

F. Morel, 6.1, partie 2.

• Erratum :

Définition de la "composante connexe"
en le point base :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}^{(0)} & \xrightarrow{h} & \mathcal{B} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ * & \xrightarrow{\text{pt base}} & \pi_0(\mathcal{B}) \end{array}$$

• Faits :

- $\mathcal{B}^{(0)}$ est (simplicialement) connexe : [HTT 6.5.1.16]
- $\mathcal{B}^{(0)} \hookrightarrow \mathcal{B}$ mono : pullback d'un mono
- $\mathcal{B}^{(0)}$ universel parmi les $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}$ pointés, $\mathcal{F}$ connexe (PU du pullback).

$\Rightarrow \mathcal{B}^{(0)}$ $\mathbb{A}^1$ -local si $\mathcal{B}$ l'est.

① Préfaïceaux d'homotopie à supports.

• $\mathcal{B}$: pointé, $\mathbb{A}^1$ -local, **connexe**.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Déf : } \forall x \in \text{Sm}_k, \forall U \hookrightarrow X, \forall n \geq 0. \\ \pi_n(x, U) := [S^n \wedge (X/U), \mathcal{B}], \\ \quad = \pi_n \text{Map}_*(X/U, \mathcal{B}). \end{array} \right.$$

Suites longues d'homotopie relative :

Lemme : $\forall X \in \mathbf{Sm}_h$, $\forall V \hookrightarrow U \hookrightarrow X$
suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \Pi_n(X, U) \rightarrow \Pi_n(X, V) \rightarrow \Pi_n(U, V) \rightarrow \Pi_{n-1}(X, U) \rightarrow \cdots$$

Preuve :

$$\begin{array}{ccccc} V_+ & \longrightarrow & U_+ & \longrightarrow & X_+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * & \xrightarrow{\quad \Gamma_h \quad} & U/V & \xrightarrow{\quad \Gamma_h \quad} & X/V \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & * & \xrightarrow{\quad \Gamma_h \quad} & X/U \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccc} U/V & \longrightarrow & X/V \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \xrightarrow{\quad \Gamma_h \quad} & X/U \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}_*(X/U, B) & \longrightarrow & \text{Map}_*(X/V, B) \\ \downarrow & \xrightarrow{\quad \Gamma_h \quad} & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \text{Map}_*(U/V, B) \end{array}$$

$\text{Map}_*(-, B)$ $\rightsquigarrow$

Puis suite exacte longue d'une suite fibre .

(Utiliser $\Omega \text{Map}_*(A, B) \simeq \text{Map}_*(\Sigma A, B)$.) $\square$

Lemme : Si T_1, T_2 fermés disjoints de X , alors,

$$\Pi_0(X, X - T_1 \cup T_2) \simeq \Pi_0(X, X - T_1) \times \Pi_0(X, X - T_2).$$

Preuve :

$$\begin{array}{ccc} X - T_1 \cup T_2 & \longrightarrow & X - T_1 \\ \downarrow & \lrcorner ! & \downarrow \\ X - T_2 & \longrightarrow & X \end{array}$$

(□₁)

$$\begin{array}{ccc} X - T_1 \cup T_2 & \longrightarrow & X - T_1 \cup T_2 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X - T_1 \cup T_2 & \longrightarrow & X - T_1 \cup T_2 \end{array}$$

(□₀)

$$\text{hoCofibre}(\square_0 \rightarrow \square_1) = \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & X - T_1 / X - T_1 \cup T_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X - T_2 / X - T_1 \cup T_2 & \xrightarrow{\quad \Gamma_h \quad} & X / X - T_1 \cup T_2 \end{array}$$

$$\text{or: } \begin{cases} X - T_1 / X - T_1 \cup T_2 \simeq X / X - T_2 \\ X - T_2 / X - T_1 \cup T_2 \simeq X / X - T_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{\quad} & X/X-T_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \pi_h \\
 X/X-T_1 & \xrightarrow{\quad} & X/X-T_1 \cup T_2
 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow X/X-T_1 \cup T_2 \simeq X/X-T_1 \vee X/X-T_2$$

$$\text{et } [F \vee G, H] \simeq [F, H] \times [G, H]. \quad \square.$$

Fait: on peut étendre la déf de ces préfaisceaux à $V \hookrightarrow U \hookrightarrow X$, X *essentiellement* lisse, et les propriétés ci-dessus restent valable.

