

# Tetrahedrales

Projet motif: trouver une partie entière à la  
théorie d- adique.

- 1) 6 fondateurs
- 2) d. de rigidité
- 3) complétion p- adique.

I. thèse de Serre (1952)  $\ell$ -topologie.

$S$  schéma de base :

site  $\mathcal{S}m_S, \text{ét}$  :  $S$ -schémas locaux + top. étale.

$$\mathcal{H}_\ell(\mathcal{S}m_S, \mathbb{Z})$$

$$D(\mathcal{H}_\ell(\mathcal{S}m_S, \mathbb{Z}))$$

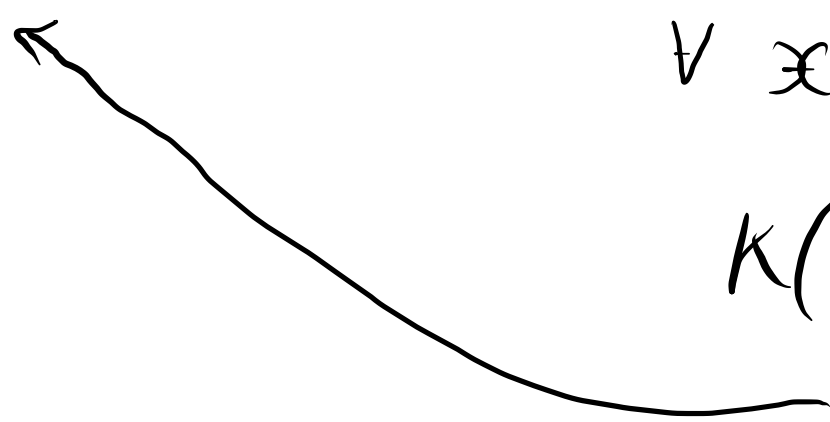
$$\widehat{\mathcal{S}m_S} \xrightarrow{K} D(\text{Ab}) \text{ } \infty\text{-fordérés}$$

vérifie l'hyper-descente.

$\forall \mathcal{X} \xrightarrow{p} X$  hyper-rec. étale

$$K(X) \xrightarrow{p^*} K(\mathcal{X}) \text{ } \text{équiv. } X \in \mathcal{S}m_S$$

$$D(\mathcal{S}m_S, \mathbb{Z})$$



•  $A^0$  - localisation:

$$X/S \text{ line: } \mathcal{Z}_S(x) = \mathcal{Z} \cdot \text{Hom}_S(-, x)$$

$$D(\mathcal{S}_{S, \text{et}}, \mathcal{Z}) / \mathcal{Z}_S(A_x^0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_S(x) \quad \hookrightarrow \quad k: \mathcal{S}_{S, \text{et}}^{\text{off}} \rightarrow \mathcal{D}(\text{Ab})$$

$\mathcal{D}$  localisation de Beaudouin

$$\{ k \in D(\mathcal{S}_{S, \text{et}}, \mathcal{Z}) \mid$$

$$H^*(-, k) \text{ est } A^0\text{-invariante} \}$$

$$\left( \begin{array}{l} k(x) \rightarrow k(A_x^0) \\ \text{équivalence} \\ k \text{ est dit } A^0\text{-local} \\ "k(x) = \text{RHom}(\mathcal{Z}_S(x), k)" \\ \mathcal{D}_{\text{et}}^{\text{off}}(S, \mathcal{Z}) \\ (\Delta \text{ transfert} \dots) \end{array} \right.$$

•  $P^1$ -stabilisation.

$$\pi_S(X) \in \mathcal{D}R_{\text{ét}}^{\text{eff}}(S, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathbb{Z}_S(X)$$

motif de Grothendieck

$$\mathbb{Z}\text{-Hom}(-, X)$$

$$\pi_S(P_S^1) \xrightarrow[p^*]{\eta} \pi_S(S) \quad \text{épimor. scindé}$$

$$\cong_S$$

$$\pi_S(P_S^1) = \cong_S \oplus \underbrace{\cong_S(1)(2)}_{\text{notation}}$$

$$\cong_S(1) = \text{coker}(p^*)[-2]$$

produit tensoriel sur  $\mathcal{D}R_{\text{ét}}^{\text{eff}}(S, \mathbb{Z})$  eq  $\pi_S(X) \otimes^L \pi_S(Y)$

$$= \pi_S(X \times_S Y)$$

$\mathcal{D}M_S$  est monoidale

$$: \underbrace{X_S}$$

$\mathcal{D}M_S^{\text{ét}}$

$$\rightarrow \mathcal{D}(\text{Ab})$$

ceci est  $\mathcal{D}M_S$  "abélienne"

