K^{MW}, modules homotopiques et localisation

Clémentine Lemarié–Rieusset

8 avril 2022

Table des matières

Table des matières

- Théorie classique de l'homotopie : étude de $\pi_i(S^j) = [S^i, S^j]$, $i, j \in \mathbb{N}$

- Théorie classique de l'homotopie : étude de $\pi_i(S^j) = [S^i, S^j]$, $i, j \in \mathbb{N}$
- Théorie classique stable de l'homotopie : étude de $\pi_i^s(S^0) = [S^{i+d}, S^d]$ qui pour d assez grand ne dépend que de $i \in \mathbb{Z}$

- Théorie classique de l'homotopie : étude de $\pi_i(S^j) = [S^i, S^j]$, $i, j \in \mathbb{N}$
- Théorie classique stable de l'homotopie : étude de $\pi_i^s(S^0) = [S^{i+d}, S^d]$ qui pour d assez grand ne dépend que de $i \in \mathbb{Z}$
- $\pi_i^s(S^0) = 0$ si $i < 0$, $\pi_0^s(S^0) = \mathbb{Z}$, $\pi_i^s(S^0)$ connu pour $i \leq 64$

- Théorie classique de l'homotopie : étude de $\pi_i(S^j) = [S^i, S^j]$, $i, j \in \mathbb{N}$
- Théorie classique stable de l'homotopie : étude de $\pi_i^s(S^0) = [S^{i+d}, S^d]$ qui pour d assez grand ne dépend que de $i \in \mathbb{Z}$
- $\pi_i^s(S^0) = 0$ si $i < 0$, $\pi_0^s(S^0) = \mathbb{Z}$, $\pi_i^s(S^0)$ connu pour $i \leq 64$

Théorie motivique stable de l'homotopie : on veut étudier les groupes $[S^i \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge j}, S^k \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge l}]_{\mathrm{SH}(F)}$ ou de manière équivalente $[S^m, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]_{\mathrm{SH}(F)}$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ (où F est un corps).

Théorème de Morel (Cor. 1.25 (et Rmq 1.26) du Thm 1.23 qui est le Thm 6.40 dans le livre de Morel (2012))

$$[S^m, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]_{\mathrm{SH}(F)} = 0 \text{ si } m < 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

$$[S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]_{\mathrm{SH}(F)} \simeq K_n^{\mathrm{MW}}(F) \text{ si } n \in \mathbb{Z}$$

Théorème de Morel (Cor. 1.25 (et Rmq 1.26) du Thm 1.23 qui est le Thm 6.40 dans le livre de Morel (2012))

$$[S^m, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]_{\mathrm{SH}(F)} = 0 \text{ si } m < 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

$$[S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]_{\mathrm{SH}(F)} \simeq K_n^{\mathrm{MW}}(F) \text{ si } n \in \mathbb{Z}$$

- Pour tout $n < 0$, $K_n^{\mathrm{MW}}(F) \simeq \mathrm{W}(F)$ le groupe de Witt du corps F

Théorème de Morel (Cor. 1.25 (et Rmq 1.26) du Thm 1.23 qui est le Thm 6.40 dans le livre de Morel (2012))

$$[S^m, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]_{\mathrm{SH}(F)} = 0 \text{ si } m < 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

$$[S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]_{\mathrm{SH}(F)} \simeq K_n^{\mathrm{MW}}(F) \text{ si } n \in \mathbb{Z}$$

- Pour tout $n < 0$, $K_n^{\mathrm{MW}}(F) \simeq \mathrm{W}(F)$ le groupe de Witt du corps F
- Le groupe $K_0^{\mathrm{MW}}(F) \simeq \mathrm{GW}(F)$ le groupe de Grothendieck-Witt du corps F

Théorème de Morel (Cor. 1.25 (et Rmq 1.26) du Thm 1.23 qui est le Thm 6.40 dans le livre de Morel (2012))

$$[S^m, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]_{\mathrm{SH}(F)} = 0 \text{ si } m < 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

$$[S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]_{\mathrm{SH}(F)} \simeq K_n^{\mathrm{MW}}(F) \text{ si } n \in \mathbb{Z}$$

