Conjecture de Gersten : origine

Grothendieck : dualité pour les fx coh.
Hartshorne : Residues and duality RD

X schéma, X = e top sous-jacent

1) ordre partiel sur X : $x \leq y$ si $x \in \overline{\{y\}}$

x spécialisation de y / y générisation de x

($X = \mathrm{Spec}(A)$ $\leftrightarrow$ ordre sur les id premiers
$x \leq y \leftrightarrow \mathfrak{p}_x \supset \mathfrak{p}_y$)

2) $x \in X$: $\mathrm{codim}_X(x) = \dim(\mathcal{O}_{X,x})$

$Z \subset X$ fermé irr. : $\mathrm{codim}_X(Z) = \sup\{n \mid Z \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n \subset X\}$ fermés irréductibles

$Z = \overline{\{x\}}$

$x \leq y \Rightarrow \mathrm{codim}(x) \geq \mathrm{codim}(y)$

$X^{(p)} = \{ x \in X \mid \mathrm{codim}_x(x) = p \}$, $X^{\geq p} = \{ x \mid \mathrm{codim}_x(x) \geq p \}$

(B.O. : $(X^{\geq p})_{p \in \mathbb{N}}$ filtration par coniveau)

Rq : fn de dimension sur un schéma $\delta : X \to \mathbb{Z}$

~~tra~~ (et → fonction de codimension)

$\mathcal{F}_X$ = fx ab. sur X

$Z \subset X$ fermé : $\Gamma_Z(X, F) = \{ s \in F(X) \mid \forall x \in X - Z,\ s_x = 0 \}$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Supp}(s) \subset Z$

$Z \subset X$ partie stable par spécialisation.

$\Gamma_Z(X, F) = \{ s \in F(X) \mid \mathrm{Supp}(s) \subset Z \}$

eg : $Z = X^{\geq p}$

$$\Gamma_{\mathcal{Z}}(X, F) = \varinjlim_{\substack{Z \subset \mathcal{Z} \\ Z \subset X \text{ fermé}}} \Gamma_Z(X, F)$$

Def 1. $\underline{\Gamma}_{\mathcal{Z}} F = \text{fx} : (U \subset X) \mapsto \Gamma_{\mathcal{Z} \cap U}(U, F)$

$$\mathcal{Z} \overset{\nu}{\subset} \mathcal{Z}',$$

$$0 \to \underline{\Gamma}_{\mathcal{Z}}(F) \xrightarrow{\nu_*} \underline{\Gamma}_{\mathcal{Z}'}(F) \to \overset{\text{coker}(\nu_*)}{\overset{\shortparallel}{\underline{\Gamma}_{\mathcal{Z}/\mathcal{Z}'}}} F \to 0$$

eg : $\mathcal{Z}' = X$, $\mathcal{Z} = Z \overset{i}{\subset} X$ fermé $\qquad j : (X - Z) \to X$

$$0 \to \underset{\substack{\shortparallel \\ i_* i^*(F)}}{\underline{\Gamma}_Z F} \to \underline{\Gamma}_X F \to \underset{\substack{\shortparallel \\ j_! j^*(F)}}{\underline{\Gamma}_{X/Z} F} \to 0$$

I - Cohomologie foncteurs dérivés.

$Z \subset Z'$:

$$\begin{tikzcd}
D(\mathcal{F}_X) \arrow[rr, "R\Gamma_{Z'/Z}"] \arrow[dr, "R\underline{\Gamma}_{Z'/Z}"'] & & D(Ab) \\
& D(\mathcal{F}_X) \arrow[ur, "R\Gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

$R\Gamma_{Z'/Z^\bullet} : D(\mathcal{F}_X) \xrightarrow{R\Gamma_{Z'/Z}} D(Ab)$

$\underline{H}^i_{Z'/Z} F = \underline{H}^i(R\underline{\Gamma}_{Z'/Z} F)$, $H^i_{Z'/Z}(F) = H^i R\Gamma_{Z'/Z}(F)$

ex : 1) $\dots \to H^i_Z(X,F) \to H^i(X,F) \to H^i(U,F) \to \dots$

2) $Z' = X^{\geq p} \Rightarrow X^{\geq p+1} = Z$:

$$\Gamma_{X^{(p)}} F = \Gamma_{X^{\geq p}/X^{\geq p+1}} F$$

$$R\underline{\Gamma}_{X^{\geq p+1}} F \longrightarrow R\underline{\Gamma}_{X^{\geq p}} F \longrightarrow R\underline{\Gamma}_{X^{(p)}} F$$

$$\Gamma_{X^{(p)}} F \simeq \bigoplus_{x \in X^{(p)}} i_{x*}\left(\Gamma_x\left(X_{(x)}, F\right)\right)$$

