THÉORÈME DE HUREWICZ

$\mathcal{X}$ espace

$$H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) := H_n\left(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}\left(C_*\left(\widetilde{\mathbb{Z}(\mathcal{X})}\right)\right)\right).$$

Si $\mathcal{X}$ est pointé,

$$\widetilde{H}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) := \operatorname{Ker}\left(H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow H_n^{\mathbb{A}^1}(\operatorname{Spec}(k))\right)$$

$$H_n^{\mathbb{A}^1}(\operatorname{Spec}(k)) = H_n\left(L_{\mathbb{A}^1}\left(\underbrace{C_*(\operatorname{Spec}(k))}_{(0 \to 0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to 0 \to \dots)}\right)\right)$$

$\mathbb{A}^1$-local

$$H^i_{Nis}(X, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}.$$

$$= \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

X géométriquement unibranche (?)

$$H_*^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \widetilde{H}_*^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}).$$

* $L^{ab}_{\mathbb{A}^1}$ commute au shift dans $D(Sh_{Nis}(Sm/k, \mathbb{Z}))$

$$C_* \circ \Sigma = C_*[1].$$

$$\tilde{H}^{\mathbb{A}^1}_{n+1}(\Sigma(\mathcal{X})) = \tilde{H}^{\mathbb{A}^1}_{n}(\mathcal{X}).$$

th. de Morel (C (-1) connexe $\Rightarrow L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C)$ est (-1)-connexe)

$\Rightarrow \begin{cases} H^{\mathbb{A}^1}_n(\mathcal{X}) = 0 & \text{si } n<0. \\ H^{\mathbb{A}^1}_n(\mathcal{X}) \text{ est str. } \mathbb{A}^1\text{-inv} & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$

Rq: Ce n'est plus vrai sur une base quelconque (contre-ex. d'Ayoub avec une base de dim°2).

dim 1 ??

* En topo alg, c'est facile de calculer $H_i(S^n)$.

et $H_i(S^n) = 0$ si $i > n$

En $\mathbb{A}^1$-htp c'est hautement non-trivial.

Conjecture (Morel) X k-schéma (quasi-projectif) lisse de dimension d.

- $H^{\mathbb{A}^1}_n(X) = 0$ si $n > 2d$
- $H^{\mathbb{A}^1}_n(X) = 0$ si X affine $n > d$. («Lefschetz affine»)

conjecture $\Rightarrow H^{\mathbb{A}^1}_n(\mathbb{G}_m^{i}) = 0$ si $n > i$

$\Rightarrow$ Beilinson-Soulé

$$H^{n,i}_M(k) = \mathrm{Hom}_{DM^{eff}_{Nis}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[n](i))$$

$= 0$ si $n < 0$ (Beilinson-Soulé)

$$\mathrm{Hom}_{DM^{eff}}(\mathbb{Z}^{tr}[n], \mathbb{Z}^{tr}[i](i)) = 0 \quad \text{si } n>i$$

$$M(\mathbb{G}_m^i) = \underline{C}_*^{Sus}(\mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{G}_m^i)) = L_{\mathbb{A}^1}^{ab,tr}(\mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{G}_m^i)).$$

$$\| \\ \bigoplus_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \mathbb{Z}^{tr}(k)[k]$$

$$BS \iff \mathrm{Hom}_{DM^{eff}}(\mathbb{Z}^{tr}[n], M(\mathbb{G}_m^i)) = 0 \quad \text{si } n>i$$

$$\| \\ H_n^{Sus}(\mathbb{G}_m^i)$$

$$D_{\mathbb{A}^1}^{eff}(k) \underset{\gamma_*}{\overset{\gamma^*}{\rightleftarrows}} DM_{Nis}^{eff}(k) \xrightarrow{\Sigma^\infty} DM_{Nis}(k) \qquad \Sigma^\infty \text{ plein}^{\pm} \text{ fidèle}$$

γ^* est t-exact à droite pour la t-structure htpique.

* En g^{al} ça a l'air difficile de calculer

$$\pi_i^{\mathbb{A}^1} \not\simeq H_i^{\mathbb{A}^1} \quad i \geq 1.$$

$\mathcal{X}$ espace, on « comprend » son premier $\pi_i^{\mathbb{A}^1}$ non-trivial.

