Faisceaux homotopiques et complexe de Rost-Schmid

16/04/21

But : Etudier le complexe de Rost-Schmid associé à un faisceau Nisnevich fortement $\mathbb{A}^1$-invariant en groupes abéliens sur Sm_k.

(noté M)

On note $M_{-n}(F, \mathcal{L}) = M_{-n}(F) \otimes_{\mathbb{Z}[F^\times]} \mathbb{Z}[\mathcal{L}^\times]$

$M_0(F, \mathbb{A}^1) = M(F)$

X schéma, $z \in X^{(n)}$, $\omega_{z/X} = \Lambda^n \left(\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2\right)^\vee$

Déf : X lisse sur k, on note

$$C^n(X,M) = \bigoplus_{z \in X^{(n)}} M_{-n}\left(\kappa(z), \omega_{z/X}\right)$$

différentielles, $x, y \in X$, $Z = \overline{\{x\}}$, si $y \notin Z^{(1)}$, alors $\partial^x_y = 0$

si $y \in Z^{(1)}$, on note $\tilde{Z} \to Z$ la normalisation

on pose $\partial^x_y = \sum_{z|y} \mathrm{Tr}_{\kappa(z)/\kappa(y)} \circ \partial_z$

$\boxed{(F,v) \text{ valué}, \ \partial_v : M(F) \to M(\kappa(v), -\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2)}$

Pushforward : $f : X \to Y$ entre schémas

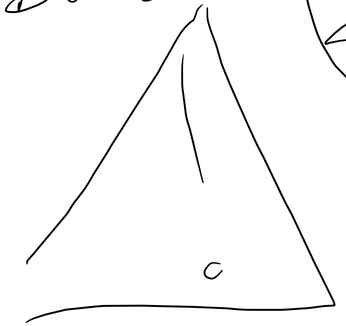
où $d = \dim(Y) - \dim(X)$

$$f_* : C^*(X, M_{-k}, \omega_f) \to C^{*-d}(Y, M_{-d-2})$$

si $y = f(x)$ et $\kappa(x)/\kappa(y)$ finie, alors $(f_*)^x_y = \mathrm{Tr}_{\kappa(x)/\kappa(y)}$

$$M(\kappa(x)) \simeq M(\kappa(y))$$

sinon $(f_*)^x_y = 0$



Mal défini !

Thm : Soit $f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ morphisme fini où A, B sont des anneaux de valuation discrète lisses sur k et B/A monogène.

Alors $f_* : C^*(\mathrm{Spec}(B), M_{-1}, \underset{\overset{\shortparallel}{\mathcal{N}_{f_k}}}{\omega_f}) \longrightarrow C^*(\mathrm{Spec}(A), M_{-1})$

est un morphisme de quasi-complexes.

$$
\begin{tikzcd}
M_{-1}(L) \arrow[r, "\partial_{\mathfrak{z}}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_{-2}(\kappa(\mathfrak{z})) \arrow[d] \\
M_{-1}(K) \arrow[r, "e\,\partial_{\mathfrak{s}}"'] & M_{-2}(\kappa(\mathfrak{s}))
\end{tikzcd}
$$

$K = \mathrm{Frac}(A)$ $\qquad$ $\mathfrak{s} \in \mathrm{Spec}(A)$ $\qquad$ pts

$L = \mathrm{Frac}(B)$ $\qquad$ $\mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}(B)$

Thm ([Mor12, Thm 5.26])

$f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ morphisme fini

A, B ess. lisses$/k$ dim 1

Alors

$f_* : C^*(\mathrm{Spec}(B), M_{-1}, \omega_f) \to C^*(\mathrm{Spec}(A), M_{-1})$

est un morphisme de quasi-complexes.

$$M_{-1}(L) \xrightarrow[\mathrm{Tr}_{L/K}]{(x_1, \ldots, x_n)} M_{-1}(K)$$

dem : soit $K \subset L$ ext. finie
$$\begin{matrix} K & \subset & L \\ \parallel & & \parallel \\ \mathrm{Frac}(A) & & \mathrm{Frac}(B) \end{matrix}$$

soit $K \subset E \subset L$ extension intermédiaire

C la clôture intégrale de A dans E

Par fonctorialité, il suffit de montrer le résultat pour $\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(C)$

donc w.l.o.g. L/K est monogène

(mieux : si $\mathrm{car}(k) = 0$, wlog B/A monogène)

Cor 5.30 $f : X' \to X$ fini

Alors $f_* : C^*(X', \nu(f), M_{-1}) \longrightarrow C^*(\overset{X}{\cancel{Y}}, M_{-1})$

est un morphisme de quasi-complexes.

Cor 5.29 X ess. lisse/k $\boxed{\dim(X) = 2}$

Alors l'isomorphisme

$$C^*_{RS}(X,M) \to C^*_{Gersten}(X,M)$$ est un isomorphisme de quasi-complexes.

En particulier, $\partial_{RS} \circ \partial_{RS} = 0$.

Par définition, $C^*_{Gersten}(X,M)$ est la ligne $q=0$ du terme E_1 de la suite spectrale de coniveau

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{p+q}_x(X,M) \Longrightarrow H^{p+q}(X,M)$$

dem : Soit $z \in X$, $Y \subset X$ sous-schéma fermé intègre de codimension 1.

