Motifs étales

Projet motif : trouver une partie entière à la théorie ℓ-adique.

1) 6 foncteurs
2) th. de rigidité
3) complétion homotopique.

I - thèse de Voevodsky (1992) h-topologie.

S schéma de base :

site $Sm_{S,ét}$: S-schémas lisses + top. étale.

$Sh_{ét}(Sm_S, \mathbb{Z})$

$D(Sh_{ét}(Sm_S, \mathbb{Z}))$

$Sm_S^{op} \xrightarrow{K} \mathcal{D}(Ab)$ ∞-foncteurs

vérifie l'hyper-descente.

$\forall\, \mathcal{X} \xrightarrow{p} X$ hyper-rec. étale

$X \in Sm_S$

$K(X) \xrightarrow{p^*} K(\mathcal{X})$ équivalence

$\mathcal{D}(Sm_S, \mathbb{Z})$

• $\mathbb{A}^1$-localisation :

X/S lisse : $\mathbb{Z}_S(X) = \mathbb{Z} \cdot \mathrm{Hom}_S(-, X)$

$D(Sm_{S,et}, \mathbb{Z}) / \mathbb{Z}_S(\mathbb{A}^1_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_S(X)$ $\longleftrightarrow$ $K : Sm_S|^{op} \to \mathcal{D}(Ab)$

localisation de Bousfield

$\{K \in D(Sm_{S,et}, \mathbb{Z}) \mid H^*(-, K)$ est $\mathbb{A}^1$-invariante$\}$

($K(X) \to K(\mathbb{A}^1_X)$ équivalence

K est dit $\mathbb{A}^1$-local

"$K(X) = R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_S(X), K)$"

$DM^{eff}_{et}(S, \mathbb{Z})$

($\triangle$ transferts ...)

• $\mathbb{P}^1$- stabilisation.

$$M_S(X) \in \mathcal{DM}^{eff}_{et}(S,\mathbb{Z}) \leftarrow \mathbb{Z}_S(X)$$

motif de Voevodsky

$$\mathbb{Z}\,\mathrm{Hom}(-,X)$$

$$M_S(\mathbb{P}^1_S) \underset{p^*}{\overset{\curvearrowright}{\longrightarrow}} M_S(S) \quad \text{épimor. scindé}$$

$$M_S(S) = \mathbb{1}_S$$

$$M_S(\mathbb{P}^1_S) = \mathbb{1}_S \oplus \underbrace{\mathbb{1}_S(1)[2]}_{\text{notation}}$$

$$\mathbb{1}_S(1) = \mathrm{coker}(p^*)[-2]$$

produit tensoriel sur $\mathcal{DM}^{eff}(S,\mathbb{Z})$ tq $M_S(X) \otimes^L M_S(Y)$

$$\simeq M_S(X \times_S Y)$$

Sm_S, est monoïdale : $\underline{\times_S}$

$Sm_S^{op} \to \underline{\mathcal{D}(Ab)}$: rendre Sm_S "abélienne"

$DM_{et}(S,\mathbb{Z})$ = colimite (dans ∞-cat présentable stable monoidale...)

$\Omega = \underline{Hom}(\mathbb{1}(1), -)$ R

$$DM_{et}^{eff}(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow DM_{et}^{eff}(S,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Omega} DM_{et}^{eff}(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

objets : $(M_n)_{n\geq 0}$ $\quad M_n \in DM_{et}^{eff}(S,\mathbb{Z})$

$M_n \simeq \underline{Hom}(\mathbb{1}(1), M_{n+1})$

$\exists\ \mathbb{1}_S(-1)$ $\otimes$-inverse de $\mathbb{1}_S(1)$

(= spectre de la topologie algébrique)

bilan : M_* motif étale$_S$: $M_* : Sm_S^{op} \longrightarrow D(Ab)$

$DM_{et}(S,\mathbb{Z})$
$\uparrow M_S$
Sm_S

(1) M_* vérifie l'hyper-descente étale
(2) —— l'invariance par homotopie
(3) M_* est $\mathbb{P}^1$-stable.