$i_x : \{x\} \longrightarrow X$

$X_{(x)} = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$

$$H^n_{X^{(p)}} F = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} i_{x*} \underset{\substack{\| \\ H^n_{\{x\}}(F)}}{H^n_x\left(X_{(x)}, F\right)}$$

Df - <u>profondeur</u> : $Z \subset X$: $\operatorname{prof}_Z(F) = \max\{n \geq 0 \mid \forall i < n \ \ \underline{H}^i_Z F = 0\}$

$\overset{\shortparallel}{\left(\operatorname{depth}_Z(F)\right)}$

ex : $X = \mathrm{Spec}(A)$, $F = \tilde{M}$ M A-module

$Z = Z = \mathrm{Spec}(A/I)$

$\mathrm{prof}_Z(F) = \mathrm{prof}_I(M)$

Th (Rees) si A local noethérien

$\mathrm{prof}_I(M) =$ lg. maximale d'une suite M-régulière dans A

IV

Lemme (RD 2.1) $F \in \mathcal{F}_x$. CS eq :

(i) $F \xleftarrow{(1)} \underline{\Gamma}_{X^{\geq p}} F \xrightarrow{(2)} \underline{\Gamma}_{X^{(p)}} F$ sont des iso.

(ii) $\exists$ un iso $F \simeq \bigoplus_{x \in X^{(p)}} i_{x*}(M_x)$

où M_x gpe ab.

(iii) $\mathrm{Supp}(F) \subset X^{\geq p}$, $\mathrm{prof}_{X^{\geq p+1}}(F) \geq 1$, F flasque

(iv) $\mathrm{Supp}(F) \subset X^{\geq p}$ et $\mathrm{prof}_{X^{\geq p+1}}(F) \geq 2$

Rq : . On peut prendre $M_x = F_x$.

. $\mathrm{prof}_{X^{\geq p+1}}(F) = +\infty$.

<u>Dem</u> : (i) $\Rightarrow$ (ii) : clair (Rq précédente) ; (ii) $\Rightarrow$ (iii) clair. (iii) $\Rightarrow$ (iv) trivial

(iv) $\Rightarrow$ (i) (1) iso $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Supp}(F) \subset X^{\geq p}$,

$0 \to \underbrace{\underline{\Gamma}_{X^{\geq p+1}} F}_{0} \to \underline{\Gamma}_{X^{\geq p}} F \xrightarrow{(2)} \underline{\Gamma}_{X^{(p)}} F \to \underbrace{\underline{H}^1_{X^{\geq p+1}} F}_{0}$

Def. 2. sous les cond (i), ... (iv) on dit

[F concentré en codim. p.

Th (RD IV. 2.3) $F \in \mathcal{F}_X$: $\exists!$ couple $\left\{ \begin{array}{l} \underline{C}^* \in C^{\geq 0}(\mathcal{F}_X) \\ \varepsilon : F \to \underline{C}^* \\ (\in \mathrm{Comp}^{\geq 0}(\mathcal{F}_X) \setminus F) \end{array} \right.$

à isomorphisme près

(1) $\forall p \geq 0$, $\underline{C}^p$ est concentré en codim. p

(2) $\forall p > 0$, $\mathrm{Supp}(\underline{H}^p \underline{C}^*) \subset X^{\geq p+2}$

(3) $\mathrm{Supp}(\mathrm{Ker}\ \varepsilon) \subset X^{\geq 1}$

$\mathrm{Supp}(\mathrm{coker}\ \varepsilon) \subset X^{\geq 2}$

suite spectrale du coniveau :

$$X = X^{\geq 0} \supset X^{\geq 1} \supset \dots \supset X^{\geq p} \supset X^{\geq p+1} \supset \dots$$

"espace filtré"

mécanisme des couples exacts. (dans $\mathcal{F}_X$)

$$\begin{tikzcd}
\underline{H}^{p+q}_{X^{\geq p+1}} F \arrow[rr] & & \underline{H}^{p+q}_{X^{\geq p}} F \arrow[dl] \\
\underline{H}^{p+q+1}_{X^{\geq p+1}} F & \underline{H}^{p+q}_{X^{(p)}} F \arrow[l] \arrow[u, phantom, "(*)"] &
\end{tikzcd}$$

suite exacte longue

$$X^{\geq p+1} \subset X^{\geq p}$$

$$D^{p,q} = \underline{H}^{p+q}_{X^{\geq p}} F, \quad E^{p,q} = \underline{H}^{p+q}_{X^{(p)}} F \quad \in \mathcal{D}_X$$