- On ne connait pas d'exemple non-trivial sur lequel on peut calculer $\pi_{i+1}^{\mathbb{A}^1}$ sans Bloch-Kato ou Milnor.

Morphisme de Hurewicz : $\mathcal{X} \xrightarrow{(*)} K(C_*(\mathcal{X}))$

$\pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) := \pi_n^{simp}(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}))$

$\pi_n^{simp}(K(C_*(\mathcal{X}))) \underset{\overset{\uparrow}{D.K.}}{=} H_n(C_*(\mathcal{X}))$

$\pi_n^{simp}(L_{\mathbb{A}^1}(KC(\mathcal{X}))) \to \pi_n^{sim}(KL_{\mathbb{A}^1}C(\mathcal{X}))$

iso si $C_*(\mathcal{X})$ est 0-connexe.

(*) induit $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{h} H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$

Déf : $\mathcal{X}$ est n-connexe si $\pi_i^{simp}(\mathcal{X}) = *$ $\quad i \leq n$.

n-$\mathbb{A}^1$-________ $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = *$ $\quad i \leq n$.

Théorème (Hurewicz faible) :

① $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$ $\mathbb{A}^1$-connexe. Alors

$$h : \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow H_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$$

est le morphisme initial du faisceau en groupes $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$

vers un faisceau en gpes abéliens str. $\mathbb{A}^1$-inv.

i.e. tout

$$\begin{tikzcd} \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & M \\ H_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \arrow[ur, dotted, "\exists !"'] & \end{tikzcd}$$

M str $\mathbb{A}^1$-inv de gpes abéliens

② $n \geq 2$ $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$ $(n-1)$-$\mathbb{A}^1$-connexe, alors

$\forall i \leq n-1$, $\tilde{H}_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = 0$

$\pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ est un isomorphisme de fx str. $\mathbb{A}^1$-inv.

dém : ① M fsth. $\mathbb{A}^1$-inv de gpes abéliens.

$$\mathrm{Hom}_{Grp}(\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}), M) \underset{\uparrow}{\simeq} [L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}), BM]_{\mathcal{H}(k)}$$

théorie de l'obstruction

$$\underset{D.K.}{\simeq} [L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}), K(M[1])]_{\mathcal{H}(k)}$$

$$\simeq [\mathcal{X}, K(M[1])]_{\mathcal{H}\mathbb{A}^1(k)}.$$

$K(M[1])$ est $\mathbb{A}^1$-local car $M[1]$ est $\mathbb{A}^1$ local

0-connexe.

$$\simeq \mathrm{Hom}_{D^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{A}^1}(k)}\big(C_*(\mathcal{X}), M[1]\big)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{D(\underbrace{Sh_{Nis}(Sm/k,\mathbb{Z})}_{Ab(k)})}\big(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*(\mathcal{X})), M[1]\big)$$

$$\left[\ \mathcal{X}\ \text{0-connexe} \Rightarrow C_*(\mathcal{X})\ \text{0-connexe} \underset{\text{Morel}}{\Rightarrow} L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*(\mathcal{X}))\ \text{est 0-connexe}\ \right]$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{Ab(k)}\big(H_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}), M\big).$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 & \cdots \\
 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

□

② $n>1$ Même preuve $1 \leftarrow n$.

$\pi_n^{\mathbb{A}^1}$ est fort. $\mathbb{A}^1$-inv $\rightsquigarrow$ h est un iso. □

Rq : On ne sait pas en g$^{\underline{al}}$ si $H_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})^{ab}$.

i.e. h est un épi.

Thm : ($\mathbb{A}^1$-connexité instable)

$n>0$ $\mathcal{X}$ un espace pointé $(n-1)$-connexe

alors $\mathcal{X}$ est $(n-1)$-$\mathbb{A}^1$-connexe.

dém : $n=1$: Morel-Voevodsky.