- Pour tout $n < 0$, $K_n^{\mathrm{MW}}(F) \simeq \mathrm{W}(F)$ le groupe de Witt du corps F
- Le groupe $K_0^{\mathrm{MW}}(F) \simeq \mathrm{GW}(F)$ le groupe de Grothendieck-Witt du corps F
- $\mathrm{W}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathrm{GW}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$, $\mathrm{W}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$, $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

La structure d'anneau gradué

Le groupe abélien $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}[S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]$ est un anneau avec le smash-produit $\wedge : [S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}] \times [S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge m}] \to [S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n+m}]$.

La structure d'anneau gradué

Le groupe abélien $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}[S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]$ est un anneau avec le smash-produit $\wedge : [S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}] \times [S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge m}] \to [S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n+m}]$.

Definition

On note $\epsilon \in [S^0, S^0] \simeq [\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m]$ la classe du morphisme pointé induit par le morphisme $F[t, t^{-1}] \to F[t, t^{-1}]$ qui envoie t sur t^{-1}.

La structure d'anneau gradué

Le groupe abélien $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}[S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]$ est un anneau avec le smash-produit $\wedge : [S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}] \times [S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge m}] \to [S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n+m}]$.

Definition

On note $\epsilon \in [S^0, S^0] \simeq [\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m]$ la classe du morphisme pointé induit par le morphisme $F[t, t^{-1}] \to F[t, t^{-1}]$ qui envoie t sur t^{-1}.

L'anneau $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}[S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]$ est ϵ-gradué commutatif, i.e. si $\alpha \in [S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge n}]$ et $\beta \in [S^0, \mathbb{G}_m^{\wedge m}]$ alors $\alpha\beta = \epsilon^{mn}\beta\alpha$.

Les générateurs de l'anneau gradué

Definition

Soit $u \in F^*$. On note $[u] \in [S^0, \mathbb{G}_m]$ la classe du morphisme pointé $S^0 = \mathrm{Spec}(F)_+ \to \mathbb{G}_m$ qui est associé à u.

Les générateurs de l'anneau gradué

Definition

Soit $u \in F^*$. On note $[u] \in [S^0, \mathbb{G}_m]$ la classe du morphisme pointé $S^0 = \mathrm{Spec}(F)_+ \to \mathbb{G}_m$ qui est associé à u.

On note $\rho = -[-1]$.

Les générateurs de l'anneau gradué

Definition

Soit $u \in F^*$. On note $[u] \in [S^0, \mathbb{G}_m]$ la classe du morphisme pointé $S^0 = \mathrm{Spec}(F)_+ \to \mathbb{G}_m$ qui est associé à u.

On note $\rho = -[-1]$.

Definition

On note $\eta \in [S^0, \mathbb{G}_m^{-1}] \simeq [S^1 \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 2}, S^1 \wedge \mathbb{G}_m] \simeq [\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{P}^1]$ la classe du morphisme pointé $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1$ qui envoie (x, y) sur $[x : y]$ (où $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ est pointé par $(1, 1)$ et $\mathbb{P}^1$ est pointé par $[1 : 1]$).

Les générateurs de l'anneau gradué

Definition

Soit $u \in F^*$. On note $[u] \in [S^0, \mathbb{G}_m]$ la classe du morphisme pointé $S^0 = \mathrm{Spec}(F)_+ \to \mathbb{G}_m$ qui est associé à u.

On note $\rho = -[-1]$.

Definition

On note $\eta \in [S^0, \mathbb{G}_m^{-1}] \simeq [S^1 \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 2}, S^1 \wedge \mathbb{G}_m] \simeq [\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{P}^1]$ la classe du morphisme pointé $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1$ qui envoie (x, y) sur $[x : y]$ (où $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ est pointé par $(1, 1)$ et $\mathbb{P}^1$ est pointé par $[1 : 1]$).