Couple exact (Massey) cohomologique de degré +1.

$$\begin{tikzcd} D^{**} \arrow[rr, "\alpha", "(-1,1)"'] & & D^{**} \arrow[dl, "\beta\ (0,0)"] \\ & E^{**} \arrow[ul, "(+1,0)\ \gamma"] & \end{tikzcd}$$

$E_1^{p,q} = E^{p,q}$

diff. $d = \beta \circ \gamma \in \mathrm{End}(E^{**})$ deg $(+1,0)$

$(d \circ d = 0)$; (E^{**}, d) complexe

couple exact dérivé : $(D', E', \alpha', \beta', \gamma')$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Im}(\gamma) \arrow[rr, dashed, "\alpha|_{\mathrm{Im}(\gamma)} = \alpha'", "(0,0)"'] & & \mathrm{Im}(\gamma) \arrow[dl, dashed, "``(\beta \circ \alpha^{-1})\text{''} = \beta'"] \\ & H(E^{**}, d) \arrow[ul, dashed, "\gamma' = \bar{\gamma}\ (+1,0)"] & \end{tikzcd}$$

$\rightarrow (1,-1)$

couple exact (coh) de degré +2

$d' = \beta' \circ \gamma'$ deg $(+2,-1)$

$E_2^{p,q} = (E')^{p,q}$

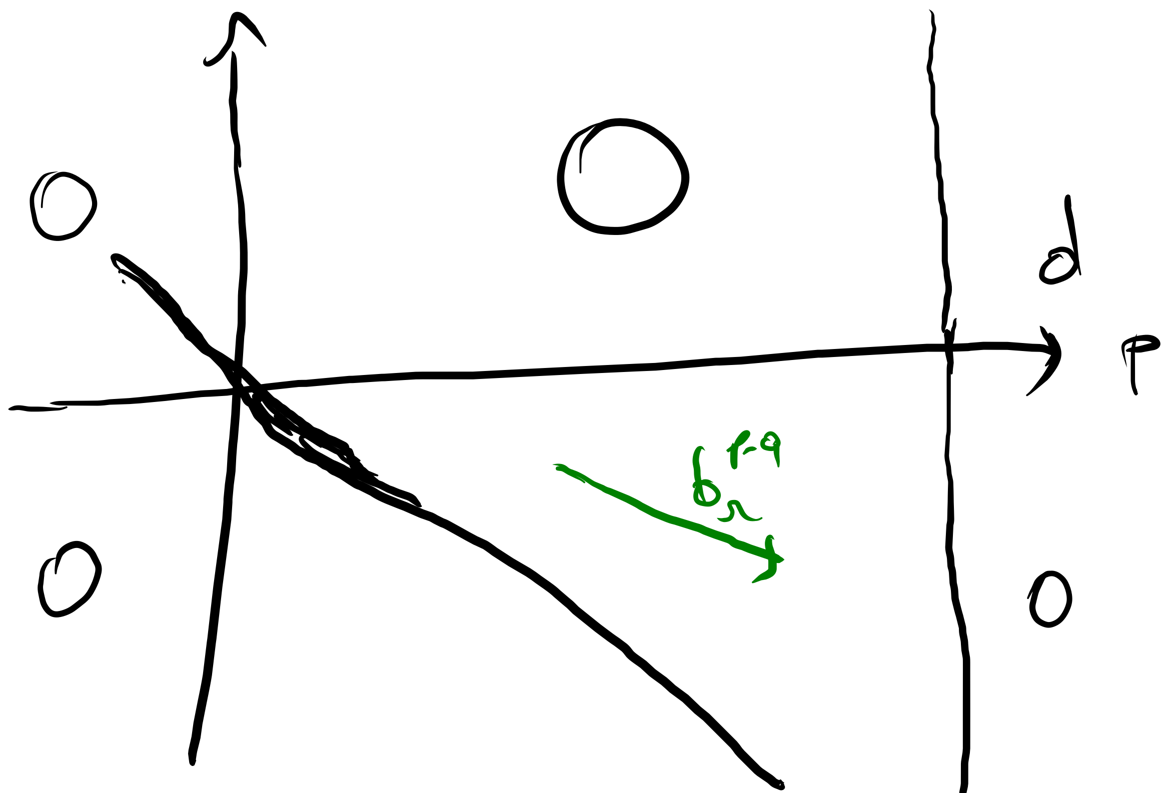
$E_r^{p,q} = (E^{(r-1)})^{p,q}$

s. sp.
conv.
à F

$$E_1^{p,q} = \underline{H}^{p+q}_{X^{(p)}} F \Rightarrow \underline{H}^{p+q}(F)$$

$$\| \quad \bigoplus_{x \in X^{(p)}} i_{x*}\left(\underline{H}^{p+q}_x F\right) \longrightarrow \underline{H}^{p,q}_x(X_{(x)}, F)$$