$\mathcal{X}$ n-connexe $\Rightarrow$ $\mathcal{X}$ $(n-1)$-$\mathbb{A}^1$-connexe

$$\Rightarrow \pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$$

$$\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$$H_n\Big(\underbrace{L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(\underbrace{C_*(\mathcal{X})}_{n\text{-connexe}})}_{n\text{-connexe}}\Big) \quad \square$$

$F \in Sh_{Nis}(Sm/k, Sets)$

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1}(F) := H_0^{\mathbb{A}^1}(F) = \left(H_0\left(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*(\mathbb{Z}[F]))\right)\right).$$

$M \in HI(k)$

$$\mathrm{Hom}_{HI(k)}(\mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1}(F), M) = \mathrm{Hom}_{D^{ab}_{\mathbb{A}^1}}\left(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*(\mathbb{Z}(F))), M\right)$$

$$= \mathrm{Hom}_{D(Sh_{Nis}(Sm/k, \mathbb{Z}))}\left(C_*(\mathbb{Z}[F]), M\right)$$

$$= \mathrm{Hom}_{Sh}(F, M).$$

Si F pointé, $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1,\bullet}(F) = \tilde{H}_0^{\mathbb{A}^1}(F)$

cor: $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(\Sigma^n F) \xrightarrow{\sim} \overset{(\sim)}{H}{}_n^{\mathbb{A}^1}(\Sigma^n F) \cong \mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1,\bullet}(F)$

$n \geq 2$

dém: $\Sigma^n F$ est $(n-1)$-connexe

$$\pi_i(\Sigma^n F) = \pi_0(\Sigma^{n-i}(F)) = *.$$

les exposés précédents (Niels + un vieil exposé R).

$$\underbrace{\mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1,\bullet}}(\mathbb{G}_m^{\wedge n}) = \underline{K}_n^{MW}$$

« le faisceau libre fortt. $\mathbb{A}^1$-inv. engendré par $\mathbb{G}_m^{\wedge n}$.

$n \geq 1$.

Thm : $(n \geq 2)$

$$\pi_{n-1}^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_n^{\mathbb{A}^1}((\mathbb{P}^1)^{\wedge n}) \cong \mathbb{Z}_{\mathbb{A}^1,\bullet}(\mathbb{G}_m^{\wedge n}) = \underline{K}_n^{MW}.$$

dém : $\left[\begin{array}{l} \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n} \\ S^1 \wedge \mathbb{G}_m \simeq \mathbb{P}^1 \end{array}\right.$

$n > 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

n = 2 : $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})$

$$\underbrace{SL_2} \xrightarrow[\mathbb{A}^1\text{-éq. faible.}]{} \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})$ fortt. $\mathbb{A}^1$-inv de gpes abéliens + Hurewicz

+ le faisceau libre engendré par $\mathbb{G}_m^{\wedge 2}$ est $\underline{K}_2^{MW}$. □

Rq : $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n} \\ (\mathbb{P}^1)^{\wedge n} \simeq S^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n} \end{array}\right.$ $\rightsquigarrow \underbrace{S^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge i}}$?

Hurewicz $\Rightarrow$ Il est $(n-1)$-connexe si $n \geq 2$, $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(S^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge i}) \simeq \underline{K}_i^{MW}$.

n=0 : $\mathbb{G}_m^{\wedge n}$ est $\mathbb{A}^1$-invariant.

si $\mathcal{X}$ est $\mathbb{A}^1$-inv (Morel-Azog) $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \simeq \mathcal{X}$.

$$\pi_0(\mathbb{G}_m^{\wedge n}) \simeq \mathbb{G}_m^{\wedge n}.$$

n=1 : Hurewicz donne un épi.

$$\pi_1^{\mathbb{A}^1}(S^1 \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge i}) \twoheadrightarrow \underline{K}_i^{MW}.$$

Il a un noyau non trivial si $i=1$ (cf. Mor 7.3 $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{P}^1)$).

i=2 : c'est un iso. $S^1 \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 2} \simeq \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ $(\simeq SL_2)$.

i>2 : Inconnu.

Cor : $(n,i) \in \mathbb{N}^2$ $(m,j) \in \mathbb{N}^2$

$$[S^m \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge j}, S^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge i}]_{\mathcal{H}^{\mathbb{A}^1}_\bullet(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } m<n \text{ ↯} \\ K_{i-j}^{MW}(k) & m=n,\ i>0 \\ 0 & m=n,\ j>0,\ i=0 \\ \mathbb{Z} & m=n,\ i=j=0 \ \checkmark \end{cases}$$

dém : $\mathbb{G}_m$-loop-spaces $(\underline{K}_n^{MW})_{-1} \simeq \underline{K}_{n-1}^{MW}$. □

Suites $\mathbb{A}^1$-fibres & applications :

Suite $\mathbb{A}^1$-fibre = suite $\Gamma \xrightarrow{i} \mathcal{X} \xrightarrow{p} \mathcal{Y}$ avec $p \circ i = *$

$\boxed{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \Gamma \in \mathcal{H}_\bullet(k)}$

telle que $L_{\mathbb{A}^1}(\Gamma) \to L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \to L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$ est une suite fibre simpliciale.

