}(n, K)_X$:

$$\oplus_i \Gamma(U_i, \mathrm{GL}(n, K)_X) \xrightarrow{d_0} \oplus_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathrm{GL}(n, K)_X) \xrightarrow{d_1} \oplus_{i,j,k} \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathrm{GL}(n, K)_X),$$

et la relation de cocyle (VIII.1) signifie exactement que $d_1(t) = 0$.

Les fonctions t_{ij} code la manière de recoller les esapces $\mathbb{R}^n$ suivant la topologie de X afin de retrouver le fibré E/X. Cela se traduit par le théorème suivant :

Proposition VIII.1.9. — *Considérons les notations précédentes. On note $[\mathscr{V}_K^n(X)]$ l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés K-vectoriels de rang n sur X.*

L'application précédente,

$$E/X \mapsto (U_i, t_{ij})$$

induit une bijection canonique, fonctorielle en X :

$$[\mathscr{V}_K^n(X)] \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X, \mathrm{GL}(n, K)_X).$$

Remarque VIII.1.10. — Ce théorème (ou plutôt cette formulation) est plus couramment utilisée en géométrie algébrique. En topologie on place plus volontiers par la notion de fibré principal associé à un groupe topologique G (ici, $G = \mathrm{GL}(n, K)$).

On rappelle cette définition pour la culture. Soit $p : T \to X$ un X-espace et G un groupe topologique. Un action continue à droite de G sur T/X — ou sur T relativement à X — est la donnée d'une application continue

$$T \times G \xrightarrow{\delta} T$$

telle que pour tout $g \in G$, si l'on note

$$\delta_g : T \to T, t \mapsto \delta(t, g)$$

le morphisme δ_g est un morphisme de X-espaces et on a les relations :

$$\delta_g \circ \delta_h = \delta_{hg}, \delta_{1_G} = \mathrm{Id}_T.$$

Un morphisme $f : T' \to T$ de X-espaces est dit G-*équivariant* si le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} T' \times G \arrow[r, "f\times \mathrm{Id}_G"] \arrow[d, "\delta^{T'}"'] & T \times G \arrow[d, "\delta^T"] \\ T' \arrow[r, "f"] & T. \end{tikzcd}$$

Un *fibré principal* sur X sous le groupe [3] G est un fibré topologique $p : T \to X$ de fibre G muni d'un action à droite continue de G sur T relativement à X tel que pour toute trivialisation locale (U, φ_U) de T/X, le morphisme :

$$p^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi_U} U \times G$$

est G-équivariant, où l'on fait agir un élément $g \in G$ sur $U \times G$ par (Id_U, g).

On peut étendre le théorème précédent en une bijection entre :
- les fibrés K-vectoriels sur X de rang n à isomorphismes près,
- les classes de $GL(n, K)$-torseurs sur X (*i.e.* les éléments de $H^1(X, \mathrm{GL}(n, K)_X)$),
- les fibrés principaux sur X sous le groupe $GL(n, K)$.

On renvoie à [**Swi75**, 11.16 et 11.20] pour cette équivalence — qui démontre en particulier le théorème.

Notons que la cohomologie de Čech considérée ci-dessus a un sens si l'on remplace $\mathrm{GL}(n, K)$ par nimporte quel groupe topologique G. L'équivalence des deux dernières propriétés est alors vraie pour un groupe topologique quelconque G.

Exemple VIII.1.11. — 1. Tout fibré vectoriel sur un espace contractile X est trivial (isomorphe à un fibré de la forme $X \times \mathbb{R}^n$).

2. Considérons le cercle $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$, vu comme réunion des deux ouverts contractiles $U = S^1 - \{1\}$, $V = S^1 - \{-1\}$. On peut voir en utilisant le théorème précédent qu'un fibré vectoriel réel E sur S^1 revient à se donner le signe du déterminant de l'élément $t_{UV} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour le $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-torseur associé à E.

   Autrement dit, $[\mathscr{V}_\mathbb{R}(S^1)] = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   Au contraire, on peut voir qu'un fibré vectoriel complexe est nécessairement isomorphe à un fibré trivial : $[\mathscr{V}_\mathbb{C}(S^1)] = 0$.

