Conjecture de Gersten

I - K-théorie (Fulton chap. 15) (SGA6)

Def. X schéma. "$\mathrm{Coh}(X)$ = cat. des $\mathcal{O}_X$-mod coh." $\overset{\Pi(X)}{}$
abélienne

$$K'_0(X) = \langle [\mathcal{F}] \mid \mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X) \rangle \Big/ [\mathcal{F}] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}'']$$
pour $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$

variante : $P(X)$ = cat. des $\mathcal{O}_X$-mod. loc. libre $\subset \mathrm{Coh}(X)$

note : $P(X) \xrightarrow{\text{equiv. de cat}}$ fib. vect. sur X = "X-sch. loc. de la forme $\mathbb{A}^n_U$"

$$\mathcal{E} \longmapsto \mathrm{Spec}_X(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}^\vee))$$

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_X(U, E) \longleftarrow E/X$$

$$\mathcal{E}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$$

$$K_0(X) = \langle [\mathcal{E}] \mid \mathcal{E}\ \mathcal{O}_X\text{-mod. loc. libre} \rangle \Big/ [\mathcal{E}] = [\mathcal{E}'] + [\mathcal{E}'']$$

$0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$
suite de $P(X)$ exacte dans $\mathrm{Coh}(X)$

$K_0(X)$ = gpe des caractéristique d'Euler universel

p. univ. : $P(X) \xrightarrow{\Phi} A$, $\Phi(\mathcal{E}) = \Phi(\mathcal{E}') + \Phi(\mathcal{E}'')$

si $\mathcal{E}$ est ext. de $\mathcal{E}''$ par $\mathcal{E}'$

$$\exists ! \; K_0(X) \xrightarrow{\Phi} A$$

eg : $\exists$ $\mathrm{rk} : K_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$

$$[\mathcal{E}] \longmapsto \left(\mathrm{rk}\,(\mathcal{E}_\eta)\right)_{\eta \in X^{(0)}}$$

X local $\Rightarrow$ $\mathrm{rk} : K_0(X) \to \mathbb{Z}$ iso.

__Rk__ : structure d'anneau sur $K_0(X)$: $[\mathcal{E}] \otimes [\mathcal{E}'] = [\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}']$

X régulier : $\mathrm{ch} : K_0(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow CH^*(X) \otimes \mathbb{Q}$ caractère de Chern

iso d'anneaux.

dévissage et localisation :

eg : si X est régulier

$\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-cohérent $\Rightarrow \exists\ 0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_0 \to \cdots \to \mathcal{E}_n \to 0$

suite exacte dans $Coh(X)$, $\mathcal{E}_i \in P(X)$

$$[\mathcal{F}] = \sum_i (-1)^i [\mathcal{E}_i] \in K_0(X)$$

$K_0(X) \to K_0'(X)$ est un iso

eg : C = courbe ~~cuspidale~~ nodale $= V(y^2 = x^2(x+1)) \subset \mathbb{A}^2$

$X = C_{(0)}$: $K_0'(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \underset{\sim}{\mathbb{Z}}$

fonctorialité :

1) $f : Y \to X$: $f^* : P(X) \to P(Y)$, $\mathcal{E} \to f^*(\mathcal{E}) \rightsquigarrow f^* : K_0(X) \to K_0(Y)$

si f est plat : $f^* : \underset{\text{exact}}{Coh(X) \to Coh(Y)} \rightsquigarrow f^* : K_0'(X) \to K_0'(Y)$

2) $f : Y \to X$ propre

$\mathcal{F} \in Coh(Y)$, $Rf_*(\mathcal{F})$ est à coh. bornée et cohérente

$$f_*([\mathcal{F}]) = \sum_i (-1)^i [R^i f_* \mathcal{F}]$$

$$\rightsquigarrow \quad f_* : K_0'(Y) \to K_0'(X)$$

localisation : $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{j}{\hookleftarrow} U = (X - Z)$

$$K_0'(Z) \xrightarrow{i_*} K_0'(X) \xrightarrow{j^*} K_0'(U) \to 0 \quad (*)$$

suite exacte de gpes abéliens.

idée : $Coh_Z(X) = \mathcal{F} \in Coh(X)$ $Supp(\mathcal{F}) \subset Z$

(Gabriel) $Coh(X)/_{Coh_Z(X)} \simeq Coh(U) \rightsquigarrow K_0(Coh_Z(X)) \to K_0(Coh(X)) \to K_0(Coh(U)) \to 0$

dévissage : $K_0'(Coh_Z(X)) \simeq K_0'(Coh(Z))$

PB prolonger $(*)$ à gauche.