(PB) Une suite fibre simpliciale n'est pas nécessair^t une suite $\mathbb{A}^1$-fibre.

«Exemple». $\mathcal{X}$ pointé fibrant $P(\mathcal{X}) = \underline{\mathrm{Hom}}_\bullet(\Delta^1, \mathcal{X})$

$$\Omega^1(\mathcal{X}) = \underline{\mathrm{Hom}}_\bullet(S^1, \mathcal{X}).$$

On a une suite fibre

$$(\Omega^1(\mathcal{X}) \to P(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}). \ [*]$$

Prop : $\mathcal{X}$ simp. fibrant $\in \mathcal{H}_\bullet(k)$.

[*] est $\mathbb{A}^1$-fibre $\Leftrightarrow$ le morph. can $L_{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})) \to \Omega^1(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}))$ est une équivalence simpliciale.

dém : • $P(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{X}$ est une éq. simpliciale (fibre par fibre ...)

$\Rightarrow L_{\mathbb{A}^1}(P(\mathcal{X})) \longrightarrow P(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}))$ naturel est une éq. simpliciale.

$$\begin{tikzcd}
L_{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})) \arrow[r] \arrow[d] & L_{\mathbb{A}^1}(P(\mathcal{X})) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \arrow[d, equal] \\
\text{fibre } \big[\Omega^1(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})) \arrow[r] & P(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})) \arrow[r] & L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})\big]
\end{tikzcd}$$

□

Thm : $\mathcal{X}$ simp. fibrant

$L_{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})) \longrightarrow \Omega^1(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}))$ est une éq. simpliciale

$\Leftrightarrow \pi_0^{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})) = \pi_0(L_{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})))$ est fort. $\mathbb{A}^1$-inv.

dém : $\boxed{\Rightarrow}$

$$\left.\begin{aligned}
\pi_0^{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})) &= \pi_0(L_{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X}))) \\
&= \pi_0(\Omega^1(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}))) \\
&= a_{Nis}\Big(U \longmapsto \underbrace{[U_+, \Omega^1(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}))]_{\mathcal{H}(k)}}_{=[S^1 \wedge U_+, L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})]}\Big)
\end{aligned}\right\}$$

$$= \quad \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$$

fortt. $\mathbb{A}^1$-inv !
(exposé Robin)

$\boxed{\Leftarrow}$ OPS $\mathcal{X}$ 0-connexe et fibrant.

$\mathcal{X}^{(0)}$:= « sous-espace de $\mathcal{X}$ des simplexes dont toutes les arêtes sont le pt base »

$\mathcal{X}^{(0)} \hookrightarrow \mathcal{X}$ éq. faible car $\mathcal{X}$ fibrant (cplexe de Kan i.e. ∞-gpd)

« $\mathcal{X}^{(0)}$ est un gpe simplicial fibre par fibre ».

On a une adjonction

$$\begin{tikzcd} \text{cpxes de Kan 0-réduits} \arrow[r, shift left, "G"] & s\mathrm{Grp} \arrow[l, shift left, "B"] \end{tikzcd}$$

On « faisceautise »

$$\mathcal{X}^{(0)} \longrightarrow B(G(\mathcal{X}^{(0)}))$$ canonique + éq. simpliciale.

$\rightsquigarrow$ $\Omega^1(\mathcal{X}^{(0)}) \longrightarrow G(\mathcal{X}^{(0)})$ can. iso pointé dans $\mathcal{H}_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)$.

Lemme 1 : Il existe un foncteur d'$\mathbb{A}^1$-résolution (Ex, θ)

i.e. $Ex : sSh_{Nis}(Sm/k) \longrightarrow sSh_{Nis}(Sm/k)$

$\theta : Id \Rightarrow Ex$

$\forall \mathcal{X}$, $Ex(\mathcal{X})$ fibrant $\mathbb{A}^1$-local.