Plus généralement, la cohomologie de Čech a des propriétés analogues à celles de la cohomologie singulière. En utilisant le même procédé que celui de la construction des espaces d'Eilenberg-Mac Lane, on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème VIII.1.12. — *Soit G un groupe topologique.*

Pour tout groupe topologique G, il existe un CW-complexe pointé BG qui représente le foncteur $X \mapsto \check{H}^1(X, G_X)$ de cohomologie de Čech : autrement dit, pour tout espace X,

$$[X_+, BG]_* \simeq \check{H}^1(X, G_X).$$

On peut reformuler ce théorème en un isomorphisme :

$$[X_+, BG]_* \simeq [\mathscr{V}_G(X)]$$

où le membre de droite désigne les classes d'isomorphie de fibrés principaux sur X sous le groupe G.

Définition VIII.1.13. — On appelle BG l'espace classifiant du groupe topologique G.

Exemple VIII.1.14. — 1. Lorsque G est un groupe discret, $BG = K(G, 1)$.

---

3. *principal G-bundle* en anglais ;

2. Reprenons les notations du deuxième point de l'exemple VIII.1.3. A tout morphisme
$$f : X \to \mathbb{CP}^n,$$
on associe un fibré en droites $L = f^*(\lambda_n)$ qui a la propriété qu'au voisinage U d'un point $x \in X$, $L|_U$ se plonge dans un vibré vectoriel trivial $\mathbb{C}^{n+1}_U$.

   Si X est un CW-complexe fini, ou plus généralement un espace compact, tout fibré en droites sur X a cette propriété pour un entier n assez grand.

   On définit l'espace projectif de dimension infinie $\mathbb{CP}^\infty$ comme la limite de la tour d'inclusions (en fait, de cofibrations) :
$$* = \mathbb{CP}^0 \to \ldots \to \mathbb{CP}^n \xrightarrow{\nu_n} \mathbb{CP}^{n+1} \to \ldots$$
où ν_n est donné par l'inclusion des $n+1$-premières coordonnées. Pour tout entier n, on dipose d'un carré cartésien :
$$\begin{tikzcd} \lambda_n \arrow[r] \arrow[d] & \lambda_{n+1} \arrow[d] \\ \mathbb{CP}^n \arrow[r, "\nu_n"] & \mathbb{CP}^{n+1} \end{tikzcd}$$
et l'on peut donc définit un fibré en droites complexe sur $\mathbb{CP}^\infty$:
$$\lambda = \varinjlim_{n \geq 0} \lambda_n.$$
La discussion précédente permet finalement de montrer que le morphisme canonique :
$$[X, \mathbb{CP}^\infty] \to [\mathscr{V}^1_{\mathbb{C}}(X)], [f] \mapsto [f^*(\gamma)]$$
est un isomorphisme. Autrement dit,

(VIII.2) $$BGL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{CP}^\infty.$$

3. On obtient de même :

(VIII.3) $$BGL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{RP}^\infty.$$

Il est clair sur la définition que l'espace BG dépend fonctoriellement du groupe topologique G. On peut montrer qu'il ne dépend que de la classe d'homotopie de G. Le lemme suivant est donc intéressant du point de vue des fibrés vectoriels :

Lemme VIII.1.15. — *Soit n un entier. On note $O(n)$ (resp. $U(n)$) le groupe formé des matrices orthogonales*[4] *(resp. unitaires*[5]*).*

Alors le morphisme canonique
$$i : O(n) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \textit{resp. } i : U(n) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$
est une équivalence d'homotopie forte.

Démonstration. — Posons $K = \mathbb{R}$ (resp. $K = \mathbb{C}$) On rappelle qu'on peut factoriser de manière unique toute matrice $M \in \mathrm{GL}(n, K)$ en un produit :
$$M = QR$$
où Q est une matrice orthogonale (resp. unitaire) et $R \in \mathrm{GL}(n, K)$ est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont dans $\mathbb{R}^{+*}$. On construit donc une rétraction r de i en associant à $M = QR$ la matrice Q.