$\mathcal{D}\mathcal{T}_{\text{ét}}(S, \mathbb{Z}) = \text{colimite (dans } \infty\text{-cat } \text{présentable stable monoidale... )}$   
 $\mathbb{R}$   
 $\mathbb{Z} = \text{Hom}(\mathbb{1}(1), -)$

$$\mathcal{D}\mathcal{T}_{\text{ét}}^{\text{eff}}(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{D}\mathcal{T}_{\text{ét}}^{\text{eff}}(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\Omega} \mathcal{D}\mathcal{T}_{\text{ét}}^{\text{eff}}(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow \dots$$

objets :  $(\pi_n)_{n \geq 0} \quad \pi_n \in \mathcal{D}\mathcal{T}_{\text{ét}}^{\text{eff}}(S, \mathbb{Z})$

$\exists \mathbb{1}(-, i) \otimes$  - inverse  
 de  $\mathbb{1}_S(1)$

$\pi_n \simeq \text{Hom}(\mathbb{1}(1), \pi_{n+1})$   
 (= spectre de la topologie algébrique)

bilan :  $\pi_*$  motif étale  $\zeta : \pi_* : \mathcal{S}m_S^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}(\text{Ab})$

$\mathcal{D}\mathcal{T}_{\text{ét}}(S, \mathbb{Z})$   
 $\uparrow \pi_S$   
 $\mathcal{S}m_S$

- (1)  $\pi_*$  vérifie l'hyper-descente étale
- (2) ——— l'invariance par homotopie
- (3)  $\pi_*$  est  $\mathbb{P}^1$ -stable.

2)  $\otimes \quad \pi_S(X) \otimes \pi_S(X) = \pi_S(X \times_S Y)$ , Hom

$f: T \rightarrow S$

$f^*: \pi: \mathcal{S}m_T^{op} \rightarrow \mathcal{D}(Ab) \quad \mapsto \quad \pi \circ f^{-1}: \mathcal{S}m_S^{op} \rightarrow \mathcal{S}m_T^{op} \rightarrow Ab$   
 $X_S \mapsto \pi(X_S, T)$

$f_*: \mathcal{D}(\mathcal{S}m_{fict}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{S}m_{s,d}, \mathbb{Z})$

commute avec  $\otimes$

$\mathbb{D}$  de rep. de Brown  $\Rightarrow$

$\exists f^*$  adjoint à gauche de  $f_*$

$\mathcal{L}f^*$

(com.  $f^*$  est non exact.)  
(gros arte)

$(f^*, f_*)$

$$2) \textcircled{\ast} \pi_S(X) \otimes \pi_S(X) = \pi_S(X \times_S Y), \text{ Hom}$$

$$f: T \rightarrow S$$

$$f_*: \pi: \mathcal{S}m_T^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}(\text{Ab}) \quad \dashv \quad \pi \circ f^{-1}: \mathcal{S}m_S^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}m_T^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$$

$$X_S \dashv \pi(X \times_S T)$$

$$f_*: \mathcal{D}(\mathcal{S}m_{f, \text{et}}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{S}m_{S, \text{et}}, \mathbb{Z})$$

commute avec  $\bigoplus$

$\mathbb{D}$  de rep. de Brouwer

$\exists f^*$  adjoint à gauche de  $f_*$

$(F\text{-}\lim_{f_*})$

$(f^*)$

(com.  $f^*$  est non exact.)  
(gros abe)

$(f^*, f_*)$

$$f^*(\pi_S(X)) = \pi_T(X \times_S T)$$

$$f^*(\pi) = \lim_{\leftarrow X \rightarrow \pi} f^*(\pi_S(X))$$

$p: T \rightarrow S$  lisse.

$$p_*: \Omega_S \rightarrow \mathcal{D}(Ab) \xrightarrow{p^*} \Omega_T \rightarrow \mathcal{D}(Ab)$$

$Y/T \mapsto \Omega(Y \rightarrow X \rightarrow S)$

$$p^*: \mathcal{D}(\Omega_{S, \text{ét}}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_{T, \text{ét}}, \mathbb{Z})$$

commute avec  $\bigoplus$

$$\begin{array}{l} p^* \Omega_S(x) \\ \xrightarrow{\sim} \Omega_T(x \times_S T) \end{array}$$