X noeth. de dim. finie d



lemme :

$\underline{H}^i_{X^{(p)}} F = 0$ si $i > p$

dem $H^i(X_{(x)}, F) = 0$ si $i > \dim(X_{(x)})$

$\| \ \operatorname{codim}_x^{(x)}$

$E_1^{*,0} =: \underline{C}^*$ vérifie les conditions du th.

$\underline{C}^p = \underline{H}^p_{X^{(p)}}(F)$ → filtration sur F dont les gradués sont $E_\infty^{p,-p}$

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \underline{E}_\infty^{0,0} \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=180] \\
& \underline{E}_1^{0,0} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
& \underline{C}^0
\end{tikzcd}
$$

$$0 \to F \to \bigoplus_{x \in X^{(0)}} i_{x*} \underline{H}^0_x F \to \cdots \to \bigoplus_{x \in X^{(p)}} i_{x*} \underline{H}^p_x F \to \cdots$$

Def 3 : $\underline{C}^\bullet$ est appelé le complexe <u>de Cousin</u> de F

$\big($ $F \xrightarrow{\varepsilon} \underline{C}^\bullet_{\mathrm{Cous}}(F)$.

Lemme $F \in \mathcal{F}_X$: Cond. suiv. équiv. :

(i) $\forall i \neq p$, $\underline{H}^i_{X^{\geq p}} F = 0$

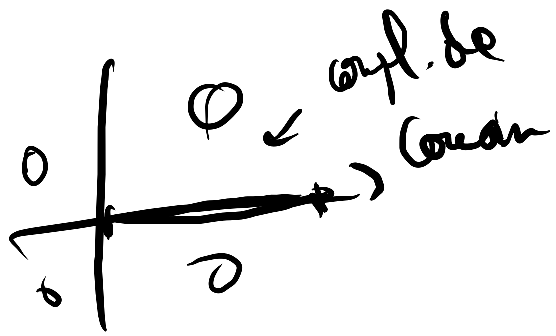
(ii) $\forall p \geq 0$, $\mathrm{prof}_{X^{\geq p}}(F) \geq p$

(iii) $\forall i \neq p$, $\underline{H}^i_{X^{(p)}} F = 0$

(iv) $\varepsilon : F \to \underline{C}^{\bullet}_{\mathrm{cous}}(F)$ quasi-iso

Preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii) par def. de la prof.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\underline{H}^i_{X^{\geq p}} F \to \underline{H}^i_{X^{(p)}} F \to \underline{H}^{i+1}_{X^{\geq p+1}} F$



(iii) $\Rightarrow$ (iv) : la s. sp. du Cousin est concentrée sur la ligne $q=0$

(iv) $\Rightarrow$ (i) $\square$

Déf. 4. $F \in \mathcal{F}_X$ est Cohen-Macaulay si les cond. du lemme sont vérifiées

F est Gorenstein si $\forall x$, $H^i_x(F)$ est injectif

$F \to \mathcal{C}^*_{\mathrm{cous}}(F)$ résolution flasque et injective de F

~~Ex~~ note : F C.M. : $\forall x \in X \quad \mathrm{prof}_x(F|_{X_{(x)}}) \geq \dim(\mathcal{O}_{X,x})$

eg : X est C.-M. si $\mathcal{O}_X$ est C.M.

$$\mathrm{prof}_x(\mathcal{O}_{X,x}) \geq \dim(\mathcal{O}_{X,x})$$

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \bigoplus_{x \in X^{(0)}} i_{x*}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \cdots$$

$$\to \bigoplus_{x \in X^{(p)}} i_{x^p *}(\mathcal{O}_{X,x^p})$$

X Gorenstein si $\mathcal{O}_{X,x^p}$ injectif.

$\Leftrightarrow$ dim. inj. finie

X schéma :

régulier $>$ intersection complète $>$ Gorenstein $>$ C.M.

(fermé régulièrement immergé dans un schéma régulier)

Rq : X schéma : K complexe dualisant $\Rightarrow$ K est Gorenstein