Lemme: $X \in \text{Sm}_k$, $\emptyset \neq \Omega \subset X$, $Z \hookrightarrow X$, $\text{codim}(Z) > 0$.

Il existe $\Omega \subset X$, *ouvert*, $Z' \hookrightarrow X$, *fermé*,

tq: $\emptyset \neq \Omega$

• $Z' \subset \Omega$, $\text{codim } Z' = \text{codim}(Z) - 1$.

• $Z_\Omega := Z \cap \Omega \subset Z'$,

• La flèche canonique $\Omega/\Omega-Z' \rightarrow \Omega/\Omega-Z_\Omega$ se factorise $*$.

En part, $\Pi_n(\Omega, \Omega-Z_\Omega) \rightarrow \Pi_n(\Omega, \Omega-Z')$ est la flèche $*$.

Breue : **Lemme de Gabler** : il existe

- Ω ouvert de X , $s \in \Omega$
- V un ouvert d'un $\mathbb{A}_k^n$.
- $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{A}_V^1$, **étale**.

Tq 1) $Z_\Omega \hookrightarrow \Omega \xrightarrow{\phi} \mathbb{A}_V^1$ est une **immersion fermée**

2) $\phi^{-1}(\phi(Z_\Omega)) = Z_\Omega$.

3) $Z_\Omega \rightarrow \mathbb{A}_V^1 \rightarrow V$ **fini** ($F :=$ son image)

• On pose $Z' := \phi^{-1}(\mathbb{A}_F^1)$. **$\text{codim}(Z') = \text{codim}(Z) - 1$.**

$$\begin{array}{ccc} \Omega - Z_\Omega & \longrightarrow & \Omega \\ \downarrow \text{!} & \text{!} & \downarrow \\ \mathbb{A}_V^1 - Z_\Omega & \longrightarrow & \mathbb{A}_V^1 \end{array}$$

$\leadsto \Omega / \Omega - Z_\Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_V^1 / \mathbb{A}_V^1 - Z_\Omega$

$$\begin{array}{ccc} \Omega - Z' & \longrightarrow & \Omega \\ \downarrow \text{!} & \text{!} & \downarrow \phi \\ \mathbb{A}_V^1 - \mathbb{A}_F^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_V^1 \end{array}$$

$\leadsto \Omega / \Omega - Z' \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_V^1 / \mathbb{A}_V^1 - F$

$$\begin{array}{ccc} \Omega/\Omega - Z' & \longrightarrow & \Omega/\Omega - Z_\Omega \\ \downarrow \textcolor{red}{S} & & \downarrow \textcolor{red}{S} \\ A_V^1/A_V^1 - A_F^1 & \longrightarrow & A_V^1/A_V^1 - Z_\Omega \end{array} \Rightarrow \text{suffit de mq}$$

$$A_V^1/A_V^1 - A_F^1 \xrightarrow{\textcolor{red}{G}} A_V^1/A_V^1 - Z_\Omega$$

$\textcolor{red}{\hookrightarrow *}$

$$\begin{array}{ccc} A_V^1 - Z_\Omega & \longrightarrow & A_V^1 \\ \downarrow \textcolor{red}{!} & & \downarrow \textcolor{red}{!} \\ P_V^1 - Z_\Omega & \longrightarrow & P_V^1 \end{array}$$

$$A_V^1/A_V^1 - Z_\Omega \xrightarrow{\sim} P_V^1/P_V^1 - Z_\Omega$$

$\Rightarrow$ suffit de montrer que

$$A_V^1/A_V^1 - A_F^1 \longrightarrow P_V^1/P_V^1 - Z_\Omega \text{ passe par } *.$$

$$V/V - F \xrightarrow{\sim \textcolor{red}{\rho_0}} A_V^1/A_V^1 - A_F^1 \longrightarrow P_V^1/P_V^1 - Z_\Omega'$$

$$\rho_\infty: V/V - F \longrightarrow P_V^1/P_V^1 - Z_\Omega, \text{ mais } \text{im}(\rho_\infty) \subseteq P_V^1 - Z_\Omega$$

$\textcolor{red}{\hookrightarrow *}$

□

, Maintenant: X local, essentiellement lisse.