$\Rightarrow \exists \widetilde{p}_\#$  adjoint à gauche.

lemme ( $p^*$  admet  $p_*$  pour adjoint à droite).

remarque: au Set:  $p$  est étale:  $\widetilde{p}_!$  existe (SGA4)

cas part.  $p = j$  immersion ouverte

$$j! \sim j^* \sim j_*$$

$$\widetilde{(p_\# | p^*)}$$



on étend ces foncteurs

$$D\mathcal{M}_{\text{ét}}^{\text{eff}}(-, \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad D\mathcal{M}_{\text{ét}}(-, \mathbb{Z})$$

$$\hookrightarrow (j_*, j^*) \quad (P_{\#}, P^*) \quad (\otimes, \underline{Hom})$$

$f_{qc}$   $p$  lisse

Th (Localisation)  $Z \hookrightarrow S$  im<sup>e</sup> fermée  
 (Abel - Verdier)  $U = (S - Z) \hookrightarrow S$

$$\left( \forall \pi \in D\mathcal{M}_{\text{ét}}^{\text{eff}}(S, \mathbb{Z}), \quad \begin{array}{c} j_{\#} j^* (\pi) \\ \pi \end{array} \xrightarrow{\text{ad}'} \pi \xrightarrow{\text{ad}} i_* i^* (\pi) \right) \begin{array}{l} \\ \end{array}$$

ouvert si on considère les transferts

homotopiquement exacte.

idée de preuve: DPS  $\pi = \pi_S(X)$ .

$X_S$  lisse.

$$j_{\#} j^*(\pi_S(X)) \rightarrow \pi_S(X) \rightarrow j_* i^*(\pi_S(X))$$

$X_Z = X_S \times \mathbb{Z}$

$$\pi_S''(X_{X_S} \cup) \rightarrow \pi_S(X) \rightarrow i_* \pi_Z(X \times \mathbb{Z})$$

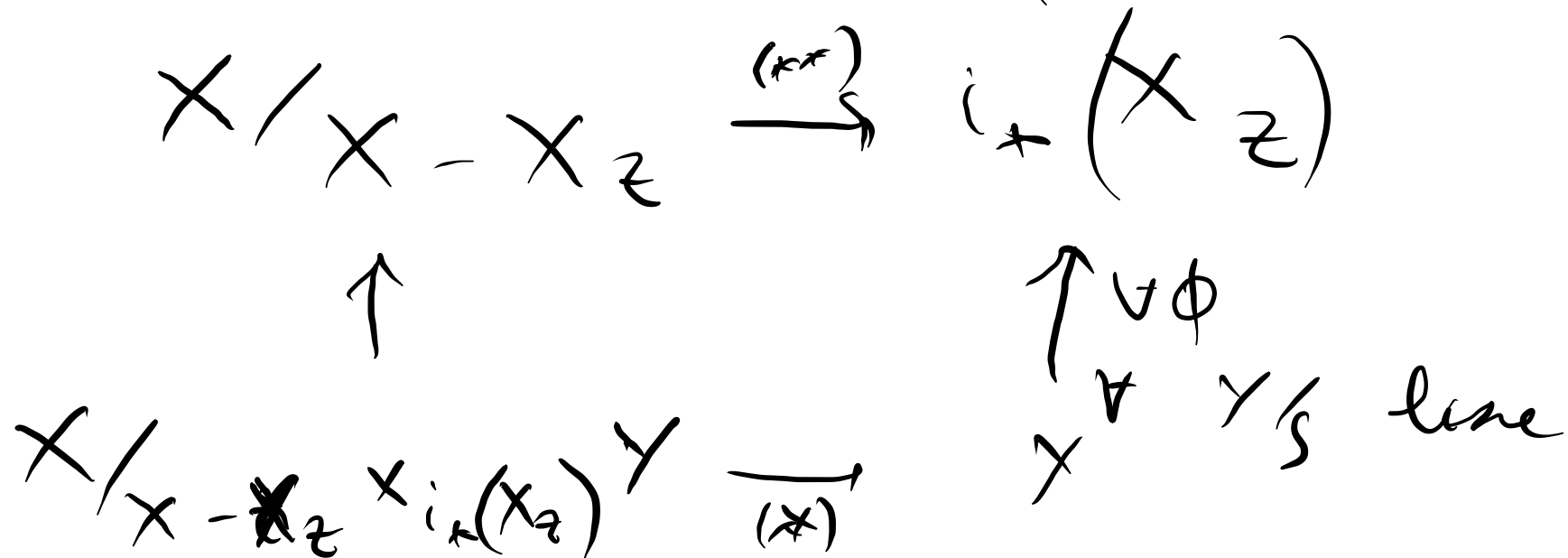
$X - X_Z \xrightarrow{\hat{}} \text{noyau de}$