II - K-théorie supérieure. construction de Waldhausen

référence : Lurie, Barwick ...

$\underline{K} : \mathrm{Cat}_\infty^{\text{colim finie}} \longrightarrow \mathcal{S}$ ∞-cat. des espaces (instable)

$\pi_0 K(\mathcal{E}) =$ " construction de Grothendieck sur $\pi_0(\mathcal{E})$ + suite tq exacte "

Déf (Lurie) - intermédiaire : P = ens. totalement ordonné

$P^{(1)} = \{(x,y) \mid x \leq y\}$ ordonné lexico.

$\mathcal{E} = \infty$-cat. avec colim. finies) objets P-troués : déf. $X : N(P^{(1)}) \longrightarrow \mathcal{E}$ tq

(1) $\forall p \in P$, $X(p,p) \sim 0$ objet final

(2) $\forall p \leq q \leq r$,
$$\begin{array}{ccc} X(p,q) & \longrightarrow & X(p,r) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(q,q) & \longrightarrow & X(q,r) \end{array}$$
est (tq) cocartésien

ie $X(p,q) \to X(p,r) \to X(q,r)$ s. exacte

$\mathrm{Sp}(\mathcal{E})$
$\cap$
$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}(P), \mathcal{E})$

$P = [n] = \{0, \dots, n\}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
X(0,0) & \to & X(0,1) & \to & X(0,2) & \to \cdots \to & X(0,n) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 0 \sim & X(1,1) & \to & X(1,2) & & X(1,n) \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & X(n,n)
\end{array}$$

Rq : $S_0(\mathcal{C}) \simeq$ objets 0 de $\mathcal{C}$
= ∞-cat. contractile

$S_n(\mathcal{C}) := S_{[n]}\mathcal{C}$ ∞-cat.

$S_\cdot(\mathcal{C}) =$ ∞-cat. simpliciale

$\mathcal{C}$ ∞-catégorie $\to$ $B\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\simeq}$ ∞-groupoïde fondamental
complexe de Kan sous-jacent

$B(S_\cdot(\mathcal{C}))$ = complexe de Kan simplicial i.e. ens. bi-simplicial

$|BS.(\mathcal{E})|$ = "réalisation topologique" $\in \mathcal{S}$ (ens. simplicial diagonal)

<u>lemme</u> "$\pi_1(|BS.(\mathcal{E})|) = K_0(Ho(\mathcal{E}), \text{s. ltp exacte})$"

<u>Def</u>. $K^W(\mathcal{E}) := \Omega |B(S.(\mathcal{E}))|$ K-théorie de Waldhausen pointé par $0 \in \mathcal{E}$

$\underline{K}'(X) := K^W(\mathcal{D}(Coh(X)))$

$\mathcal{D}_{perf}(X) \subset \mathcal{D}(Coh(X))$ formé des complexes parfaits

X noethérien ie $\mathcal{F}^\cdot$ parfait

$H^i(\mathcal{F}^\cdot) \in P(X)$

nul pour $|i| \gg 0$

parfait $\overset{\text{Thomason}}{=}$ objets compacts de $\mathcal{D}(Coh(X))$

$Hom_{\mathcal{D}(Coh(X))}(\mathcal{F}, -)$ commute avec $\oplus$

$$\underline{K}(X) = K^W(\mathcal{D}_{perf}(X)).$$

$$K'_0(X) \simeq \pi_0 \underline{K}'(X) \quad \text{et} \quad K_0(X) = \pi_0(\underline{K}(X))$$

$$K'_n(X) = \pi_n(\underline{K}'(X)) \quad \text{et} \quad K_n(X) = \pi_n(\underline{K}(X))$$

Th (Quillen) 1)

K_*	contra.	cov. p/r propre Tor. dim finie
K'_*	covar. p/r propre	contrav. p/r à Tor dim. finie

2) X régulier, $K_*(X) \to K'_*(X)$ iso.

3) $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X \hookleftarrow U = X - Z$, suite exacte longue

$$\cdots \to K'_n(Z) \xrightarrow{i_*} K'_n(X) \xrightarrow{j^*} K'_n(U) \xrightarrow{\partial} K'_{n-1}(Z) \to \cdots$$

$$\underline{K}(X) = K^W(\mathcal{D}_{perf}(X)).$$

$$K'_0(X) \simeq \pi_0\, \underline{K}'(X) \quad \text{et} \quad K_0(X) = \pi_0(\underline{K}(X))$$

$$K'_n(X) = \pi_n(\underline{K}'(X)) \quad \text{et} \quad K_n(X) = \pi_n(\underline{K}(X))$$

<u>Th</u> (Quillen) 1)

K_*	contra.	cov. p/r propre Tor. dim finie
K'_*	covar. p/r propre	contrav. p/r à Tor dim. finie

2) X régulier, $K_*(X) \longrightarrow K'_*(X)$ iso.

