Motifs étales II.

SGA4

fx sur $S_{ét}$ de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-mod

$Sh(S_{ét}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ $\boxed{\ell \in \mathcal{O}_S(S)^\times}$

$\mathcal{D}(S_{ét}, \mathbb{Z}/\ell^n): S_{ét}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{Z}/\ell^n\text{-mod})$

+ hyper-descente étale

<u>Th 1</u> (acyclicité-locale, SGA4)

$$H^*_{ét}(\mathbb{A}^n_X, F) \simeq H^*_{ét}(X, F)$$

$\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$.

<u>Th. 2</u> (coh. des courbes)

$$\tilde{H}^m_{ét}(\mathbb{P}^n_S, \Lambda) \simeq H^{n-2}_{ét}(S, \Lambda(-1))$$

motifs étales.

fx sur $Sm_{S,ét}$ de groupes ab.

$Sh(Sm_{S,ét}, Ab)$

foncteurs $Sm_S^{op} \longrightarrow \mathcal{D}(Ab)$, $\mathcal{D}(Sm_{S,ét}, \mathbb{Z})$

+ hyper-desc. étale

$\mathbb{A}^1$-<u>localisation</u>:

$$\mathbb{Z}_S(\mathbb{A}^1_X) \longrightarrow \mathbb{Z}_S(X) \text{ iso.}$$

$\mathcal{D}\mathcal{M}^{eff}_{ét}(S, \mathbb{Z})$ $\mathbb{Z}(\infty)$ <u>Tate</u>

$\mathbb{P}^1$- <u>stabilisation</u>: $\mathbb{Z}(\mathbb{P}^1_S) = \mathbb{1}_S \oplus \mathbb{1}_S(1)[2]$

on inverse $\mathbb{1}_S(1)$ pour $\otimes$

$\mathcal{D}\mathcal{M}_{ét}(S, \mathbb{Z})$

eg : *) $M_S(X)$ objet : $\mathbb{Z}_S(X)$ dans $DM_{et}(S,\mathbb{Z})$

$X/_S$ lisse motif de $X/_S$ $\left(M_S(X) = f_! f^! (\mathbb{1}_S) \right)$

1) $M(\mathbb{P}^n_S) = \mathbb{1}_S \oplus \mathbb{1}_S(1)[2] \oplus \cdots \oplus \mathbb{1}_S(n)[2n]$

2) $X/_S$ est propre et lisse :

$M_S(X)$ est rigide / fortement dualisable

$M_S(X)^\vee = M_S(X)(-d)[-2d]$ $d = \dim(X/_S)$

3) formule d'un éclatement.

Coh. motivique étale : R anneau.

$$H^{n,m}_{L \text{ ou } M,\text{ét}}(S,R) = \mathrm{Hom}_{DM_{\text{ét}}(S)}\left(\mathbb{1}_S, \underbrace{R_S}_{?}(m)[n]\right)$$

$$\left(\text{“} = \mathrm{Ext}^n_{DM}\left(\mathbb{1}_S, R_S(m)\right) \text{”} \right)$$

Th (Voevodsky, Cisinski–D., Ayoub)

1) S régulier. $R = \mathbb{Q}$

$$H^{n,m}_{L}(S,\mathbb{Q}) \simeq Gr^{m}_{\gamma} K_{2m-n}(S)_{\mathbb{Q}}$$

gradué pour la filtration top. (Fil^n = codim supp. $\geq n$)

ou γ-filtration

$\left(= \operatorname{Ker}(\psi^i - i^n) \quad i > 0\right)$

op. d'Adams

eg: $H^{2n,n}_{L}(S,\mathbb{Q}) \simeq CH^n(S)_{\mathbb{Q}}$

2) S quelconque, $n \in \mathcal{O}_S(S)^\times$

$$H^{n,m}_L(S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq H^n_{et}(S, \mu_n^{\otimes m})$$

$X, Y/S$ propre lisse, S régulier $d = \dim(Y)$

$$\mathrm{Hom}(M_S(X), M_S(Y))_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{Hom}(M(X) \otimes M_S(Y)^\vee, \mathbb{1}_S)_{\mathbb{Q}}$$

$$\simeq H^{2d,d}_L(X \times_S Y, \mathbb{Q})$$

$$= CH^d(X \times_S Y)$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SmProj}_S^{op} \arrow[rr] \arrow[dr] & & DM_{gm}(S, \mathbb{Q}) \\ & \text{motifs de Chow} \arrow[ur, "\text{pleinement fidèle}"'] & \end{tikzcd}$$

$$X/S \mapsto M_S(X)^\vee$$

image de motifs de Chow$/S$
tombe dans la partie "pure de
poids 0 de $DM_{et}(S, \mathbb{Q})$"

I - Théorème de rigidité.

II - Complétion ℓ-adique homotopique.