$$\pi_S(X / X - X_Z) \xrightarrow{\sim} i_* \pi_Z(X \times \mathbb{Z})$$

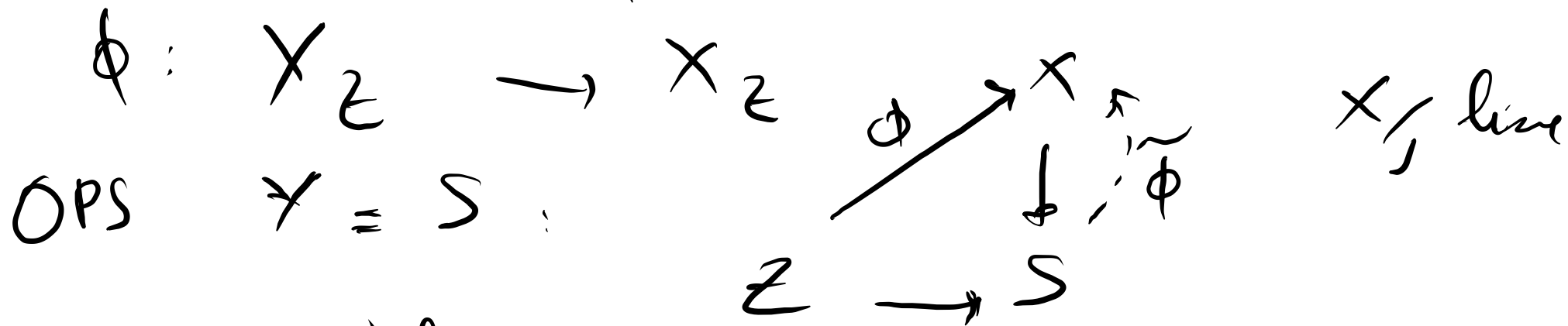
Équivalence

- si  $X_S$  est étale: c'est trivial  
on se réduit au petit site étale

$\dim(X) > 0$ , OPS  $S$  (trident) dense



(\*) equivalence



$X \xrightarrow{\text{étale } p} \mathbb{A}_S^m$  eq  $p(\tilde{\phi}(t)) = \{0\} \times t$

(\*\*\*) equiv.  $\mathbb{A}_S^m / S / Z \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}_S^m / \mathbb{A}_Z^m \xrightarrow{\cong} i_* \mathbb{A}_Z^m$  equiv.

Conséquence : (1)  $(i^*, j^*)$  conservative

(2) existence de  $i^!$   $(i^*, i^!)$   $\in \mathcal{C}_q$

$$i^* i^! (\mathcal{M}) \xrightarrow{\text{ad}^!} \mathcal{M} \rightarrow j^* j^{\#} (\mathcal{M}) \text{ suite exacte}$$

$$(3) \begin{array}{ccc} \vee & \delta & \vee \\ g \downarrow & \Delta & \downarrow h \\ \cup & \mathcal{C}_1 & \times \end{array}$$

~~commutatif~~ cartésien

$f, g$  propre,  $j, k$  immersions

$$\exists j^{\#} q_x (\mathcal{M}) \xrightarrow{E_x(\Delta_{\#})} j^* k^{\#} (\mathcal{M})$$

est c'est une équivalence

cela reste vrai si  $\Delta$  est juste commutatif.

$$j^{\#} = j^!$$

méthode de Deligne:

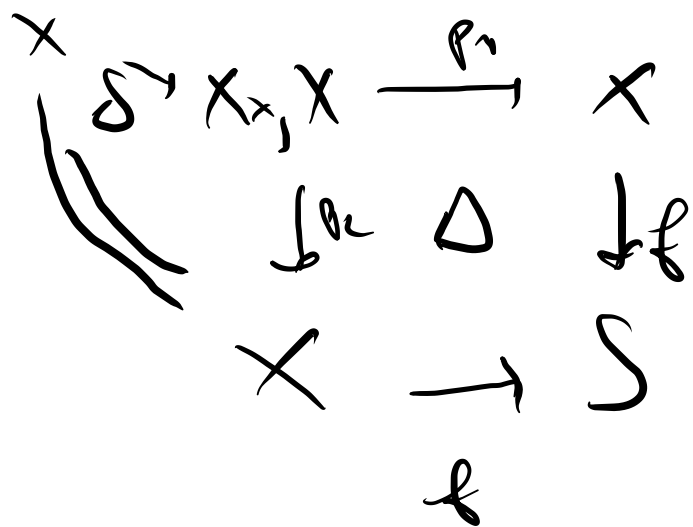
$f: X \rightarrow S$  sep. de  $t$ .  $\downarrow$