3) $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X \hookleftarrow U = X - Z$, suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow K'_n(Z) \xrightarrow{i_*} K'_n(X) \xrightarrow{j^*} K'_n(U) \xrightarrow{\partial_i} K'_{n-1}(Z) \longrightarrow \cdots$$

idée : dévissage et localisation

$\mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}''$ suite exacte d'∞-cat.

thm

$K^W(\mathcal{E}') \to K^W(\mathcal{E}) \to K^W(\mathcal{E}'')$ suite fib exacte dans $\mathcal{S}$

$\mathcal{D}(\mathrm{Coh}_Z(X)) \to \mathcal{D}(\mathrm{Coh}(X)) \to \mathcal{D}(\mathrm{Coh}(U))$

eg : i) $K_1(A) = GL(A)^{ab}$ (preuve de Quillen : th. $+ = Q$)

Matsumoto : ii) $K_2(K) \simeq K_2^M(K)$, K corps

1') : $K_1(A) \xrightarrow{\det} A^\times$; $\mathrm{Ker}(\det) = SK_1(A)$.

A semi-local : $SK_1(A) = 0$; $K_1(A) = A^\times$

$\to X = C_{(0)}$

$\downarrow$

$\mathrm{Spec}(A)$

$K = \mathrm{Frac}(A)$, $k = A/\mathfrak{m}$

$$\begin{array}{ccccccccc} K_1^\times(K) & \xrightarrow{\partial} & K_0^\times(k) & \to & K_0'(A) & \to & K_0^\times(K) & \to & 0 \\ \| & & \| & & & & \| & & \\ K^\times & \xrightarrow{\mathrm{ord}} & \mathbb{Z} & & & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

$\mathrm{Im}(\mathrm{ord}) = 2\mathbb{Z}$

III - Conjecture de Gersten

formul^e originale Gersten 73.

$n \geq 0$: $X \overset{K_n}{\longmapsto} K_n(X)$ est un préfx sur Sch.

$\mathcal{K}_n$ fx Zariski associé : K-théorie non ramifiée

$\mathcal{K}_X^{-n} = \mathcal{K}_n|_{X_{Zar}}$

Conj X régulier $\Rightarrow$ (A) : $\mathcal{K}_X^*$ est Cohen - Macaulay

ie $\mathcal{K}_X^* \to \underline{C}^*_{Cou}(\mathcal{K}_X^*)$ est un quasi-iso.

se teste localement : $X = \mathrm{Spec}(A)$, A local régulier. $x \in X_{(0)}$

$$\underline{C}^*_{Cous}(\mathcal{K}_X^{-n})_x = \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K_n(\kappa(x)) \to \dots \to \bigoplus_{x^p \in X^{(p)}} K_{n-p}(\kappa(x^p)) \to \dots$$

(= complexe de Rost pour K_*)

Conj X local régulier : $\mathcal{G}_{loc}(X)$

$$0 \to K_n(X) \to \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K_n(k(x)) \to \cdots \quad \text{et exacte.}$$

eg : $n=0$. $\quad 0 \to \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{K_0(X)}} \xrightarrow{\sim} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{K_0(k(X))}} \to 0$

$n=1$: $\quad 0 \to A^\times \to K^\times \to \underbrace{\bigoplus_{x \in X^{(1)}} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{K_0(k(x))}}}_{\underset{Z^1(X)}{\parallel}} \to 0$

$X = \mathrm{Spec}(A)$

$K = \mathrm{Frac}(A)$

exactitude : eg (A local régulier $\Rightarrow$ factoriel)

PB : A anneau de val. disc.

$$0 \to K_n(A) \to K_n(K) \xrightarrow{\partial_i} K_{n-1}(k) \to 0$$

suite exacte.