---

4. *i.e.* $M^t M = Id$;
5. *i.e.* $M^t \overline{M} = Id$ où $\overline{M}$ désigne la matrice complexe conjuguée à M ;

Pour montrer que ir est homotope à l'identité, on peut contruire l'homotopie sur les matrices de la forme

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

en posant :

$$R_t = \begin{pmatrix} (1-t)\lambda_1 + t & (1-t)a_{12} & \cdots & (1-t)a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (1-t)a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & (1-t)\lambda_n + t \end{pmatrix}$$

Alors, l'application continue :

$$I \times \mathrm{GL}(n, K) \to \mathrm{GL}(n, K), (t, M = QR) \mapsto QR_t$$

réalise l'homotopie attendue. □

Si on combine la proposition VIII.1.9, le théorème VIII.1.12, le lemme précédent et le fait que le classifiant d'un groupe topologique ne dépend que de sa classe d'homotopie, on obtient donc :

Théorème VIII.1.16. — *Pour tout espace X, on dispose de bijections*

$$[\mathscr{V}_{\mathbb{C}}^n(X)] \simeq [X_+, BU(n)]_*, \quad [\mathscr{V}_{\mathbb{R}}^n(X)] \simeq [X_+, BO(n)]_*.$$

De plus, si l'on note BU (resp. BO) la limite inductive des tours respectives suivantes :

$$* = BU(0) \to \ldots \to BU(n) \to BU(n+1) \to \ldots$$
$$* = BO(0) \to \ldots \to BO(n) \to BO(n+1) \to \ldots$$

et que X est un CW-complexe pointé fini, on obtient :

$$[\mathscr{V}_{\mathbb{C}}(X)] \simeq [X_+, BU]_*, \quad [\mathscr{V}_{\mathbb{R}}(X)] \simeq [X_+, BO]_*.$$

Exemple VIII.1.17. —

1. D'après la formule (VIII.3), on obtient $BU(1) = \mathbb{CP}^\infty$, et l'isomorphisme du théorème s'écrit :

   $$[X, \mathbb{CP}^\infty] \to [\mathscr{V}_{\mathbb{C}}^1(X)], [f] \mapsto [f^*(\lambda)]$$

   où λ est le fibré en droites canonique sur $\mathbb{CP}^\infty$. On appelle donc λ le *fibré en droites universel* sur $\mathbb{CP}^\infty$.

2. On peut généraliser le point précédent. Pour tout entier n, il existe une unique classe d'isomorphie de fibré vectoriel complexe $[\gamma_n]$ sur $BU(n)$ qui correspond à l'identité de $BU(n)$ dans le groupe :

   $$[BU(n), BU(n)] = [BU(n)_+, BU(n)]_*$$

   par l'isomorphisme du théorème précédent.

   On appelle γ_n le fibré universel sur $BU(n)$. En effet, se donner un fibré vectoriel complexe E à isomorphisme prés sur un espace X revient à se donner un morphisme à homotopie préès

   $$f : X \to BU(n).$$

   D'après le théorème précédent et le choix de γ_n, ces deux objets sont reliés par la relation :

   $$E \simeq f^{-1}(\gamma_n).$$

3. La même discussion vaut dans le cas réel (ou plus généralement pour un corps topologique quelconque).

VIII.1.c. Théorie d'Atiyah-Hirzebruch. —

VIII.1.18. — La catégorie $\mathscr{V}_K(X)$ des fibrés K-vectoriels sur X admet des sommes directes (resp. produits tensoriels) données (resp. donnés) localement par la somme directe (resp. le produit tensoriel) des K-espaces vectoriels : on vérifie que cette construction se recolle selon le choix d'un recouvrement de B et de trivialisations des fibrés K-vectoriels considérés.

Considérons l'ensemble $[\mathscr{V}_K(X)]$ des classes d'isomorphies de fibrés K-vectoriels. C'est un monoïde pour la loi $[E] + [F] = [E \oplus F]$.