$+\, \theta(\mathcal{X}) : \mathcal{X} \longrightarrow Ex(\mathcal{X})$ est une $\mathbb{A}^1$-éq faible

qui commute aux ~~limites~~ produits finies.

Alors $G(\mathcal{X}^{(0)}) \longrightarrow L_{\mathbb{A}^1}(G(\mathcal{X}^{(0)}))$ $\mathbb{A}^1$-éq faible de fx en gpes simpliciaux.

Lemme 2 :

Notation

Rappel : $G - \mathcal{X} \xrightarrow{p} \mathcal{Y}$ désigne une fibration principale

G faisceau en gpes simpliciaux * $\mathcal{X}$ est un G espace

$\updownarrow$

G-torseur sur $\mathcal{Y}$

* $\mathcal{X} \xrightarrow{p} \mathcal{Y}$ G-équivariant, avec l'act° triviale $/\mathcal{Y}$

* $\exists (U_i) \to \mathcal{Y}$ recouvrement 'Nis'

tq

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "p"'] & U_i \times G \arrow[d, "pr_1"] \\ & U_i \end{tikzcd}$$

G-équivo

Prop : * L'action de G sur $\mathcal{X}$ est transitive et libre.

* $G\backslash \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}$. [fibre à fibre].

$$\ast \quad \left\{ G\text{-torseurs } \mathrm{Nis}/\mathcal{Y} \right\} / \underset{\text{iso}}{\simeq} \;\simeq\; \check{H}^1_{Nis}(\mathcal{Y}, G) \simeq H^1_{Nis}(\mathcal{Y}, G)$$

$\square$

Lemme 2 :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, dash] \arrow[d, "\mathbb{A}^1\text{-éq f.}"'] & \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{A}^1\text{-éq f.}"'] & \mathcal{Y} \arrow[d] & G\text{-pcp.} \\
G' \arrow[r, dash] & \mathcal{X}' \arrow[r] & \mathcal{Y}' & G' \text{ pcp.}
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}'$ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible

On l'applique à

$$\begin{tikzcd}
G(\mathcal{X}^{(0)}) \arrow[r, dash] \arrow[d, "\mathbb{A}^1\text{-éq.f.}"'] & \underbrace{EG(\mathcal{X}^{(0)})} \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{A}^1\text{-éq. faible}"'] & BG(\mathcal{X}^{(0)}) \arrow[d] \\
L_{\mathbb{A}^1}(G(\mathcal{X}^{(0)})) \arrow[r, dash] & \underbrace{EL_{\mathbb{A}^1}(G(\mathcal{X}^{(0)}))} \arrow[r] & BL_{\mathbb{A}^1}G(\mathcal{X}^{(0)})
\end{tikzcd}$$

simplicialement contractile

$$\mathcal{X} \simeq BG(\mathcal{X}^{(0)}) \xrightarrow[\text{faible}]{\mathbb{A}^1\text{-éq}} B(L_{\mathbb{A}^1}(G(\mathcal{X}^{(0)})))$$

(M1)
$$\pi_n(B\mathcal{G}) = \begin{cases} \ast & n=0 \\ \mathcal{G} & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}$$

fort $\mathbb{A}^1$. ~~$\mathbb{A}^1$~~-inv.

$$\pi_n(BL_{\mathbb{A}^1}G(\mathcal{X}^{(0)})) = \begin{cases} 0 & n>1 \\ \ast & n=0 \\ \pi_0(L_{\mathbb{A}^1}(G(\mathcal{X}^{(0)}))) \simeq \widehat{L_{\mathbb{A}^1}G(\mathcal{X}^{(0)})} & n=1 \end{cases}$$

Morel-Azok

$\Longrightarrow$ $BL_{\mathbb{A}^1}G(\mathcal{X}^{(0)})$ est $\mathbb{A}^1$-local

$\rightsquigarrow$ c'est l' "$\mathbb{A}^1$-local" de $\mathcal{X}$.

$$\begin{tikzcd}
L_{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{X})) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \Omega^1(L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
L_{\mathbb{A}^1}(G(\mathcal{X}^{(0)})) \arrow[r, "\sim"] & \Omega^1(B(L_{\mathbb{A}^1}(G(\mathcal{X}^{(0)}))))
\end{tikzcd}$$

□

dém du lemme 1 : MV 1.66

* $\exists\, Ex^1 : sSh_{Nis}(Sm/k) \longrightarrow sSh_{Nis}(Sm/k)$

+ $\theta : Id \to Ex^1$ tq $\forall \mathcal{X}$, $Ex^1(\mathcal{X})$ fibrant

+ $\mathcal{X} \to Ex^1(\mathcal{X})$ éq. simp.