2) $\otimes$ $\quad M_S(X) \otimes M_S(Y) = M_S(X \times_S Y)$, <u>Hom</u>

$f : T \to S$

$f_* : M : Sm_T^{op} \to D(Ab) \mapsto M \circ f^{-1} : Sm_S^{op} \to Sm_T^{op} \to Ab$

$X/_S \mapsto M(X \times_S T)$

$f_* : D(Sm_{T,et}, \mathbb{Z}) \to D(Sm_{S,et}, \mathbb{Z})$

commute aux $\oplus$

Th. de rep. de Brown $\Rightarrow$ $\exists f^*$ adjoint à gauche de f_*

Lf^* (Rem. f^* est non exact. (gen. abs))

(f^*, f_*)

2) $\otimes$ $\quad \Pi_S(X) \otimes \Pi_S(X) = \Pi_S(X \times_S Y)$, <u>Hom</u>

$f : T \to S$

$f_* : \Pi : Sm_T^{op} \to D(Ab) \mapsto \Pi \circ f^{-1} : Sm_S^{op} \to Sm_T^{op} \to Ab$

$X/_S \mapsto \Pi(X \times_S T)$

$f_* : D(Sm_{T,et}, \mathbb{Z}) \to D(Sm_{S,et}, \mathbb{Z})$

commute aux $\oplus_\infty$

Th. de rep. de Brown $\Rightarrow$ $\exists\, f^*$ adjoint à gauche de f_*

$\left(F = \lim X(-) \atop F_{fK} \right)$

$\overset{?}{L} f^*$ $\quad$ (<u>Rem</u>. f^* est non exact. (que à dr.))

(f^*, f_*)

$f^*(\Pi_S(X)) = \Pi_T(X \times_S T)$ $\qquad f^*(\Pi) = \varinjlim_{X \to \Pi} f^*(\Pi_S(X))$

$p : T \to S$ lisse.

$p : \quad \Pi : Sm_S^{op} \to D(Ab) \longmapsto p^*(\Pi) : Sm_T^{op} \to D(Ab)$

$Y/_T \mapsto \Pi(Y \to T \xrightarrow{p} S)$

$p^* : \quad D(Sm_{S,et}, \mathbb{Z}) \to D(Sm_{T,et}, \mathbb{Z})$

commute avec $\oplus$

$p^* \Pi_S(X)$

$= \Pi_T(X \times_S T)$

$\to \exists\ p_\#$ adjoint à gauche.

lemme (p^* admet p_* pour adjoint à droite.

remarque : au Set : p est étale : $p_!$ existe (SGA4)

cas part. $p = j$ im. ouverte

$j_! \rightsquigarrow j^* \rightsquigarrow j_*$

$(p_\#, p^*)$

on étend ces foncteurs

$$DM^{eff}_{et}(-,\mathbb{Z}) \text{ et } DM_{et}(-,\mathbb{Z})$$

$\leadsto$ (f^*, f_*) $(p_\#, p^*)$, $(\otimes, \underline{Hom})$

f qc $\qquad$ p lisse

Th (Localisation) (Morel-Voevodsky) $Z \overset{i}{\hookrightarrow} S$ imm° fermée

$U = (S-Z) \overset{j}{\hookrightarrow} S$

$\forall M \in DM^{(eff)}_{et}(S,\mathbb{Z})$, $\underset{j_!}{\underline{j_\#}} j^*(M) \xrightarrow{ad'} M \xrightarrow{ad} i_* i^*(M) \xrightarrow{+1}$

est homotopiquement exacte

ouvert si on considère les transferts

idée de preuve : DPS $\Pi = \Pi_S(X)$.

$X/_S$ lisse.

$$j_\# j^*(\Pi_S(X)) \to \Pi_S(X) \to i_* i^*(\Pi_S(X))$$

$$\Pi_S(X \times_S U) \to \Pi_S(X) \to i_* \Pi_Z(X_Z)$$

$X_Z = X \times_S Z$

$X - X_Z$ $\hat{\ }$ Foncteur

$$\Pi_S(X / X - X_Z) \xrightarrow{\sim} i_* \Pi_Z(X_Z)$$

Équivalence

- si $X/_S$ est étale : c'est trivial

on se réduit au petit site étale

$\dim(X) > 0$, OPS S (strictem^t) hensélien

$$\begin{tikzcd}
X/X - X_Z \arrow[r, "(**)"] & i_*(X_Z) \\
X/X - X_Z \times_{i_*(X_Z)} Y \arrow[u] \arrow[r, "(*)"'] & Y \arrow[u, "\forall \phi"']
\end{tikzcd}$$

$\forall\ Y/S$ lisse

(*) équivalence.