I - Th S sch. qc, R $\mathbb{Z}/n$-alg. $n \in \mathcal{O}_S(S)^\times$

∃ une équivalence de cat. triang. mon. cen.

$$\rho_! : D(S_{\text{ét}}, R) \longrightarrow DM_{\text{ét}}(S, R)$$

et induit un fonct. pleinement fidèle

$$D^b_{ctf}(S_{\text{ét}}, R) \longrightarrow DM_{\text{ét}, gm}(S, R)$$

eng. par $M_S(X)(n)$ X/S lisse, $n \in \mathbb{Z}$ ⊕ finie,

1) $\rho : S_{et} \hookrightarrow Sm_{S,et}$

$F|_{S_{et}} \leftarrow F$

$$Sh(S_{et}, R) \underset{\rho_\#}{\overset{\rho^*}{\rightleftarrows}} Sh(Sm_{S,et}, R)$$

$\rho_\#$ est exact et pleinement fidèle

$(F_X)_{X \in Sm_S}$

F_X fx sur X_{et}

$+ f : Y \to X$.

$F_Y \xrightarrow{\tau_f} f^* F_X$

petit site

τ_f iso.

$$\begin{tikzcd}
\rho_\# : D(Sh(Sm_S, R)) \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\tilde{\rho}_\#"'] & D(Sh^{tr}(Sm_{S,et}, R)) \\
& DM^{eff}_{et}(S, R)
\end{tikzcd}$$

pleinement fidèle

complexes $\mathbb{A}^1$-locaux

PB mq $\rho_\#$ est ess. surjectif.

2) cas particulier $S = \mathrm{Spec}(k)$ $(F(X) \simeq F(\mathbb{A}^1_X))$

$F \in Sh^{tr}_{et}(Sm_k, R)$ + F $\mathbb{A}^1$-local

mq $F = \rho_\#(F_0)$ $F_0 \in Sh_{et}(k, R)$

$R[G_k]$-module

$\forall X/_k$ lisse, $\forall \bar{x}$ pt géométrique de X

PB $\Leftrightarrow$ $F_{\bar{x}} = F\left(X^{hs}_{(\bar{x})}\right) \simeq F(k(\bar{x}))$

$(k \rightsquigarrow k(\bar{x}))$ $k = \bar{k}$ $\quad x \in X(k)$ $\quad X/_k$ lisse dim d

$$X^h_{(x)} = \operatorname{Spec}\left(\mathcal{O}^h_{X,x}\right) \simeq \left(\mathbb{A}^d_k\right)^h_{(0)}$$

cas $d = 1$.

<u>PB</u>

$$\begin{tikzcd}
F(k) \arrow[rr, "p^*"] \arrow[dr, "p_V^*"'] & & F\left(\left(\mathbb{A}^1_k\right)^h_{(0)}\right) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
& F(V) \arrow[ur, "\phi^*"'] & \varinjlim\limits_{V/\mathbb{A}^1_k \text{ et v. de } 0} F(V)
\end{tikzcd}$$

iso. ie épi

mq $\operatorname{Im}(\phi^*) \subset \operatorname{Im}(p^*)$

$$
\begin{tikzcd}
C_\tau \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "\pi"] & V \arrow[d, "\pi_n"] \\
\mathbb{A}^n|^h_{n(0)} \arrow[u, bend left, "s_1"] \arrow[u, bend left=60, "s_2"] \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "p"] & \mathrm{Jac}(C) \arrow[u, bend right=60, "s"']
\end{tikzcd}
$$

courbe affine lisse

induite par ϕ

$$s \circ p = p' \circ s_1 \quad ; \quad p' \circ s_2 = \phi$$

$$(*) \quad s_1^* = s_2^* : F\left(\mathbb{A}^n|^h_{n(0)}\right) \longrightarrow F(C)$$

si $(*)$; $\quad \phi^* = s_2^* \circ p'^* = s_1^* \circ p'^* = p^* \circ s^*$

$$\mathrm{Im}(\phi^*) \subset \mathrm{Im}(p^*)$$

compactif. $C \hookrightarrow \bar{C}$ comp. C_∞ / S affine

$s_i(S) \subset C$ div. $\leftrightarrow$ $\mathcal{L}_i$ fibré inversible sur $\bar{C}$

trivialisé sur C_∞

$$[\mathcal{L}_i] \in \mathrm{Pic}(\bar{C}, C_\infty)$$

hyp. sur F : tr. + inv. par. htp.

l'~~acti~~ l'op. s_i^* ne dépend que de

$$[\mathcal{L}_i] \in \mathrm{Pic}(\bar{C}, C_\infty)$$

$s_1|_{\{0\}} = s_2|_{\{0\}}$

$\Uparrow$

$[\mathcal{L}_1|_{\{0\}}] = [\mathcal{L}_2|_{\{0\}}]$

$$\mathrm{Pic}(\bar{C}, C_\infty)/n \longrightarrow \mathrm{Pic}(\bar{C}_{(0)}, C_{\infty(0)})/n \text{ iso}$$