Pour $F = \mathbb{C}$, sa restriction à $\mathbb{S}^3$ est la fibration de Hopf (qui engendre $\pi_3(\mathbb{S}^2)$).

Les relations de l'anneau gradué

- $[ab] = [a] + [b] + \eta[a][b]$

Les relations de l'anneau gradué

- $[ab] = [a] + [b] + \eta[a][b]$
- (Steinberg) $[a][1-a] = 0$

Les relations de l'anneau gradué

- $[ab] = [a] + [b] + \eta[a][b]$
- (Steinberg) $[a][1-a] = 0$
- $[a]\eta = \eta[a]$

Les relations de l'anneau gradué

- $[ab] = [a] + [b] + \eta[a][b]$
- (Steinberg) $[a][1-a] = 0$
- $[a]\eta = \eta[a]$
- $\eta\epsilon = \eta$

Definition

Soit $u \in F^*$. On note $\langle u \rangle = \eta[u] + 1 \in [S^0, S^0]$.

C'est la classe du morphisme pointé $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ qui envoie $[x : y]$ sur $[ux : y]$.

Definition

Soit $u \in F^*$. On note $\langle u \rangle = \eta[u] + 1 \in [S^0, S^0]$.

C'est la classe du morphisme pointé $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ qui envoie $[x : y]$ sur $[ux : y]$.

$$\epsilon = -\langle -1 \rangle$$

Definition

Soit $u \in F^*$. On note $\langle u \rangle = \eta[u] + 1 \in [S^0, S^0]$.

C'est la classe du morphisme pointé $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ qui envoie $[x : y]$ sur $[ux : y]$.

$$\epsilon = -\langle -1 \rangle$$

$$\eta\rho = -\eta[-1] = 1 - (\eta[-1] + 1) = 1 + \epsilon$$

Table des matières

L'anneau gradué de K-théorie de Milnor-Witt de F, noté $K_*^{\mathrm{MW}}(F)$, est le quotient de l'anneau gradué libre de générateurs les $[a]$ de degré 1 pour $a \in F^*$ et η de degré -1 par les relations :

- $[ab] = [a] + [b] + \eta[a][b]$
- (Steinberg) $[a][1-a] = 0$
- $[a]\eta = \eta[a]$
- $\eta\epsilon = \eta$

L'anneau gradué de K-théorie de Milnor-Witt de F, noté $K_*^{\mathrm{MW}}(F)$, est le quotient de l'anneau gradué libre de générateurs les $[a]$ de degré 1 pour $a \in F^*$ et η de degré -1 par les relations :

- $[ab] = [a] + [b] + \eta[a][b]$
- (Steinberg) $[a][1-a] = 0$
- $[a]\eta = \eta[a]$
- $\eta\epsilon = \eta$

Pour rappel, l'anneau gradué libre est l'anneau gradué des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et à indéterminées non commutatives les générateurs mentionnés (le degré d'un monôme étant la somme des degrés des puissances des générateurs).

L'anneau gradué de K-théorie de Milnor-Witt de F, noté $K_*^{\mathrm{MW}}(F)$, est le quotient de l'anneau gradué libre de générateurs les $[a]$ de degré 1 pour $a \in F^*$ et η de degré -1 par les relations :

- $[ab] = [a] + [b] + \eta[a][b]$
- (Steinberg) $[a][1-a] = 0$
- $[a]\eta = \eta[a]$
- $\eta\epsilon = \eta$

Pour rappel, l'anneau gradué libre est l'anneau gradué des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et à indéterminées non commutatives les générateurs mentionnés (le degré d'un monôme étant la somme des degrés des puissances des générateurs).

Si on quotiente par η on retrouve l'anneau gradué de K-théorie de Milnor de F !

- Si $n \geq 1$ alors tout élément de $K_n^{\mathrm{MW}}(F)$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\prod_{i=1}^{n}[a_i]$ avec les $a_i \in F^*$. On note $[a_1, \ldots, a_n] = \prod_{i=1}^{n}[a_i]$.