$\phi : Y_Z \longrightarrow X_Z$

OPS $Y = S$:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d] \\
Z \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r] & S \arrow[u, dashed, bend right, "\tilde{\phi}"']
\end{tikzcd}$$

X/S lisse

$X \xrightarrow[p]{\text{étale}} \mathbb{A}^n_S$ tq $p(\tilde{\phi}(Z)) = \{0\} \times Z$

(**) équiv. $\Longleftarrow$ $\underset{\mathbb{A}^n \times S/S-Z}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{A}^n_S}} / \mathbb{A}^n_S - \mathbb{A}^n_Z \longrightarrow i_* \underset{\underset{\mathbb{A}^1\text{-équiv.}}{\shortparallel}}{\mathbb{A}^n_Z}$ équiv.

$\mathbb{A}$

<u>Conséquence</u> : (1) (i^*, j^*) conservative

(2) existence de $i^!$ $(i_*, i^!)$ tq

$$i_* i^!(M) \xrightarrow{\text{ad}'} M \to j_* j^*(M)$$

rk suite exacte

(3)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & Y \arrow[d, "k"] \\ U \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

~~commutatif~~ cartésien

f, g propre, j, k im. ouverte

$$\exists\ j_\# g_*(M) \xrightarrow{Ex(\Delta_{\#*})} f_* k_\#(M)$$

et c'est une équivalence

$j_\# = j_!$

cela reste vrai si Δ est juste commutatif.

méthode de Deligne :

$f : X \to S$ sep de t.f.

$\exists\, X \underset{\text{im. ouv.}}{\overset{j}{\hookrightarrow}} \bar{X} \underset{\text{propre}}{\xrightarrow{\bar{f}}} S$ (S ~~noethérien~~ qcqs)

$f_! = \bar{f}_* j_\#$ bien défini : résulte de (3)

$\left(f_! = \lim_{\overrightarrow{\bar{X}}} \left(\bar{f}_* j_\# \right) \right)$

th de pureté :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, equal, bend right] & X\times_S X \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & X \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

$f_!$ $\quad$ f lisse. séparé t.f. $\quad d = \dim(f)$

$$f_! \simeq f_\#(d)[2d]$$

$$\left(f^! \simeq f^*(-d)[-2d] \right)$$

$$f_\# \simeq f_\# p_{2!}\delta_! \xrightarrow{Ex(\Delta_{\#!})} f_! p_{1\#}\delta_! = f_!(d)[2d]$$

$$p_{1\#}\delta_!(M) \overset{\text{formule de proj}}{\simeq} \underbrace{p_{1\#}\delta_*(\mathbb{1})}_{M_X\left(X\times_S X / X\times_S X - \Delta_X\right)} \otimes M = M(d)[2d]$$

le pureté relatif : def. du cône normal

$$M_X(\Delta_X)(d)[2d] = \mathbb{1}_X(d)[2d]$$

$$f_\# \longrightarrow f_!(d)[2d] \quad \text{équivalence.}$$

dévissage : (f = im. ouverte $\circ$ ...).

$\to$ f quasi-projectif $\to$ projectif.

$\to f : \mathbb{P}^n_S \to S$.

$n = d$

$M(\mathbb{P}^n_S)$ rigide avec pour dual $M(\mathbb{P}^n_S)(-n)[-2n]$ $\longleftrightarrow$ astuce Ayoub : $f_\# f^*(M) \longrightarrow f_* f^*(M)(d)[2d]$ équiva.

$$M_S(\mathbb{P}^n_S) \otimes M = \bigoplus_{i=0}^{n} M(i)[2i]$$

$f_* f^*$ adj à droite de $f_\# f^*$

$$f_* f^*(M) = \underline{\mathrm{Hom}}(M_S(\mathbb{P}^n_S), M)$$

$$M_S(\mathbb{P}^n_S) = \mathbb{1}_S \oplus \mathbb{1}_S(1)[2] \oplus \cdots \oplus \mathbb{1}_S(n)[2n] \qquad \bigoplus_{i=0}^{n} M(-i)[-2i]$$

Changement de base :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner\ \Delta"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "p"'] & S \end{tikzcd}$$

f sép. t.f.

$\mathrm{Ex}(\Delta^*_!) : p^* f_! \longrightarrow g_! q^*$

équivalence

f = imm. fermée : localisation.

f = lisse : $f_! = f_\#(d)[2d]$

$\to \quad f_!(M \otimes f^* N) \simeq f_!(M) \otimes N$

(à prouver)