Dennis - Stein : OK pour $n=2$

Gersten : OK pour tout n si k = corps fini

(ou k alg. sur un corps fini)

Conceptualisation :

rappel : $X \supset \ldots \supset X^{\geq p} \supset X^{\geq p+1} \supset \ldots$

"filtration par coniveau" (Bloch - Ogus)

$$D(X^{\geq p}) = \{ a^\bullet \in D(\mathrm{Coh}(X)) \mid \forall i\ \mathrm{Supp}(H^i(a^\bullet)) \subset X^{\geq p} \}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(X^{\geq p+1}) \arrow[rr] & & \mathcal{D}(X^{\geq p}) \arrow[dl] \\
& \mathcal{D}(X^{(p)}) \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd}$$

suite lg exacte

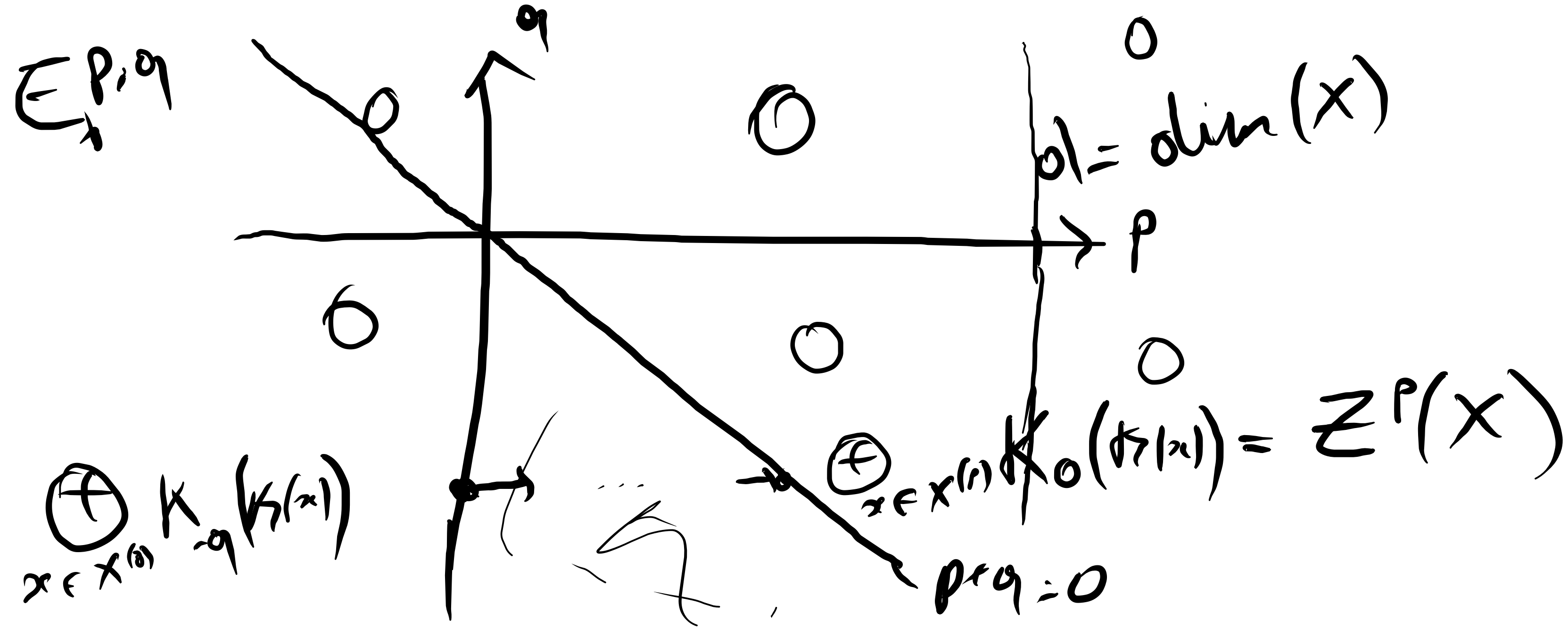
(limites de suites de localisation)

$$\begin{tikzcd}
K_{-p-q}(X^{\geq p+1}) \arrow[rr, "\alpha\ (-1,1)"] & & K_{-p-q}(X^{\geq p}) = D^{p,q} \arrow[dl, "\beta\ (0,0)"] \\
K_{-p-q-1}(X^{\geq p+1}) & K_{-p-q}(X^{(p)}) = E^{p,q} \arrow[l, "\gamma\ (+1,0)"] &
\end{tikzcd}$$

ie même situation que la dernière fois

$$E_1^{p,q} = K_{-p-q}(X^{(p)}) \Rightarrow K_{-p-q}(X)$$

$$\simeq \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K_{-p-q}(k(x))$$



$$E_1^{*,-q} \simeq C^*(X, K_{-q}) \quad \text{"complexe de Rost"}$$

Lemme (exo)

$\mathcal{G}_l(X) \Leftarrow_{(1)} \forall (p,q),\ p \geq 0,\ K_{-p-q}(X^{\geq p+1}) \xrightarrow{\alpha^{p,q}} K_{-p-q}(X^{\geq p})$ est nul

$\Leftarrow_{(2)} \forall (p,q),\ p > 0,\ E_2^{p,q} = 0$

Th (Quillen) X semi-local ess. lisse$/k$ alors $\mathcal{G}_l(X)$ ok

preuve : on montre (1).