- Si $n \geq 1$ alors tout élément de $K_n^{\mathrm{MW}}(F)$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\prod_{i=1}^{n} [a_i]$ avec les $a_i \in F^*$. On note $[a_1, \ldots, a_n] = \prod_{i=1}^{n} [a_i]$.
- Si $n \leq 0$ alors tout élément de $K_n^{\mathrm{MW}}(F)$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\langle a \rangle \eta^{-n}$ avec $a \in F^*$.

- Si $n \geq 1$ alors tout élément de $K_n^{\mathrm{MW}}(F)$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\prod_{i=1}^{n}[a_i]$ avec les $a_i \in F^*$. On note $[a_1, \ldots, a_n] = \prod_{i=1}^{n}[a_i]$.
- Si $n \leq 0$ alors tout élément de $K_n^{\mathrm{MW}}(F)$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\langle a \rangle \eta^{-n}$ avec $a \in F^*$.
- L'application $K_0^{\mathrm{MW}}(F) \to \mathrm{GW}(F)$ qui envoie $\langle a \rangle$ sur la classe de l'application bilinéaire symétrique $\langle a \rangle : \begin{cases} F \times F & \to & F \\ (x, y) & \mapsto & axy \end{cases}$ est un isomorphisme d'anneaux.

- Si $n \geq 1$ alors tout élément de $K_n^{\mathrm{MW}}(F)$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\prod_{i=1}^{n}[a_i]$ avec les $a_i \in F^*$. On note $[a_1, \dots, a_n] = \prod_{i=1}^{n}[a_i]$.
- Si $n \leq 0$ alors tout élément de $K_n^{\mathrm{MW}}(F)$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\langle a \rangle \eta^{-n}$ avec $a \in F^*$.
- L'application $K_0^{\mathrm{MW}}(F) \to \mathrm{GW}(F)$ qui envoie $\langle a \rangle$ sur la classe de l'application bilinéaire symétrique $\langle a \rangle : \begin{cases} F \times F & \to & F \\ (x, y) & \mapsto & axy \end{cases}$ est un isomorphisme d'anneaux.
- Pour tout $n < 0$, l'application $K_n^{\mathrm{MW}}(F) \to \mathrm{W}(F)$ qui envoie $\langle a \rangle \eta^{-n}$ sur la classe de l'application bilinéaire symétrique $< a >: \begin{cases} F \times F & \to & F \\ (x, y) & \mapsto & axy \end{cases}$ est un isomorphisme de groupes abéliens.

Table des matières

Table des matières

Notations

- X est un schéma nœthérien de dimension finie
- Sm_X est la catégorie des X-schémas lisses, séparés, de type fini (avec pour morphismes tous les morphismes de X-schémas)
- Shv_X est la catégorie des faisceaux simpliciaux Nisnevich sur Sm_X
- $\mathrm{SH}(X)$ (resp. $\mathrm{SH}^{eff}(X)$) est la catégorie homotopique motivique stable (resp. effective) sur X (ce sont les $\mathbb{P}^1$-spectres de Shv_X, et si $T \in \mathrm{Shv}_X$ alors $\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1} T = (T \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ avec les identités des $T \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge n}$ (resp. S^1 au lieu de $\mathbb{P}^1$)
- $\mathrm{SH}^{eff}_s(X)$ est la catégorie homotopique motivique simpliciale effective sur X (S^1-spectres avant $\mathbb{A}^1$-localisation)

- $\mathrm{SH}_s^{\mathit{eff}}(F), \mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F)$ et $\mathrm{SH}(F)$ sont des catégories triangulées (on a un "shift" $X \mapsto X[1]$ et on a des triangles distingués (ou exacts) $X \to Y \to Z \to X[1]$)