Notation: $\mathcal{F} := \{ Z^2 \hookrightarrow Z^1 \hookrightarrow X, \text{codim}(Z^i) \geq i \}.$

pour $Z^2 \subset Z^1 \subset X \in \mathcal{F}$, $\textcolor{red}{U}^i := X \setminus Z^i.$

$\mathcal{F}$ est ordonné:

$$(z^2 \subset z'^2 \subset X) \Leftrightarrow (z^2 \subset z'^2 \text{ et } z' \subset z'^1)$$

$$\forall z^2 \subset z'^2 \subset X \in \mathfrak{X}: \quad \emptyset \subset U_1 \subset X$$

$$\pi_1(x, U_1) \xrightarrow{x=Z_1 \text{ triviale.}} \pi_1(x) \rightarrow \pi_1(U_1) \rightarrow \pi_0(x, U_1) \xrightarrow{\text{triviale.}} \pi_0(x) \rightarrow \pi_0(U_1)$$



$$[1 \rightarrow \pi_1(x) \rightarrow \pi_1(U_1) \rightarrow \pi_0(x, U_1) \rightarrow 1], [1 \rightarrow \pi_0(x) \rightarrow \pi_0(U_1)]$$

$$\downarrow \text{Colim}_{\mathfrak{X}}$$

$$[1 \rightarrow \pi_1(x) \rightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{corps de Fclon} \\ \text{de } X}} \text{Colim}_{\mathfrak{X}} \pi_0(x, U_1) \rightarrow 1], [1 \rightarrow \pi_0(x) \xrightarrow{*} \underbrace{\pi_0(F)}_{=*}]$$

On reprend un drapeau arbitraire: $U_1 \subset U_2 \subset X$

$$\pi_0(x, U_2) \rightarrow \pi_0(x, U_1) \rightarrow \pi_0(U_2, U_1)$$



$$\text{Colim}_{\mathfrak{X}} \pi_0(x, U_2) \xrightarrow{\quad} \text{Colim}_{\mathfrak{X}} \pi_0(x, U_1) \rightarrow \text{Colim}_{\mathfrak{X}} \pi_0(U_2, U_1)$$



$$* \rightarrow \underbrace{\text{Colim}_{\mathfrak{X}} \pi_0(x, U_1)}_{\substack{\uparrow \pi_1(F) \text{-en}}} \xrightarrow{\quad} \text{Colim}_{\mathfrak{X}} \pi_0(U_2, U_1)$$



$\pi_1(F)$ -équiar

$$(\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \text{Colim}_{\mathfrak{X}} (\pi_0(U_2, U_1) \rightarrow *))$$

Donc $\rightarrow$ injective : $u \mapsto [s^* \wedge u, \beta]$

CCL

$$1 \rightarrow \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_1(F) \Rightarrow \operatorname{Colim}_{\mathcal{F}} \Pi_0(U_2, U_1)$$

$\uparrow$
 action + sous-groupe
 d'isotropie du pt base = $\Pi_1(X)$.
 + image = *orbite du point*

Cas particulier : $\gamma := X_y, y \in X^{(1)}$:

- γ local de dim. 1 $\Rightarrow \mathcal{F}_\gamma = \{\emptyset \subset \{y\} \subset \gamma\}$.

$$\leadsto 1 \rightarrow \Pi_1(\gamma) \rightarrow \Pi_1(F) \rightarrow \Pi_0(\gamma, \gamma - \{y\}) \rightarrow *$$

$\parallel$
 $\operatorname{Colim}_{\mathcal{F}_\gamma} \Pi_0(U_2, U_1)$

Notation : $H_y^1(X, \Pi_1) := \Pi_1(F) / \Pi_1(X_y)$

• Si $\phi : X' \rightarrow X$ est un morphisme étale

on obtient $\tilde{\phi} : \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_{X'}$

$$z^2 \subset z^1 \subset X \mapsto \phi^{-1}(z^2) \subset \phi^{-1}(z^1) \subset X'$$

$\leadsto$ on obtient une flèche de suites

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & \Pi_1(X) & \rightarrow & \Pi_1(F) & \Rightarrow & \operatorname{colim}_{\tilde{X}_X} \Pi_0(U_2, U_1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \rightarrow & \Pi_1(X') & \rightarrow & \Pi_1(F') & \Rightarrow & \operatorname{colim}_{\tilde{X}_{X'}} \Pi_0(U_2', U_1')
 \end{array}$$