$\mathcal{X} = X_{(S)}$ $\quad X/_k$ affine lisse.

$S \subset X$ s.-ens. fini de pts

$\forall n \quad K_n(\mathcal{X}^{\geq p+1}) \to K_n(\mathcal{X}^{\geq p})$ est nulle.

$\varinjlim_{\substack{T \overset{\nu}{\subset} Z \subset \mathcal{X} \\ \mathrm{codim}\, T \geq p+1 \\ \mathrm{codim}\, Z \geq p}} \left(K_n(T) \xrightarrow{\nu_*} K_n(Z) \right)$ est nulle.

il suffit de ~~i.e~~ / $\forall\, T \subset X \quad \mathrm{codim}_X T \geq p+1$

quitte à réduire X ou v. de S $\quad \exists\, T \overset{\nu}{\subset} Z \subset X, \quad \nu_* : K_n(T) \to K_n(Z) = 0$

quitte à réduire X : $\exists\, D \subset X$ diviseur régulier principal (D lisse$/_k$)

tq $\quad T \subset D \subset X$

Lemme (Quillen) (normalisation de Noether "immergée")

quitte à réduire X au v. de s

$d = \dim(X) - 1$.

$\exists\ X \longrightarrow \mathbb{A}^d$ lisse (dim. rel. 1)

tq $D \hookrightarrow X \xrightarrow{q} \mathbb{A}^d$ finie.

exo

fin preuve :

$$\begin{tikzcd}
\bar{T} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & \bar{D} = q^{-1}(D) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \arrow[d, "q"] \\
T \arrow[r, hook] \arrow[u, bend left, dashed, "\sigma"] & D \arrow[r, "\text{fini}"'] \arrow[ur] & \mathbb{A}^d
\end{tikzcd}$$

fini

p : courbe relative lisse, σ section. quitte à réduire X

OPS $\sigma(T)$ est un div. principal.

$Z = f(\bar{T}) \subset X$ fermé (f fini)

$T \overset{\sim}{\hookrightarrow} Z \subset X$ $\quad \dim(Z) = \dim(\bar{T}) = \dim(T) + 1$: $\operatorname{codim} Z = \operatorname{codim} T - 1 \geq p$

$\to \quad \nu_* = 0$

$$\begin{tikzcd} & \bar{T} \arrow[dl, "\sigma", "p"'] \arrow[dr, "f \text{ fini}"] & & \\ T \arrow[rr, "\nu"'] & & Z \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

$\nu_* = f_* \sigma_* \qquad \sigma_* : K'_n(T) \longrightarrow K'_n(\bar{T})$

$$\sigma_*(x) = \sigma_*(\overset{\in K_0}{1} \cdot \sigma^* p^*(x))$$

$$\overset{\text{projection}}{=} \underbrace{\sigma_*(1)}_{\eta_{\bar{T}}(\phi(T)) = 0} \cdot p^*(x) = 0 \quad \square$$

car $\phi(T)$ est principal

Rq. $X = \operatorname{Spec}(A)$ var. dist. intègre char.

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec}(B) \arrow[dl, "\text{loc. dense}"'] \arrow[dr, "\text{fini}"] & \\ T = \operatorname{Spec}(k) \arrow[rr] & & \operatorname{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ B k-alg. $\operatorname{car}(\operatorname{Frac}(B)) = \operatorname{char}(k)$

$A \subset B$ finie, $\operatorname{Frac}(B) / \operatorname{Frac}(A)$

note finale : importance :

$$\begin{array}{ccccc}
E_1^{p-1,p} & \xrightarrow{d_1^{p-1,p}} & E_1^{p,p} = Z^p(X) & \to & 0 \\
\| & \nearrow_{\text{div}} & & & \\
\bigoplus_{x \in X^{(p-1)}} K_1(\kappa(x)) & & & & \\
\| & & & & \\
\kappa(x)^* & & & &
\end{array}$$

$$E_2^{p,p} = \operatorname{coker}(\text{div}) = CH^p(X)$$

$$\mathcal{G}(X) \to CH^p(X) \simeq H^p_{Zar}(X, \mathcal{K}_X^{-p}), \quad \mathcal{K}_X^{-p} = \mathcal{K}_{-p}$$

X régulier

$$\mathcal{K}_X^* \otimes \mathcal{K}_X^* \to \mathcal{K}_X^*$$

$\rightsquigarrow$ produit sur $CH^*(X)$ (conjecture de Grothendieck)