***Définition VIII.1.19* (Atiyah-Hirzebruch).** — On définit le groupe de *K-théorie* (resp. *K-théorie réelle*) noté $K(X)$ (resp. $KO(X)$) de X comme le groupe associé au monoïde $([\mathscr{V}_\mathbb{C}(X)], +)$ (resp. $([\mathscr{V}_\mathbb{R}(X)], +)$), vu comme anneau dont la loi produit est induite par le produit tensoriel.

Exemple VIII.1.20. — Il est clair que $K(*) = \mathbb{Z}$. Par ailleurs, d'après l'exemple VIII.1.11, on obtient :

$$K(S^1) = 0.$$

VIII.1.21. — Il est clair que l'image inverse des fibrés K-vectoriels commute à la somme et au produit tensoriel. On en déduit donc que les groupes $K(X)$ et $KO(X)$ sont fonctoriels contravariants en X.

Si E est un fibré vectoriel complexe (resp. réel), on note simplement $[E]$ sa classe dans $K(X)$ (resp. $KO(X)$). Dans cet anneau, on a donc les relations :

$$\begin{aligned}
&[E] + [F] = [E \oplus F], \\
&[E].[F] = [E \otimes F], \\
&f^*([E]) = [f^{-1}(E)]
\end{aligned}$$

pour un morphisme $f : Y \to X$.

Remarque VIII.1.22. — Soir E/X un fibré K-vectoriel. On peut associer à E/X un unique fibré vectoriel E^* tel que pour tout point $x \in B$, $(E^*)_x = (E_x)^*$, le K-espace vectoriel dual de E_x.

On dispose donc d'un morphisme de fibrés K-vectoriels sur B :

$$\mu_E : E \otimes E^* \to K_X$$

où K^1_X est le fibré K-vectoriel trivial sur X de rang 1.

On obtient facilement que E est un fibré en droites (rappelons : de rang 1) sur X si et seulement si le morphisme μ_E est un isomorphisme. Ainsi, E^* est le $\otimes$-inverse de E. Cela jusitife la terminologie *fibrés inversibles* souvent utilisée pour les fibrés en droites.

VIII.1.23. — Si (X, x) est un espace pointé, on définit comme d'habitude

$$\tilde{K}(X, x) = \operatorname{Ker}\big(K(X) \to K(x)\big)$$

et de même pour KO.

On déduit de la proposition VIII.1.9 les propriétés suivantes des foncteur K et KO :

Proposition VIII.1.24. — 1. *Le groupe abélien $K(X)$ (resp. $KO(X)$) ne dépend que de la classe d'homotopie de X ;*

2. *Le foncteur $\tilde{K}$ (resp. $\widetilde{KO}$) vérifie les propriétés d'additivité et d'excision (cf. VII.2.3).*

D'après cette proposition, les foncteurs K et KO sont représentables (théorème de représentabilité de Brown). C'est ce que nous verront après l'exemple qui suit.

Exemple VIII.1.25. — Un fibré vectoriel complexe (réel) sur un point étant déterminé de manière unique par son rang, on en déduit :

$$K(*) = \mathbb{Z}$$

Cet exemple s'étend bien sûr aux espaces contractiles et on en déduit :

$$K(X) = \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z},$$
$$KO(X) = \widetilde{KO}(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

On peut réinterpréter le théorème VIII.1.16 par le théorème de représentabilité suivant.

Proposition VIII.1.26. — *Pour tout CW-complexe pointé fini X, il existe des isomorphismes canoniques de groupes abéliens, fonctoriels en X :*

$$\tilde{K}(X) \xrightarrow{\sim} [X, BU]_*,$$
$$\widetilde{KO}(X) \xrightarrow{\sim} [X, BO]_*.$$

Cette proposition repose sur la description de $\tilde{K}(X)$ comme les classes de fibrés vectoriels complexes modulo la relation d'équivalence stable : deux tels fibrés E et E' sont dits *stablement équivalents*

$$E \sim_s E'$$

si il existe un isomorphisme $E \oplus \mathbb{C}^n_X \simeq E' \oplus \mathbb{C}^m_X$ pour des entiers $n, m \geq 0$. Une fois cette description acquise, la proposition est une simple application du théorème VIII.1.16. On renvoie le lecteur à [**Swi75**] pour les détails.