En prenant $X' = X_y$, y de $\text{codim } 1$, on a une flèche
 a une flèche $\varphi: \operatorname{colim}_{\tilde{X}_X} \Pi_0(U_2, U_1) \rightarrow \prod_{y \in X^{(1)}} H_y^1(X, \Pi_1)$

Lemme: φ induit

$$\operatorname{colim}_{\tilde{X}} \Pi_0(U_2, U_1) \cong \prod'_{y \in X^{(1)}} H_y^1(\Pi_1)$$

Décaule formellement de l'additivité

(Preuve identique à [CTHK, 1.2.1 b])

Idées de preuve:

- $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq \prod'_{y \in X^{(1)}} H_y^1(\Pi_1)$:

Prendre $[\sigma] \in \operatorname{colim}_{\tilde{X}} \Pi_0(U_2, U_1)$,

représenté par un elem $\sigma \in \Pi_0(U_2, U_1)$

pour un certain drapeau. Alors $\forall y \notin (Z^1)^{(0)}$, σ

est d'image $\neq$ dans $H_y^1(\Pi_1)$.

- Inj: si $\sigma, \sigma' \in \Pi_0(U_2, U_1)$ ont même image,

ils ont même image dans $\prod_{y \in (Z^1)^{(0)}} H^1_y(\pi_1)$,
 qu'il faut à augmenter Z^2 ,

$$Z^1 \setminus Z^2 = \coprod_{y \in (Z^1)^{(0)}} (\overline{\{y\}} \setminus Z^2)$$

$$\pi_0(U_2, U_1) = \pi_0(U_2, U_2 - \coprod_{y \in (Z^1)^{(0)}} \overline{\{y\}} \setminus Z^2)$$

$$= \prod_{y \in (Z^1)^{(0)}} \pi_0(U_2, U_2 - (\overline{\{y\}} \setminus Z^2))$$

• Surj : mêmes idées.

□

CCL :

$$1 \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(F) \Rightarrow \prod'_{y \in X^{(1)}} H^1_y(\pi_1)$$

est une *suite exacte*.

(B) Rappels : Faisceaux *non ramifiés*.

Def : • Un faisceau zariski $\mathcal{G} : \text{Sm}_k^{\text{ar}} \rightarrow \text{Set}$
 est *non ramifié* si

1) Si $X \in \text{Sm}_k$

$$\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha \in X^{(0)}} \mathcal{G}(\overline{\{\alpha\}}).$$

2) Si $X \in \text{Sm}_k$, $U \hookrightarrow X$ partout dense,

$G_f(X) \longrightarrow G_f(U)$ est injectif
 $G_f(X) \hookrightarrow G_f(F)$

(3) Si $X \in \text{Sm}_k$, $U \hookrightarrow X$, $\text{codim}(X \setminus U) \geq 2$,
 alors $G_f(X) \longrightarrow G_f(U)$ est bijectif.

Notation: G : faisceau en groupes, non ramifié.

Définition: X local ess. lisse. Soit $z \in X^{(2)}$,

$$H_z^2(X, G) := \underbrace{\text{orbite sous } G(F)}_{\left(\text{dans } \prod_{y \in X^{(1)}} H_y^1(G) \right)} \text{ de } \left[\prod_{y \in X_z^{(1)}} H_y^1(G) \right]_{\text{II}}$$

$(G(F)/G(x_y))$

On a un morphisme de "bord"

$$\delta: \prod_{y \in X^{(1)}} H_y^1(G) \longrightarrow \prod_{z \in X^{(2)}} H_z^2(X, G).$$

induit par les

$$\prod_{y \in X^{(1)}} H^1_y(G_y) \rightarrow \prod_{y \in X^{(1)}_Z} H^1_y \rightarrow H^2_Z.$$

Hyp. A2' : $\text{Im}(\delta) \subseteq \prod_{z \in X^{(2)}} H^2_z(X, \mathcal{G})$

Hyp. A5 i) $\forall E \subset F$ est de corps dans $\mathbb{F}_h$,
 v val. discr. sur F , qui se restreint en une val.
 discr. sur E , d'indice de ramification 1
 et induisant un iso sur les corps résiduels,
 on a $H^1_v(G_y) \simeq H^1_w(G)$.