+ commute aux limites finies.

* MV 3 $Sing_* : sSh_{Nis}(Sm/k) \longrightarrow sSh_{Nis}(Sm/k)$

+ $\theta : Id \to Sing_*$

- $Sing_*$ commute aux limites
- $Sing_*$ envoie $ev_0 : Spec(k) \to \mathbb{A}^1_k$ vers une éq. faible
- $\forall \mathcal{X}$, $s(\mathcal{X}) : \mathcal{X} \to Sing_*(\mathcal{X})$
  - mono
  - $\mathbb{A}^1$-éq. faible
- $Sing_*$ envoie les objets $\mathbb{A}^1$-locaux fibrants vers des ______ .

MV 3.20 $\forall \omega$ ordinal assez grand

$$\mathrm{Ex}\,(\mathrm{Ex}^1 \circ \mathrm{Sing}_*)^{\omega} \circ \mathrm{Ex}^1$$ est un foncteur d'$\mathbb{A}^1$-résol°.

$$\mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{Ex}$$

□

dém lemme2 : G f. simp. en grs

$$E(G) = \mathrm{diag}\,(n \mapsto \underbrace{E(G_n)}_{\text{espace}}) \qquad G \text{ agit libr}^{t} / \underbrace{E(G)}_{\text{sp}^t \text{ contractile}}$$

$$E(G_n)_m = G_n^{m+1}$$
$$= \mathrm{diag}(m \mapsto G^{m+1}).$$

G a l'action diagonale $[G_n \circlearrowleft G_n^{m+1}]$

* $\mathcal{X}$ un G-espace + action libre

$$EG \times_G \mathcal{X} = G \backslash \overbrace{EG \times \mathcal{X}}^{\text{action diagonale}} \xrightarrow[\text{faible simpliciale}]{\text{éq.}} G \backslash \mathcal{X}$$

$$\begin{tikzcd} G \backslash \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

⇝ on peut remplacer $\mathcal{Y}$ par $EG \times_G \mathcal{X}$.

$$\mathcal{Y}' \text{ — } EG' \times_{G'} \mathcal{X}'.$$

$$EG \times_G \mathcal{X} = \mathrm{diag}(m \mapsto G^{m+1} \times_G \mathcal{X})$$
$$\simeq \mathrm{hocolim}(m \mapsto G^{m+1} \times_G \mathcal{X}).$$

«argument std de topologie»

+ MV

les $G^{m+1} \times_G \mathcal{X} \longrightarrow (G')^{m+1} \times_G \mathcal{X}'$ sont des éq. faibles

MV 2.12 $EG \times_G \mathcal{X} \longrightarrow EG' \times_{G'} \mathcal{X}'$. □

Déf : 1) Une fibration htp. G-principale

$G - \mathcal{X} \xrightarrow{p} \mathcal{Y}$

- G-espace $\mathcal{X}$
- $p : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ G-éq act° triv.

$EG \times_G \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est une éq. simpliciale.

2) ______ $\mathbb{A}^1$-htp G-principale

$G - \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ fibrat° htp G-principale

+ $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$ est une fibr° htp. principale de groupe $L_{\mathbb{A}^1}(G)$.