Corollaire VIII.1.27. — *Pour tout CW-complexe pointé fini X, il existe des isomorphismes canoniques de groupes abéliens, fonctoriels en X :*

$$K(X) \xrightarrow{\sim} [X, \mathbb{Z} \times BU]_*,$$
$$KO(X) \xrightarrow{\sim} [X, \mathbb{Z} \times BO]_*.$$

Terminons avec le théorème de périodicité de Bott.

***Théorème VIII.1.28* (Bott)**. — *Pour tout CW-complexe pointé X, il existe un isomorphisme canonique naturel en X :*

$$\tilde{K}(\Sigma^2 X) \simeq \tilde{K}(X).$$

Grâce aux deux résultats précédents, on en déduit une équivalence d'homotopie canonique :

$$\beta : \mathbb{Z} \times BU \to \Omega^2(\mathbb{Z} \times BU)$$

Définition VIII.1.29. — On définit le spectre de *K-théorie complexe* $\mathbb{K}$ par la formule suivante :

$$\mathbb{K}_n = \begin{cases} \mathbb{Z} \times BU & \text{si } n \text{ pair,} \\ \Omega(\mathbb{Z} \times BU) & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

et avec pour morphisme de cosuspension :

$$\omega_n : \mathbb{K}_n \to \Omega\mathbb{K}_{n+1}$$

le morphisme tautologique si n est impair et le morphisme composé suivant si n est pair :

$$\mathbb{Z} \times BU \xrightarrow{\beta} \Omega^2(\mathbb{Z} \times BU) = \Omega(\Omega(\mathbb{Z} \times BU)).$$

Notons en particulier que $\mathbb{K}$ est un Ω-spectre et on en déduit un isomorphisme :

$$\mathbb{K}^n(X) = \begin{cases} \tilde{K}(X) & \text{si } n \text{ pair,} \\ \tilde{K}(\Sigma X) & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

VIII.1.30. — L'anneau de coefficients de $\mathbb{K}^*$, égal à $K^*(S^0)$, est donc périodique de période 2. On a vu dans l'exemple VIII.1.25 :

$$\mathbb{K}^{2n}(S^0) = \mathbb{K}^0(S^0) = \tilde{K}(S^0) = K(*) = \mathbb{Z}.$$

D'après l'exemple VIII.1.20,

$$\mathbb{K}^{2n+1}(S^1) = \mathbb{K}^1(S^1) = \tilde{K}(S^1) \subset K(S^1) = 0.$$

Ainsi, $\mathbb{K}^*$ est une théorie cohomologique généralisée avec pour anneau de coefficients $\mathbb{Z}$ en degrés pairs, 0 en degrés impairs.

Remarque VIII.1.31. — 1. La structure d'anneau sur $K(X)$ peut être étendu en un structure de spectre en anneau sur $\mathbb{K}$, de telle sorte que le cup produit sur $\mathbb{K}^{2*}(X)$ correspond au produit sur $\tilde{K}(X)$, via l'isomophisme ci-dessus.

2. On peut voir que la K-théorie réelle est périodique de période 8. On peut donc construire un spectre de K-théorie réelle $\mathbb{K}O$ en suivant la même construction que pour $\mathbb{K}$ mais avec une période 8 (voir [**Swi75**, pp. 215-217]).

VIII.2. Théorie de l'orientation

VIII.2.a. Spectres orientés. —

VIII.2.1. — Rappelons qu'un spectre en anneaux $\mathbb{E}$ est muni de deux morphismes structuraux, la multiplication

$$\mu : \mathbb{E} \wedge \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

et l'unité :

$$\eta : S^0 \to \mathbb{E}.$$

Le groupe abélien $\mathbb{E}^* = \mathbb{E}^*(S^0)$ est alors un anneau gradué avec pour unité le morphisme $\eta \in \mathbb{E}^0(S^0)$.