ii) $\forall \phi: X' \rightarrow X$ étale ^{local} entre schéma locale
 de dim 2, induisant un iso entre les corps résiduels, ^{ds pt fermés}
 $\ast \rightarrow H^2_Z(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^2_{Z'}(X', \mathcal{G})$ est
^{pt fermé de X} ^{pt fermé de X'}

Hyp A6 : Si U est une loc. d'un
 schéma lisse X en $U \in X^{(1)}$, alors

$1 \rightarrow \mathcal{G}(A^1_U) \rightarrow \mathcal{G}(k(v)(H)) \Rightarrow \prod_{y \in A^{(1)}_U} H^1_y(A^1_U, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta} \prod_{z \in A^{(2)}_U} H^2_z(A^1_U, \mathcal{G})$
 est "exact", i.e ce qu'on a déjà vu +
 $\text{Ker}(\xrightarrow{\delta}) = \text{orbite du pt base sous l'action}$

de $\mathcal{G}(h(u)(t))$. ET $\mathcal{G}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(A^1 U)$

Thm : $(A2') + (A5) + (A6) \Rightarrow \mathcal{G}$ est fortement A^1 -inv.

(C) Théorème principal.

Thm ① $a_{Z_{\text{an}}} \Pi_1 = \Pi_1^{A^1}(B)$, et est non ramifié.
 ② $\Pi_1^{A^1}(B)$ vérifie $A2'$, $A5$ et $A6$.

Preuve :

①: $\mathcal{G} := a_{Z_{\text{an}}} \Pi_1$. Rq: X local $\left(\underbrace{\mathcal{G}(x)} = \underbrace{\Pi_1(x)} \right)$

$\forall X \text{ irred} \in \text{Sm}_k,$

$\left(1 \rightarrow \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathcal{G}(F) \Rightarrow \underbrace{\prod_{y \in X^{(1)}} H_y^1(x, \mathcal{G})} \right)$ est exact

(car c'est vrai sur les schémas locaux.)

On a $H_y^1(X, \Pi_1) \simeq H_y^1(x, \mathcal{G}) = \frac{\mathcal{G}(F)}{\mathcal{G}(x_y)}$

Soit $\phi: V \rightarrow X$, étale entre sch. locaux de dim 1, induisant un iso entre les corps résiduels des pt fermés

$$\begin{array}{ccc}
 V \setminus \{y\} & \longrightarrow & V \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \phi \\
 X \setminus \{y\} & \longrightarrow & X
 \end{array}
 \rightsquigarrow H_y^1(X, \mathcal{G}) \simeq H_y^1(X, \mathcal{G}) \xRightarrow{A5 i)}$$

$$\pi_0^{15}(X, X \setminus \{y\}) \simeq \pi_0^{15}(V, V \setminus \{y\})$$

$$\prod_{y \in (-)^{(1)}} H_y^1(-, \pi_1) = \prod_{y \in (-)^{(1)}} H_y^1(-, \mathcal{G}) \text{ est }$$

un *foncteur Nisnevich*

$\Rightarrow \mathcal{G}$ est un *foncteur Nis.*, via

$$* \rightarrow \mathcal{G}(\overline{*}) \rightarrow \mathcal{G}(\overline{F}) \Rightarrow \prod_{y \in \overline{*}^{(1)}} H_y^1(-, \mathcal{G})$$

$$\Rightarrow \mathcal{G} \simeq \pi_1^{A^1}(B), \text{ et } \mathcal{G} \text{ non ramifié.}$$

④ A5 i): $\checkmark$

A5 ii): Soit V *lisse* de $\dim \leq 1$,

$$\text{on a } H_{\text{Zar}}^1(V, \mathcal{G}) \simeq H_{\text{Nis}}^1(V, \mathcal{G})$$

$$\simeq \mathcal{G}(F) \setminus \prod_{y \in V^{(1)}} H_y^1(V; \mathcal{G}).$$

et si X est local, de $\dim 2$ et de pt fermé $\mathcal{Z}$,

$$H^2_Z(X, G) = H^1_{\text{Nis}}(X - \{z\}, G)$$

$$\text{chap 2.} \parallel H^1_{Z^{\text{or}}}(X - \{z\}, G).$$

$$\text{On a } * \rightarrow H^2_Z(X, G) \rightarrow H^2_{Z'}(X', G)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$H^1_{\text{Nis}}(V, G) \rightarrow H^1_{\text{Nis}}(V', G)$$

$x''=z$ $x'=z'$

et la flèche du bas est exacte dans ces conditions (Voir notes de Raphaël de l'an dernier).