$\exists X \xrightarrow{j} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} S$  (S <sup>qcqs</sup> ~~nothésia~~)  
in-ouv. prope

$f! = f_* j_#$  bien défini: résultat  
de (3)

$(f! = \varinjlim_{\bar{X}} (f_* j_#))$

th de perron:



$$f_{\#} \approx f_{\#} \rho_2 \delta_1$$

$$\rho_{2\#} \delta_1(\pi)$$

$Ea(\Delta_{\#})$

$$\rho_{2\#} \delta_1 = f_{\#}(\Delta)[L\Delta]$$

formule de proj

$$\rho_{2\#} \delta_1(\pi) \approx \rho_{2\#} \delta_1(\mathbb{1}) \otimes \pi = \pi(\Delta)[2\Delta]$$

$$\pi_x(X \times_x X / X \times_x X = \Delta_x)$$

le perron relatif def. au cône normal

$$\pi_x(\Delta_x)(\Delta)[2\Delta] = \mathbb{1}_x(\Delta)[L\Delta]$$

$f_!$   $f$  line.  $d = \dim(f)$

$$f_! \approx f_{\#}(\Delta)[2\Delta]$$

$$(f^! \approx f^*(-\Delta)[-2\Delta])$$

$f^\# \rightarrow f_1(d)(L)$  equivalence.

dérivage : ( $f$ -im<sup>2</sup>-ouverte  $\phi_K$ ).

$\rightarrow$  quasi-projetif  $\rightarrow$  projetif.

$\rightarrow f: P_S^m \rightarrow S$ .

$n=d$

$\mathcal{H}(P_S^m)$  module  
avec form dual  
 $\mathcal{H}(P_S^m)(-n)(-2, n)$

est une Ayoub :

$f^\# f^*(\pi) \rightarrow f_* f^*(d)(L)$

equiv.

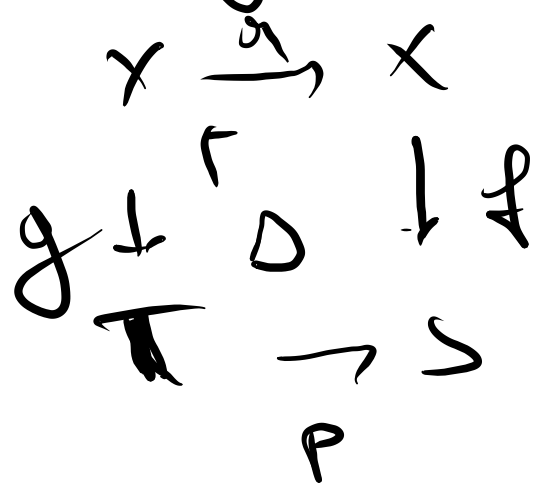
$\mathcal{H}_S(P_S^m) \otimes \mathcal{H} = \bigoplus_{i=0}^m \pi(-i)(-2, i)$

$f_* f^*$  adj à droite de  $f^\# f^*$

$f_* f^*(\pi) = \underline{\text{Hom}}(\mathcal{H}_S(P_S^m), \pi)$

$\mathcal{H}_S(P_S^m) = \mathbb{1}_S \oplus \mathbb{1}_S(1)(2) \oplus \dots \oplus \mathbb{1}_S(m)(2, m) \oplus \bigoplus_{i=0}^m \pi(-i)(-2, i)$

Changement de base:



$\downarrow \text{op. t. l.}$

$$E_{\Delta}^* : f^* \downarrow \rightarrow g! \uparrow$$

$\rightarrow g! \uparrow$   
Équivalence

$f = \text{im}^0 \text{ fermé; localisation.}$

$f = \text{line; } f! = f_{\#}(\alpha)(\mathbb{R})$

$$\rightarrow f_! (\mathcal{O} \otimes f^* \mathbb{R}) \simeq f_! (\mathcal{O}) \otimes \mathbb{R}$$

(in preuve)