Rappelons aussi que, par définition même, la cohomologie $\mathbb{E}^*$ vérifie la propriété de stabilité :

$$\mathbb{E}^n(S^1 \wedge X) \simeq \mathbb{E}^{n-1}(X).$$

Définition VIII.2.2. — Soit $\mathbb{E}$ un spectre en anneaux. On considère l'espace $\mathbb{CP}^\infty$ comme pointé par l'inclusion évidente $* = \mathbb{CP}^0 \to \mathbb{CP}^\infty$.

Une *orientation (complexe)* de $\mathbb{E}$ est la donnée d'une classe

$$c \in E^2(\mathbb{CP}^\infty)$$

dont la restriction à $\mathbb{CP}^1$ coïncide avec l'unité η via l'isomorphisme de stabilité :

$$\mathbb{E}^2(\mathbb{CP}^1) \simeq \mathbb{E}^2(S^2) \simeq \mathbb{E}^0(S^0).$$

VIII.2.3. — La classe c définit en particulier un morphisme dans $\mathscr{SH}$:

$$c : \Sigma^\infty BU(1) = \Sigma^\infty \mathbb{CP}^\infty \to S^2 \wedge \mathbb{E}.$$

On en déduit donc pour tout CW-complexe fini X :

$$c_1 : V^1_{\mathbb{C}}(X) \simeq [X, BU(1)] = [X_+, BU(1)]_* \to [\Sigma^\infty X_+, \Sigma^\infty BU(1)]_s \xrightarrow{c_*} [\Sigma^\infty X_+, S^2 \wedge \mathbb{E}]_s = \mathbb{E}^2(X).$$

Ainsi, tout fibré en droite L sur X admet une classe de cohomologie canonique $c_1(L) \in \mathbb{E}^2(X)$ appelée la *première classe de Chern* de L/X à coefficients dans $\mathbb{E}$.

Exemple VIII.2.4. — Par définition,

$$\mathbb{K}^0(\mathbb{CP}^\infty) = \tilde{K}(\mathbb{CP}^\infty)$$

noyau de l'application :

$$\rho : K(\mathbb{CP}^\infty) \to \mathbb{Z}$$

qui a un fibré virtuel $[E] - [F]$ associe $rg(E) - rg(F)$.

Dès lors, l'élément

$$c' = 1 - [\lambda]$$

où λ est le fibré inversible universel sur $\mathbb{CP}^\infty$ et 1 est l'unité du fibré, est bien dans le noyau de ρ, donc définit une classe dans $\tilde{K}(\mathbb{CP}^\infty)$. De plus, sa restriction à $\mathbb{CP}^1$ est égale à 1 car $[\lambda_1] = 0$ dans $\tilde{K}(\mathbb{CP}^1)$.

Si lon note β l'image de 1 par l'isomorphisme de périodicité de Bott

$$\mathbb{K}^0(S^0) \simeq \mathbb{K}^{-2}(S^0)$$

on obtient donc une orientation canonique de $\mathbb{K}$ par la formule :

$$c = \beta^{-1}(1 - [\lambda])$$

On obtient un exemple plus évolué grâce au calcul suivant :

***Théorème VIII.2.5* (Théorème du fibré projectif).** — *Pour tout entier $n \geq 0$, il existe une classe $c_n \in H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$ telle que le morphisme d'algèbres canonique*

$$\mathbb{Z}[t] \to H^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}), t \mapsto c_n$$

induit un isomorphisme :

$$\mathbb{Z}[t]/(t^n + 1) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$$

Autrement dit, $H^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$ est l'algèbre graduée engendrée par l'élément c_n en degré 2 modulo la relation : $c_n^{n+1} = 0$.

Démonstration. — Pour $n = 0$ et $n = 1$, le résultat est déjà connu vu que $\mathbb{CP}^n = S^1$. supposons $n > 1$.