- $\mathrm{SH}_s^{\mathit{eff}}(F), \mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F)$ et $\mathrm{SH}(F)$ sont des catégories triangulées (on a un "shift" $X \mapsto X[1]$ et on a des triangles distingués (ou exacts) $X \to Y \to Z \to X[1]$)
- $\mathrm{SH}_s^{\mathit{eff}}(F)$ a une t-structure canonique (grâce aux tours de Postnikov) et $\mathrm{SH}^{\mathit{eff}}$ a une t-structure (homotopique) telle que le foncteur canonique $i : \mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F) \to \mathrm{SH}_s^{\mathit{eff}}(F)$ soit t-exact (i.e. exact (au sens des catégories triangulées) et tel que $i(\mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F)_{\geq 0}) \subset \mathrm{SH}_s^{\mathit{eff}}(F)_{\geq 0}$ et $i(\mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F)_{\leq 0}) \subset \mathrm{SH}_s^{\mathit{eff}}(F)_{\leq 0}$) ; ça découle du théorème d'$\mathbb{A}^1$-connexité ! (Thm 6.38 dans le livre de Morel (2012))

- $\mathrm{SH}_s^{\mathit{eff}}(F), \mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F)$ et $\mathrm{SH}(F)$ sont des catégories triangulées (on a un “shift” $X \mapsto X[1]$ et on a des triangles distingués (ou exacts) $X \to Y \to Z \to X[1]$)
- $\mathrm{SH}_s^{\mathit{eff}}(F)$ a une t-structure canonique (grâce aux tours de Postnikov) et $\mathrm{SH}^{\mathit{eff}}$ a une t-structure (homotopique) telle que le foncteur canonique $i : \mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F) \to \mathrm{SH}_s^{\mathit{eff}}(F)$ soit t-exact (i.e. exact (au sens des catégories triangulées) et tel que $i(\mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F)_{\geq 0}) \subset \mathrm{SH}_s^{\mathit{eff}}(F)_{\geq 0}$ et $i(\mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F)_{\leq 0}) \subset \mathrm{SH}_s^{\mathit{eff}}(F)_{\leq 0}$) ; ça découle du théorème d'$\mathbb{A}^1$-connexité ! (Thm 6.38 dans le livre de Morel (2012))
- $\mathrm{SH}(F)$ a une t-structure (homotopique) telle que le foncteur $\Omega^{\infty}_{\mathbb{G}_m} : \mathrm{SH}(F) \to \mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F)$ soit t-exact (car le foncteur $G : \begin{cases} \mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F) & \to & \mathrm{SH}^{\mathit{eff}}(F) \\ E & \mapsto & \underline{\mathrm{Hom}}(\Sigma^{\infty}_{S^1}\mathbb{G}_m, E) \end{cases}$ est t-exact (d'après le Lemme 4.3.11 des notes de Trieste (2002) de Morel))

- Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, $E \in \mathrm{SH}(F)$, $\pi_n(E)_m$ est le faisceau Nisnevich associé au préfaisceau $U \mapsto [\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(U_+) \wedge S^n, E \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge m}]_{\mathrm{SH}(F)}$

- Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, $E \in \mathrm{SH}(F)$, $\pi_n(E)_m$ est le faisceau Nisnevich associé au préfaisceau $U \mapsto [\Sigma^{\infty}_{\mathbb{P}^1}(U_+) \wedge S^n, E \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge m}]_{\mathrm{SH}(F)}$
- La t-structure homotopique sur $\mathrm{SH}(F)$ est le couple de sous-catégories pleines de $\mathrm{SH}(F)$ suivant :

$$E \in \mathrm{SH}(F)_{\geq 0} \Leftrightarrow \forall n < 0 \forall m \in \mathbb{Z}\ \pi_n(E)_m = 0$$

$$E \in \mathrm{SH}(F)_{\leq 0} \Leftrightarrow \forall n > 0 \forall m \in \mathbb{Z}\ \pi_n(E)_m = 0$$

- Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, $E \in \mathrm{SH}(F)$, $\pi_n(E)_m$ est le faisceau Nisnevich associé au préfaisceau $U \mapsto [\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(U_+) \wedge S^n, E \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge m}]_{\mathrm{SH}(F)}$
- La t-structure homotopique sur $\mathrm{SH}(F)$ est le couple de sous-catégories pleines de $\mathrm{SH}(F)$ suivant :

$$E \in \mathrm{SH}(F)_{\geq 0} \Leftrightarrow \forall n < 0 \forall m \in \mathbb{Z}\ \pi_n(E)_m = 0$$

$$E \in \mathrm{SH}(F)_{\leq 0} \Leftrightarrow \forall n > 0 \forall m \in \mathbb{Z}\ \pi_n(E)_m = 0$$

- Le cœur de cette t-structure est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{SH}(F)$ dont les objets sont à la fois dans $\mathrm{SH}(F)_{\geq 0}$ et dans $\mathrm{SH}(F)_{\geq 0}$ (c'est une catégorie abélienne). On la note $\mathrm{SH}(F)^{\heartsuit}$.

($\mathrm{SH}_s^{eff}(F)^{\heartsuit}$ est équivalente à la catégorie des faisceaux abéliens)

- Un faisceau en groupes abéliens $M : \mathrm{Sm}_F^{op} \to \mathrm{Ab}$ est strictement $\mathbb{A}^1$-invariant (ou homotopique) si pour tous $Y \in \mathrm{Sm}_F$ et $i \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique $H^i_{Nis}(Y, M) \to H^i_{Nis}(\mathbb{A}^1_Y, M)$ est un isomorphisme.
  ($\mathrm{SH}^{eff}(F)^\heartsuit$ est équivalente à la catégorie des faisceaux homotopiques)

- Un faisceau en groupes abéliens $M : \mathrm{Sm}_F^{op} \to \mathrm{Ab}$ est strictement $\mathbb{A}^1$-invariant (ou homotopique) si pour tous $Y \in \mathrm{Sm}_F$ et $i \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique $H^i_{Nis}(Y, M) \to H^i_{Nis}(\mathbb{A}^1_Y, M)$ est un isomorphisme.
  ($\mathrm{SH}^{eff}(F)^{\heartsuit}$ est équivalente à la catégorie des faisceaux homotopiques)
- Soit M un faisceau strictement $\mathbb{A}^1$-invariant. La contraction de M est le faisceau en groupes abéliens (strictement $\mathbb{A}^1$-invariant)
  $M_{-1} : Y \mapsto \ker(M(\mathbb{G}_{m,Y}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} M(Y))$.

- Un faisceau en groupes abéliens $M : \mathrm{Sm}_F^{op} \to \mathrm{Ab}$ est strictement $\mathbb{A}^1$-invariant (ou homotopique) si pour tous $Y \in \mathrm{Sm}_F$ et $i \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique $H^i_{Nis}(Y, M) \to H^i_{Nis}(\mathbb{A}^1_Y, M)$ est un isomorphisme.
  ($\mathrm{SH}^{eff}(F)^{\heartsuit}$ est équivalente à la catégorie des faisceaux homotopiques)
- Soit M un faisceau strictement $\mathbb{A}^1$-invariant. La contraction de M est le faisceau en groupes abéliens (strictement $\mathbb{A}^1$-invariant)
  $M_{-1} : Y \mapsto \ker(M(\mathbb{G}_{m,Y}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} M(Y)\ )$.
- On dit que (M_*, μ_*) est un module homotopique si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, M_n est la donnée d'un faisceau strictement $\mathbb{A}^1$-invariant et $\mu_n : M_n \to (M_{n+1})_{-1}$ est la donnée d'un isomorphisme de faisceaux.

