Étales motives III.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{DM}_{et}(S) \arrow[dl, "\otimes\mathbb{Q}"'] \arrow[dr, "\ell^n,\ \ell \in \mathcal{O}_S(S)^\times"] & \\
\mathrm{DM}_B(S,\mathbb{Q}) & \cup & D(S_{et}, \mathbb{Z}/\ell^n) \\
\cup & \mathrm{DM}_{et,c}(S) \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & \cup \\
\mathrm{DM}_c(S,\mathbb{Q}) & & D^b_{ctf}(S_{et}, \mathbb{Z}/\ell^n)
\end{tikzcd}$$

K-théorie rationnelle

SGA4

motif de Chow (poids 0) $\subset \mathrm{DM}_B(S,\mathbb{Q})$

$\mathrm{DM}_{et,c}(S)$ eng. par $M_S(X)(n)$, X/S lisse, $n \in \mathbb{Z}$ (extension, facteur direct, shift)

$\mathrm{DM}_c(S,\mathbb{Q})$ = objets M compacts

$\mathrm{Hom}(M, -)$ commute aux $\bigoplus_\infty$

(eg : complexes parfaits)

<u>Quelques résultats</u> : 1) 6 foncteurs sur $\mathrm{DM}_{et,c}(S)$ (th. de finitude)

2) pureté absolue :

$f : X \to S$ lissifiable, X, S réguliers

$f^!(\mathbb{1}_S) \simeq \mathbb{1}_X(-d)[-2d]$ $d = \dim(f)$

3) dualité de G.-V. :

$f : X \to S$ sep. de t. f. S régulier

$\mathcal{D}_X = f^!(\mathbb{1}_S)$ est dualisant pour $DM_c^{?}(S)$

$\mathbb{D}_X = \underline{Hom}(-, \mathcal{D}_X)$: $\mathbb{D}_X \mathbb{D}_X(M) \simeq M$

I. ℓ-adique.

complétion homotopique.

$M \in DM_{et}(S)$: $M/\ell^n = \text{hofib}(M \xrightarrow{\ell^n \cdot Id_M} M)$

"coker" $(M \otimes^L \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$

$\hat{M}^\ell = \underset{n>0}{\text{holim}} (M/\ell^n)$

Déf : M est ℓ-complet si $M \to \hat{M}^\ell$ est un iso dans DM_{et}

| $\widehat{DM}^\ell_{et}(S)$ = motifs étales ℓ-complets.

$$\begin{tikzcd} \widehat{DM}^{\ell}_{et}(S) \arrow[r, bend left, "\hat\rho_{\ell!}"] \arrow[r, bend right, "\hat\rho_{\ell*}"'] & DM_{et}(S) \arrow[l, "\hat\rho_\ell^*"'] \arrow[r, bend left, "e^* = \otimes\mathbb{Z}[\ell^{-1}]"] \arrow[r, bend right, "e^!"'] & DM_{et}(S, \mathbb{Z}[\ell^{-1}]) \arrow[l, "e_*"'] \end{tikzcd}$$

diagramme de recollement triangulé

$DM_{et}(S)$ est le recollement de

$DM_{et}(S, \mathbb{Z}[\ell^{-1}])$ et $\widehat{DM}^{\ell}_{et}(S)$

$$\hat\rho_{\ell!}\hat\rho_\ell^*(M) \longrightarrow M \longrightarrow e_*e^*(M) \xrightarrow{+1}$$

$$\hat\rho_{\ell!}\hat\rho_\ell^*(M) = M \otimes^L (\mathbb{Z}[\ell^{-1}]/\mathbb{Z})[-1] \qquad e_*e^*(M) = M \otimes \mathbb{Z}[\ell^{-1}]$$

__Th__ (Cisinski-D.) $\exists$ une équivalence de cat triang. mon.

$$\widehat{DM}^{\ell}_{et}(S, \mathbb{Z}) \simeq D(S_{et}, \mathbb{Z}_\ell)$$

Ekedahl : systèmes ℓ-adiques

$M \in \widehat{DM}^{\ell}_{et}(S, \mathbb{Z})$ et constructible

si M/ℓ est localement (étale) constructible

$\exists\, W \xrightarrow{\pi} S$ rec^{r} étale eq

$\pi^*(M/\ell)$ est constructible

$$\widehat{DM}^{\ell}_{et,c}(S, \mathbb{Z}) \simeq D^{b}_{c}(S, \mathbb{Z}_\ell)$$