On considère la fibration canonique (exemple III.1.9)

$$\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$$

de fibre S^1. On peut alors considérer la suite spectrale de Serre en cohomologie associée à p :

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{CP}^n, H^q(S^1)) \Rightarrow H^{p+q}(S^{2n+1}, \mathbb{Z}).$$

Cette suite spectrale est concentrée sur les lignes $q = 0, 1$. Il n'y a donc que les différentielles

$$d_2^{p,1} : H^p(\mathbb{CP}^n, H^1(S^1)) = E_2^{p,1} \to E_2^{p+2,0} = H^{p+2}(\mathbb{CP}^n, H^0(S^1)) = H^{p+2}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$$

qui ne s'annulent pas sur la page E_2, et la suite spectrale dégénère en E_3. Cela se traduit par la suite exacte longue :

$$\ldots \to H^p(S^{2n+1}, \mathbb{Z}) \to H^p(\mathbb{CP}^n, H^1(S^1)) \xrightarrow{d_2^{p,1}} H^{p+2}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+2}(S^{2n+1}, \mathbb{Z}) \to \ldots$$

Or, $H^p(S^{2n+1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ si $p = 0, 2n + 1$ et 0 sinon. On en déduit par induction sur p que :

$$H^p(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p \text{ pair et } p \geq 2n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour avoir la structure d'algèbre, il faut utiliser le fait que la suite spectrale de Serre en cohomologie est compatible au produit.

Soit u le générateur de $H^1(S^1)$. On peut voir u comme un élément de $H^0(\mathbb{CP}^n, H^1(S^1))$. On pose alors :

$$c_n = d_2^{0,1}(u) \in H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}). \tag{VIII.4}$$

D'après la suite exacte précédente, c est un générateur du groupe abélien $H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Par ailleurs, tout élément de $H^p(\mathbb{CP}^n, H^1(S^1))$ est de la forme $u \cup x$ pour un élément $x \in H^p(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$. D'après la compatibilité de la suite spectrale au cup-produit, on en déduit :

$$d_2^{p,1}(u \cup x) = d_2^{0,1}(u) \cup x - u \cup d_2^{p,0}(x) = c_n \cup x.$$

Ainsi, on obtient que le morphisme induit par $d_2^{p,1}$:

$$H^p(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \simeq H^p(\mathbb{CP}^n, H^1(S^1)) \xrightarrow{d_2^{p,1}} H^p(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$$

est la multiplication par c_n. Cela conclut, puisque c'est un isomorphisme pour $p \leq 2n - 2$. $\square$

Exemple VIII.2.6. — Il est clair par construction que la restriction de $c_n \in H^p(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$ à $H^p(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z})$ coïncide avec c_{n-1}. On en déduit donc une classe $c \in H^2(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}) = \tilde{H}^2(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z})$, qui définit une orientation du spectre d'Eilenberg-Mac Lane $\mathbb{HZ}$.

Le même résultat vaut bien sûr si l'on remplace $\mathbb{Z}$ par un groupe abélien quelconque.

VIII.2.b. Théorème du fibré projectif. — Plus généralement on peut démontrer le résultat suivant :

Proposition VIII.2.7. — *Soit $(\mathbb{E}, c)$ un spectre en anneau orienté.*

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $c_n \in \mathbb{E}^2(\mathbb{CP}^n)$ la restriction de c à $\mathbb{CP}^n$. Alors, le morphisme d'algèbres suivant :

$$\mathbb{Z}[t] \to \mathbb{E}^*(\mathbb{CP}^n), t \mapsto c_n$$

induit un isomorphisme :

$$\mathbb{Z}[t]/(t^n + 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}^*(\mathbb{CP}^n)$$

Autrement dit, $\mathbb{E}^*(\mathbb{CP}^n)$ est l'algèbre graduée engendrée par l'élément c_n en degré 2 modulo la relation : $c_n^{n+1} = 0$.

Ce résultat découle du théorème précédent et de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch appliquée au spectre $\mathbb{E}$.

On peut généraliser le résultat précédent.

VIII.2.8. — Considérons une théorie cohomologique orientée $(\mathbb{E}, c)$.

Soit E un fibré vectoriel complexe sur X de rang n. On peut lui associé un fibré topologique

$$\pi : \mathbb{P}(E) \to X$$

dont la fibre en tout point $x \in X$ est donné par l'espace projectif associé à E_x :

$$\mathbb{P}(E_x) = (E_x - \{0\})/\mathbb{C}^*.$$

Par définition, l'espace $\mathbb{P}(E)$ admet un fibré inversible complexe canonique que nous noterons λ.