- Un faisceau en groupes abéliens $M : \mathrm{Sm}_F^{op} \to \mathrm{Ab}$ est strictement $\mathbb{A}^1$-invariant (ou homotopique) si pour tous $Y \in \mathrm{Sm}_F$ et $i \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique $H^i_{Nis}(Y, M) \to H^i_{Nis}(\mathbb{A}^1_Y, M)$ est un isomorphisme.
  ($\mathrm{SH}^{eff}(F)^{\heartsuit}$ est équivalente à la catégorie des faisceaux homotopiques)
- Soit M un faisceau strictement $\mathbb{A}^1$-invariant. La contraction de M est le faisceau en groupes abéliens (strictement $\mathbb{A}^1$-invariant)
  $M_{-1} : Y \mapsto \ker(M(\mathbb{G}_{m,Y}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} M(Y))$.
- On dit que (M_*, μ_*) est un module homotopique si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, M_n est la donnée d'un faisceau strictement $\mathbb{A}^1$-invariant et $\mu_n : M_n \to (M_{n+1})_{-1}$ est la donnée d'un isomorphisme de faisceaux.
- $\mathrm{SH}(F)^{\heartsuit}$ est équivalente à la catégorie des modules homotopiques.

- Pour tout $E \in \mathrm{SH}(F)$, $\pi_n(E)_*$ est un module homotopique.

- Pour tout $E \in \mathrm{SH}(F)$, $\pi_n(E)_*$ est un module homotopique.
- L'équivalence entre $\mathrm{SH}(F)^\heartsuit$ et la catégorie des modules homotopiques est induite par $E \mapsto \pi_0(E)_*$.

- Pour tout $E \in \mathrm{SH}(F)$, $\pi_n(E)_*$ est un module homotopique.
- L'équivalence entre $\mathrm{SH}(F)^{\heartsuit}$ et la catégorie des modules homotopiques est induite par $E \mapsto \pi_0(E)_*$.
- Les modules homotopiques sont des $\pi_0(S^0)_*$-modules.

- Pour tout $E \in \mathrm{SH}(F)$, $\pi_n(E)_*$ est un module homotopique.
- L'équivalence entre $\mathrm{SH}(F)^\heartsuit$ et la catégorie des modules homotopiques est induite par $E \mapsto \pi_0(E)_*$.
- Les modules homotopiques sont des $\pi_0(S^0)_*$-modules.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\pi_0(S^0)_n(\mathrm{Spec}(F)) \simeq K_n^{\mathrm{MW}}(F)$ (théorème de Morel) ; on note $\underline{K}^{\mathrm{MW}} \in \mathrm{SH}(F)^\heartsuit$ l'objet qui lui correspond.

Table des matières

- F est un corps parfait, $X, Y \in \mathrm{SH}(F)$

- F est un corps parfait, $X, Y \in \mathrm{SH}(F)$
- $\mathbb{1}_X$ est l'unité pour la structure monoïdale $\wedge$ de $\mathrm{SH}(X)$ ($\mathbb{1}_X = \Sigma^\infty((X \sqcup X, i_X))$ ($i_X : X \to X \sqcup X$ envoie X sur la seconde copie de X)).

- F est un corps parfait, $X, Y \in \mathrm{SH}(F)$
- $\mathbb{1}_X$ est l'unité pour la structure monoïdale $\wedge$ de $\mathrm{SH}(X)$ ($\mathbb{1}_X = \Sigma^\infty((X \sqcup X, i_X))$ ($i_X : X \to X \sqcup X$ envoie X sur la seconde copie de X)).
- Si $f : Y \to X$ est étale alors on a l'isomorphisme de pureté relative $\mathfrak{p}_f : f_! \to \mathrm{Th}(T_f) \wedge f_\# = \mathbb{1}_Y \wedge f_\# = f_\#$ et si f est propre alors on a l'isomorphisme canonique $\alpha_f : f_! \to f_*$ donc si f est étale et fini alors on a l'isomorphisme $\tau_f : f_* \to f_\#$ obtenu par composition :

$$\tau_f = \mathfrak{p}_f \circ \alpha_f^{-1}$$

- F est un corps parfait, $X, Y \in \mathrm{SH}(F)$
- $\mathbb{1}_X$ est l'unité pour la structure monoïdale $\wedge$ de $\mathrm{SH}(X)$ ($\mathbb{1}_X = \Sigma^\infty((X \sqcup X, i_X))$ ($i_X : X \to X \sqcup X$ envoie X sur la seconde copie de X)).
- Si $f : Y \to X$ est étale alors on a l'isomorphisme de pureté relative $\mathfrak{p}_f : f_! \to \mathrm{Th}(T_f) \wedge f_\# = \mathbb{1}_Y \wedge f_\# = f_\#$ et si f est propre alors on a l'isomorphisme canonique $\alpha_f : f_! \to f_*$ donc si f est étale et fini alors on a l'isomorphisme $\tau_f : f_* \to f_\#$ obtenu par composition :