$$\cup$$

$\widehat{DM}^{\ell}_{et,gm}(S, \mathbb{Z})$

eng. par $\widehat{M}^{\ell}_{S}(X)(n)$

X/S lisse

mec

$$\begin{array}{ccc}
DM_{et}(S,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\hat{\rho}_\ell} & \widehat{DM}_{et}(S,\mathbb{Z}) \simeq D(S_{et},\mathbb{Z}_\ell) \\
\cup & & \cup \\
DM_{et}(S,\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\hat{\rho}_\ell\otimes\mathbb{Q}} & D(S_{et},\mathbb{Q}_\ell) \\
\cup & & \cup \\
DM_c(S,\mathbb{Q}) & \dashrightarrow & D^b_c(S_{et},\mathbb{Q}_\ell)
\end{array}$$

conjecture : $\hat{\rho}_\ell\otimes\mathbb{Q}$ est conservatif sur les motifs ~~objets~~ constructibles.

Rem : si $D(Ab)$ $\hat{\rho}_\ell$: est conservatif sur les objets rationnels et compacts

$$D_{parf}(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\hat{\rho}_\ell^{\mathbb{Q}}} = \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell .$$

par dévissage :

$$
\begin{tikzcd}
DM_c(k,\mathbb{Q}) \arrow[rr, "\hat{\rho}_\ell \otimes \mathbb{Q}"] & & D^b(\mathrm{Rep}^{\mathbb{Q}_\ell}(G_k)) \\
& \text{côté dérivé automorphe ?} \arrow[ul, dashed, leftrightarrow] \arrow[ur, dashed, leftrightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

t - structure motivique :

$$DM_c(S,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\hat{\rho}_\ell \otimes \mathbb{Q}} D^b_c(S_{et}, \mathbb{Q}_\ell)$$

est t-exact pour la t-structure perverse à droite

à gauche = t-structure motivique

PB 1) orthogonalité pour la t-structure motivique

en part : $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(n)[m]) = 0$ si $m < 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$= K^{(n)}_{(2n-m)}(S)_{\mathbb{Q}}$

Décomposition "topologique" de B.B.D. :

S sch. de t.f. sur un corps alg. clos de char. 0

$f : X \to S$ propre, $X/_k$ lisse, S lisse

$d = \dim(f)$

$$\underset{\in D^b_c(S, \mathbb{Q}_\ell)}{Rf_*(\mathbb{Q}_\ell)} \overset{(1)}{\simeq} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \underbrace{{}^pR^i f_*(\mathbb{Q}_\ell)}_{IC}[-i]$$

$$\bigoplus_\lambda j^i_{\lambda !*}(L^i_\lambda)$$

où L^i_λ = fa lisse sur S_λ (lisse)

= rep. de $\pi_1^{ét}(S_\lambda)$

Décomposition "topologique" de B.B.D. :

S sch. de t. f. sur un corps alg. clos de char. 0

$f : X \to S$ propre, $X/_k$ lisse, ~~S lisse~~

$d = \dim(f)$

$$Rf_*(\mathbb{Q}_\ell) \overset{①}{\simeq} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \underbrace{{}^pR^i f_*(\mathbb{Q}_\ell)}_{IC} [-i]$$

$D^b_c(S, \mathbb{Q}_\ell)$

$\bigoplus_\lambda j^i_{!*}(L^i_\lambda)$

où L^i_λ = fa lisse sur S_λ lisse

= rep. de $\pi_1^{et}(S_\lambda)$

même hypothèses. $Rf_*(\mathbb{Q}) \in DM_c(S, \mathbb{Q})$

$\Big(\hat{\rho}_\ell \otimes \mathbb{Q}$ commute aux opérations$\Big)$

$\shortparallel$

$h_S(X)$ = motif de Chow (partie pure de poids 0)

f admet une décomposition de BCH (S quelconque)

si $Rf_*(\mathbb{Q}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \underbrace{H^i_{mot}(Rf_*\mathbb{Q})}_{\text{motif de Chow pur de poids } i}(-i)$ relative Chow-Künneth

$\simeq$

$\bigoplus_\lambda M^i_\lambda$

tq $\forall \ell$ premier, $\mu_\ell : \mathrm{Spec}(S[1/\ell]) \to \mathrm{Spec}(S)$

$\hat{\rho}_\ell(M^i_\lambda) = j^i_{\lambda !*}(L^i_\lambda)$ L^i_λ = sys. local à décalage près.

Th (Cavicchi, Nagel, D.) 2020

soit $f : X \to S$ quadrique projective relative

(1) f est lisse, S régulier

(2) le discriminant de f est régulier, S est défini sur $\mathbb{C}$

alors f admet une décomposition de BCH.

pour (1) on utilise seulement :
les fibres géométriques f sont "Tate"

pour le (2) : utiliser le travail de Wildeshaus :
qui permet de définir $j_{!*}$ pour les motifs mixtes.