Thm : $G - \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ htp. G-principale telle que $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(G)$ est fortt. $\mathbb{A}^1$-inv alors elle est $\mathbb{A}^1$-htp G-principale.

dém :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, dash] & \mathcal{X} \arrow[r] & \mathcal{Y} \\
G \arrow[u, equal] \arrow[r, dash] \arrow[d, "\mathbb{A}^1\text{-éq f.}"'] & EG\times\mathcal{X} \arrow[u, "s"] \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{A}^1\text{-éq faible}"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\rightsquigarrow"] & EG\times_G\mathcal{X} \arrow[u, "s"] \arrow[d] \\
L_{\mathbb{A}^1}(G) \arrow[r, dash] & EL_{\mathbb{A}^1}(G)\times L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \arrow[r] & (EL_{\mathbb{A}^1}G)\times_{L_{\mathbb{A}^1}G} L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})
\end{tikzcd}$$

MQ: $EL_{\mathbb{A}^1}(G)\times_{L_{\mathbb{A}^1}(G)} L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$

$\mathbb{A}^1$-éq faible.

ISMQ: $EL_{\mathbb{A}^1}(G)\times_{L_{\mathbb{A}^1}(G)} L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ est $\mathbb{A}^1$-local.

« Par construction »

$$L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow \overbrace{E(L_{\mathbb{A}^1}(G))\times_{L_{\mathbb{A}^1}(G)} L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})} \longrightarrow \underbrace{BL_{\mathbb{A}^1}}(G)$$

?

$\mathcal{X} \to EG\times_G\mathcal{X} \to BG$

est une suite fibre simpliciale.

· $\mathbb{A}^1$-local

Comme $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(G)$ est fortt. $\mathbb{A}^1$-inv

Lemme: $\Gamma \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ fibration simpliciale

$\mathcal{Y}$ pointé 0-connexe.

Alors si Γ et $\mathcal{Y}$ sont $\mathbb{A}^1$-connexes, $\mathcal{X}$ aussi.

Lemme $\Rightarrow$ [illegible] $\mathbb{A}^1$-local ?

dém: $\mathcal{X}^{\mathbb{A}^1} = R\mathrm{Hom}(\mathbb{A}^1, \mathcal{X})$

$\mathcal{X}$ $\mathbb{A}^1$-connexe $\Leftrightarrow$? $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}^{\mathbb{A}^1}$ est une éq. faible simpliciale

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r] \arrow[d, "S"] & \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d, "S"] & \mathcal{Y} \arrow[d, "S"] \\
\Gamma^{\mathbb{A}^1} \arrow[r] & \mathcal{X}^{\mathbb{A}^1} \arrow[r] & \mathcal{Y}^{\mathbb{A}^1}
\end{tikzcd}$$

s. fibre ($\mathbb{A}^1$ cof) $\square$

Ex: 1) $n \geq 2$, tout SL_n-torseur satisfait la pté du thm con

$\pi_0^{\mathbb{A}^1}(SL_n) = *$

$F \in \mathcal{F}_k$, $SL_n(F) =$ produit de matrices élémentaires

$\pi_0^{\mathbb{A}^1}(SL_n)(F) = *$!

$$\begin{array}{c} \pi_0^{\mathbb{A}^1}(SL_n)(F) \\ \parallel \\ [F_+, SL_n]_{\mathcal{H}_\bullet^{\mathbb{A}^1}(k)} \end{array}$$

quotient $[F_+, SL_n]_{\mathcal{H}_\bullet(k)} / \mathbb{A}^1$-[illegible] forte

$\nearrow$ élts de $SL_n(F)$

$f, g \in SL_n(F)$

$\exists H : F \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow SL_n$

i.e. élt de $SL_n(F[T])$.

2) $1 \to SL_n \to GL_n \to \underbrace{\mathbb{G}_m}$ $\to 1$

[illegible] $\mathbb{A}^1$-inv.

$\pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{G}_m) = \mathbb{G}_m$

$\rightsquigarrow \pi_0^{\mathbb{A}^1}(GL_n) = \mathbb{G}_m$.

3) G fini ou variété abélienne $\rightsquigarrow$ c'est flasque comme faisceau Zar

$H^1_{Zar}(X, G) = 0$

G inv/htp avec transferts $\Rightarrow H^1_{Nis}(X,G) \simeq H^1_{Zar}(X,G) = 0$

$\to$ Pas de G-torseurs non triviaux

4) On ne connaît pas d'ex G/k lisse dont le $\pi_0^{\mathbb{A}^1}$ n'est pas fort. $\mathbb{A}^1$-inv.

[depuis, on sait qu'il est $\mathbb{A}^1$-inv.]