On veut montrer que ${}^{RS}\partial^{y}_{z} = {}^{Gersten}\partial^{y}_{z}$

On sait qu'on peut faire une succession de blow-ups $\tilde{X} \to X$ en des pts fermés de sorte $\tilde{Y} \to Y$ (propre) est ess. lisse sur k

Soient $z_1, \dots, z_n$ les points fermés sur z

On a ${}^{RS}\partial^{\tilde{y}}_{z_i} = {}^{Gersten}\partial^{\tilde{y}}_{z_i}$ car $\tilde{Y}$ est ess. lisse sur k.

On conclut car $f_* \circ \partial = \partial \circ f_*$ (Cor 5.25)

Thm : X lisse$/k$, alors le complexe de R-S.

$C^*(X, M_{-1})$ est un complexe

dem : $z \in X^{(n)}$, Y ss-schéma fermé intègre $\mathrm{codim}_X(Y) = n-2$

$y \in Y$ pt générique

On veut que $\partial \circ \partial = M_{-n+1}\left(\kappa(y), \omega_{y/X}\right) \to M\left(\kappa(z), \omega_{z/X}\right)$

$= 0$.

wlog X t-f, affine, lisse sur $\kappa(z)$, $z \in X^{(n)}$ point fermé

Lemme de normalisation de Serre :

il existe $X \to \mathbb{A}^n_{\kappa(z)}$ fini tel que

$z \longmapsto 0$

et l'image de Y est $\mathbb{A}^2_{\kappa(z)} \subset \mathbb{A}^n_{\kappa(z)}$

Via le pushforward, wlog

$X = \mathbb{A}^n_{\kappa(z)}$ et $Y = \mathbb{A}^2_{\kappa(z)}$ et $z = 0$ $\square$

Lemme :

$$\partial_y \circ \tilde{g}^* = 0 \qquad \text{(R3c)}$$

$$\partial_y \circ [t] \circ \tilde{g}^* = \mathrm{Id} \qquad \text{(R3d)}$$

Thm ($\mathbb{A}^1$-invariance) X lisse$/k$

$\pi : \mathbb{A}^1_X \longrightarrow X$

Alors $\pi^* : C^*(X, M_{-1}) \longrightarrow C^*(\mathbb{A}^1_X, M_{-1})$ est un quasi-isom.

dem : ok en degré ≤ 1 car le complexe de RS est égal au complexe de Gersten.

On note "$\underset{\parallel}{C^*(X,M)}$
$X \bullet\!\!\longrightarrow Y$"

On pose

$$\begin{tikzcd}
\eta : X \times \mathbb{A}^1_k \arrow[r, "\circ"] & X \times (\mathbb{A}^1 - \{0\}) \arrow[r, "\circ", "\langle -1\rangle^n[-1/t]"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\langle -1\rangle^n[-1/t]"] & X \times (\mathbb{A}^1 - \{0\}) \arrow[d, "\partial_\infty"] \\
& & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H : X \times \mathbb{A}^1_k \arrow[r, "p_2^*"] & X \times (\underset{\substack{\parallel \\ \operatorname{Spec} k[t]}}{\mathbb{A}^1} \times \underset{\substack{\parallel \\ \operatorname{Spec} k[s]}}{\mathbb{A}^1} - \Delta) \arrow[r, "\langle -1\rangle^n[s-t]"] & X \times (\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 - \Delta) \arrow[d, "p_1^*"] \\
& & X \times \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[t]$

$\Delta = \{s - t = 0\}$

$$r \circ \partial = \partial \circ r$$

$$r \circ \pi^* = Id \quad \text{(cf lemme avant)}$$

Il suffit de montrer que

$$\partial \circ H + H \circ \partial = Id - \pi^* \circ r$$

$\boxminus$

Thm (Acyclité) $n \in \mathbb{Z}$ X = localisation d'un point de codim $\leq n$ en un schéma k-lisse

Alors la suite

$$0 \to M_{-1}(X) \to C^0(X, M_{-1}) \to C^1(X, M_{-1}) \to \cdots \to C^n(X, M_{-1}) \to 0$$

est exacte.

Prop ① X lisse

$U \mapsto C^n(U, M_{-1})$ le préfaisceau sur le site Nis $\in X_{Nis}$

est un faisceau Nisnevich

De plus, il est acyclique pour Nis et Zar i.e

$$H^*_{Zar}(U, C^n(X, M_{-1})) = H^*_{Nis}(U, C^n(X, M_{-1})) = 0$$

si $* > 0$.

Prop 2.

$$H^*(C^*(X,M)) \simeq H^*_{Zar}(X,M) \simeq H^*_{Nis}(X,M)$$

Thm (Morel) M_{-1} faisceau Nisnevich

en groupes abéliens.

Alors (i) fort^t $\mathbb{A}^1$-invariant

$\Updownarrow$

(ii) strict^t $\mathbb{A}^1$-inv.

dem : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\mathbb{A}^1$-inv. + Prop 2.
$C^*(X, M_{-1})$

$\square$