$\leadsto$ A5 ii): ✓

Lemme: • Si $X \in \text{Sm}^1_k$, $\dim(X) \leq 2$, alors

$\xrightarrow{\text{delooping}} p^{(1)}_{\mathcal{B}}$

$$\Pi_0(X) = [X_+, \mathcal{B}] \rightarrow [X_+, BG].$$

est *surj*, elle est de plus *injective* si $\dim(X) \leq 1$.

• si $\dim(X) \leq 1$,

$$[\Sigma X_+, \mathcal{B}] \rightarrow [\Sigma X_+, BG].$$

est *surjective*.

Idée : Tour de Postnikov de B :

$$\begin{array}{ccc}
 & & B \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 & & \vdots \\
 X_+ & \longrightarrow & B\mathcal{G} = P^{(1)} B \\
 & & \downarrow \\
 & & * = P^{(0)} B
 \end{array}$$

et l'obstruction au relèvement est contrôlée par des classes de cohomologie de X à val dans des $K(\pi_n, n)$.

[MV, 2.1.34 - 2.1.36]

[Lemme : $\bullet [X_+, B\mathcal{G}]_\bullet = H_{\text{Nis}}^1(X, \mathcal{G})$.
 $\bullet [\Sigma X_+, B\mathcal{G}]_\bullet = \mathcal{G}(X)$.

[MV, 4.1.16] .

(NB : classique dans le cas topologique !)

(A.2)' : On veut décrire l'image de

$$S: \prod_{y \in X^{(1)}} H_y^1(x, g) \xrightarrow{\text{colim}_g \prod_0(u_2, u_1)} \prod_{z \in X^{(2)}} H_z^2(x; g)$$

$\xrightarrow{\text{colim}_g \prod_0(u_2, u_1)} \prod_0(x_z - \{z\}) \xrightarrow{\text{colim}_g} H_{\text{Min}}^1(x_z - \{z\}, g) \xrightarrow{\text{colim}_g} [\text{colim}_g (x_z - \{z\}), Bg] \xrightarrow{\text{colim}_g} [\text{colim}_g (x_z - \{z\}), g]$

on déroute les def et on identifie

$\leadsto A2', \checkmark$

A6 : ①: A^1 -invariance de g :

Si $F \in \tilde{\mathcal{F}}_h$, on a :

$$[\Sigma(A_F^1)_+, B] \xrightarrow{\text{colim}_g} [\Sigma(A_F^1)_+, Bg] = G(A_F^1)$$

$\parallel$
 $[\Sigma F_+, B] \xrightarrow{\text{colim}_g} G(F)$
 $\parallel$
 $\Pi_1(F) = G(F)$

$$\leadsto G(F) \xrightarrow{\sim} G(A_F^1)$$

$\leadsto G A^1$ -in, car non ramifié (chap 1).

②

On a déjà vu que la suite

$$1 \rightarrow G(x) \rightarrow G(F) \Rightarrow \prod_{y \in X^{(1)}} H_y^1(x, g)$$

est exacte si $X \in \text{Sm}_k$.

$\leadsto$ Pour vérifier l'exactitude de

$$\left[1 \rightarrow G(A'_v) \rightarrow G(k(v)(t)) \Rightarrow \prod_{y \in A'_v(1)} H^1_y(A'_v, G) \right] \xrightarrow{\textcircled{S}} \prod_{z \in A'_v(2)} H^2_z(A'_v, G)$$

($U = X_v$, $v \in X^{(1)}$), il suffit de vérifier que le
 $\ll H^1 \gg$ de ce "complexe".

Chap 2 : ce H^1 est $H^1_{\text{Zar}}(A'_v; G)$.

$$[(A'_v)_+, \mathcal{B}] \xrightarrow{\quad} [(A'_v)_+, \mathcal{B}G].$$

$\dim \leq 2 \parallel A^1\text{-inv}$

$$[U_+, \mathcal{B}]$$

$$\parallel \Pi_0(U) = *$$

$$\rightarrow H^1_{\text{Nis}}(A'_v; G)$$

$\parallel$ découle de A5

$$H^1_{\text{Zar}}(A'_v; G)$$

(2.24)

$$* \parallel$$