Choudhury

Thm : $\Gamma \to \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une suite fibre simpliciale

$\mathcal{Y}$ pointé 0-connexe

+ $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{Y}))$ fort. $\mathbb{A}^1$-inv.

Alors $\Gamma \to \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est une suite $\mathbb{A}^1$-fibre.

Rq : Les hyp sont satisfaites si $\mathcal{Y}$ est simpl^t 1-connexe

(*) —— 0 ——

+ $\pi_1(\mathcal{Y})$ fort $\mathbb{A}^1$-inv

Lemme : (à appliquer à $\Omega^1(\mathcal{Y})$ pour voir (*))

$\mathcal{X}$ espace $\pi_0(\mathcal{X})$ $\mathbb{A}^1$-inv

alors $\pi_0(\mathcal{X}) \to \pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ est un iso

dém : MV 3.22. [$\mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ $\mathbb{A}^1$-éq faible $\mathcal{X}'$ $\mathbb{A}^1$-loc

$\rightsquigarrow \pi_0(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow \pi_0(\mathcal{X}')$]

$$\underbrace{\pi_0(\mathcal{X})}_{\mathbb{A}^1\text{-local}} \twoheadrightarrow \pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$$

$$\mathcal{X} \to \pi_0(\mathcal{X}) \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{X} \to L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \to \pi_0(\mathcal{X})$$

$$\begin{tikzcd} \pi_0(\mathcal{X}) \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \arrow[r] & \pi_0(\mathcal{X}) \end{tikzcd}$$

□

$\mathbb{A}^1$-connexité relatif :

Déf : $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ morph. d'espaces est n-connexe si

∀ ~~stalk~~ fibre $\mathcal{X}_x \longrightarrow \mathcal{Y}_x$ est n-connexe

* Quand les espaces sont pointés + $\mathcal{Y}$ 0-connexe, c'est équivalent à ce que la fibre htp simpliciale de

$\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ soit n-connexe.

Th ($\mathbb{A}^1$-connexité relative)

$f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ $\mathcal{Y}$ pointé 0-connexe

TQ $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(\Omega^1(\mathcal{Y}))$ fortt. $\mathbb{A}^1$-inv (eg $\begin{cases} \mathcal{Y} \text{ 1-connexe} \\ \pi_1(\mathcal{Y}) \text{ fortt. } \mathbb{A}^1 \text{ inv} \end{cases}$)

$n \geq 0$ on suppose f n-connexe

alors $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$ est n-connexe.

dém : $\Gamma \longrightarrow \mathcal{X}$ la fibre htp.

On vient de voir que $L_{\mathbb{A}^1}(\Gamma) \to L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \to L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$

suite fibre simpliciale.

Par hyp. $\pi_i(\Gamma) = 0$ $0 \leq i \leq n$

$\to L_{\mathbb{A}^1}(\Gamma)$ est aussi n-connexe.

i.e. $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \to L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$ est n-connexe. □

Théorème de Hurewicz fort :

Thm (Hurewicz fort) $\underline{n \geq 2}$ $\mathcal{X}$ pointé $(n-1)$-$\mathbb{A}^1$-connexe

alors $H_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = 0 \quad 0 \leq i \leq n-1$

- $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} H_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ est un iso.
- $\pi_{n+1}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow H_{n+1}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$

dém : OPS $\mathcal{X}$ fibrant $\mathbb{A}^1$-local.

$$\underbrace{\Gamma}_{\text{fibre htp.}} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow K(C_*(\mathcal{X}))$$

Hurewicz classique ⇒ Γ est simplicial^t n-connexe

$$\Rightarrow \quad \mathcal{X} = L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow L_{\mathbb{A}^1}(K(C_*(\mathcal{X}))) \text{ est simplicial}^t\ n\text{-connexe}$$

Thm d'$\mathbb{A}^1$-connexité relatif

$$\begin{tikzcd} L_{\mathbb{A}^1}(K(C_*(\mathcal{X}))) \\ K(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*(\mathcal{X}))) \arrow[u, "\text{éq f. simp.}"] \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \mathcal{X} \longrightarrow K(L^{ab}_{\mathbb{A}^1}(C_*(\mathcal{X}))) \text{ est } n\text{-connexe} \qquad □$$

Rq : Si $n = 1$ $\pi_{\mathbb{A}}$ et $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ abélien le thm reste vrai.