Le théorème précédent se généralise comme suit :

Théorème VIII.2.9 **(Théorème du fibré projectif généralisé)**

Considérons les notations précédentes. Alors, le morphisme canonique suivant :

$$\bigoplus_{0 \leq i < n} \mathbb{E}^*(X) \to \mathbb{E}^*(\mathbb{P}(E)), (x_0, ..., x_{n-1}) \mapsto \sum_i \pi^*(x_i).c_1(L)^i$$

est un isomorphisme de $\mathbb{E}^*(X)$-modules.

Indication de preuve : en utilisant la propriété d'excision pour $\mathbb{E}^*$, on peut raisonner localement en X et se ramener au cas où E est un fibré trivial, $E = \mathbb{C}^n_X$. Alors, $\mathbb{P}(E) = \mathbb{CP}^{n-1} \times X$ et on peut appliquer le corollaire précédent.

Définition VIII.2.10. — Considérons les notations du théorème précédent, et en particulier un fibré vectoriel complexe E sur X de rang n.

On définit les *classes de Chern* $c_i(E) \in \mathbb{E}^{2i}(X)$, $i \in \mathbb{N}$ du fibré complexe comme l'unique famille vérifiant les propriétés suivantes :

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i.\pi^*(c_i(E)).c_1(\lambda_E)^i = 0,$$
$$c_0(E) = 1, c_i(E) = 0 \text{ si } i > n.$$

VIII.2.11. — Les classes de Chern vérifient de nombreuses bonnes propriétés.

1. Un des points centraux de la théorie homotopique stable vient du fait que pour deux fibrés invesibles L et L' sur un espace compact X,

$$c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L') + \sum_{i,j \geq 1, i>1 \text{ ou } j>1} a_{ij} c_1(L)^i c_1(L')^j$$

avec des classes $a_{ij} \in \mathbb{E}_{2(i+j-1)}$ dans l'anneau de coefficients de $\mathbb{E}$.

On appelle la série formelle

$$F_{\mathbb{E}}(X,Y) = \sum_{ij} a_{ij} X^i Y^j$$

une *loi de groupe formelle* — cf. [**Str11**].

2. On notera que pour une théorie cohomologique ordinaire $\mathbb{H}A$, Comme $(\mathbb{H}A)_*$ est concentré en degré 0, on a nécessairement $F_{\mathbb{H}A}(X,Y) = X + Y$: on dit dans ce dernier cas que la loi de groupe form elle est additive, ou encore que les classes de Chern sont additive.

3. La K-théorie complexe $\mathbb{K}$ est une théorie cohomologique non ordinaire et on peut vérifier que sa loi de groupe formelle est, avec nos notations :

$$F_{\mathbb{K}}(X,Y) = X + Y - \beta.XY$$

où $\beta \in \mathbb{K}_2$ est l'élement qui induit l'isomorphisme de périodicité de Bott (cf. Example VIII.2.4).

On parle de *loi de groupe formel multiplicative.*

4. Il existe enfin un spectre en anneau orienté universel, (MU, c) (initial parmi les spectres en anneaux orientés). On l'appelle le cobordisme complexe et son anneau de coefficients est aux classes de *bordismes complexes* des variétés différentiables à bord, introduit à la suite des travaux de Poincaré et de Thom.

En théorie de l'homotopie stable, le spectre MU joue un rôle central et donne naissance à la théorie de la *filtration chromatique* de $\mathscr{SH}$.

Références

[Str11] N. Strickland. Formal groups. `http://neil-strickland.staff.shef.ac.uk/courses/formalgroups/`, 2011.

[Swi75] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 212.

---

deuxième semestre 2015/2016

Frédéric Déglise, CNRS, UMPA (UMR 5669), E.N.S. Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07 FRANCE, Tel. : +33 4 72 72 84 18 • *E-mail :* `frederic.deglise@ens-lyon.fr`
Url : `http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/`