$$\tau_f = \mathfrak{p}_f \circ \alpha_f^{-1}$$

- Si $f : Y \to X$ est étale et fini, on définit le transfert associé à f, noté $tr_f : \mathbb{1}_X \to f_\# f^* \mathbb{1}_X = f_\# \mathbb{1}_Y$, comme la composition de τ_f et du morphisme d'adjonction $\mathbb{1}_X \to f_* f^* \mathbb{1}_X$

- Pour rappel, $M \in \mathrm{SH}(F)^{\heartsuit}$ correspond au module homotopique $\pi_0(M)_*$; pour tout $Y \in \mathrm{SH}(F)$, on note $M_n(Y) := \pi_0(M)_n(Y)$.

- Pour rappel, $M \in \mathrm{SH}(F)^{\heartsuit}$ correspond au module homotopique $\pi_0(M)_*$; pour tout $Y \in \mathrm{SH}(F)$, on note $M_n(Y) := \pi_0(M)_n(Y)$.
- Si $f : Y \to X$ est un F-morphisme étale et fini entre deux F-schémas lisses (de morphismes structuraux s_Y et s_X) alors par adjonction $(f_\#, f^*) : M_n(Y) = [\mathbb{1}_Y, s_Y^* M \wedge \mathbb{G}_{m,Y}^n]_{\mathrm{SH}(Y)} = [f_\# \mathbb{1}_Y, f^* s_Y^* M \wedge f^* \mathbb{G}_{m,Y}^n]_{\mathrm{SH}(X)} = [f_\# \mathbb{1}_Y, s_X^* M \wedge \mathbb{G}_{m,X}^n]_{\mathrm{SH}(X)}$

- Pour rappel, $M \in \mathrm{SH}(F)^{\heartsuit}$ correspond au module homotopique $\pi_0(M)_*$; pour tout $Y \in \mathrm{SH}(F)$, on note $M_n(Y) := \pi_0(M)_n(Y)$.
- Si $f : Y \to X$ est un F-morphisme étale et fini entre deux F-schémas lisses (de morphismes structuraux s_Y et s_X) alors par adjonction $(f_\#, f^*) : M_n(Y) = [\mathbb{1}_Y, s_Y^* M \wedge \mathbb{G}_{m,Y}^n]_{\mathrm{SH}(Y)} = [f_\# \mathbb{1}_Y, f^* s_Y^* M \wedge f^* \mathbb{G}_{m,Y}^n]_{\mathrm{SH}(X)} = [f_\# \mathbb{1}_Y, s_X^* M \wedge \mathbb{G}_{m,X}^n]_{\mathrm{SH}(X)}$

Definition

Soient $M \in \mathrm{SH}(F)^{\heartsuit}$ et $f : Y \to X$ un F-morphisme étale et fini entre deux F-schémas lisses. Le transfert associé à M et f est

$$tr_f(M) = (tr_f^* : M_n(Y) \to M_n(X))_{n \in \mathbb{Z}}$$

Commutation du transfert avec les produits extérieurs

Soient F un corps parfait, $f : X' \to X$ et $g : Y' \to Y$ des F-morphismes étales et finis, $s_{X \times_F Y} : X \times_F Y \to \mathrm{Spec}(F)$, $s_X : X \to \mathrm{Spec}(F)$ et $s_Y : Y \to \mathrm{Spec}(F)$ les morphismes structuraux.

$(s_{X \times_F Y})_\# \circ tr_{f \times_F g} : \Sigma^\infty_{X \times_F Y}(X' \times_F Y')_+ \to \Sigma^\infty_F (X \times_F Y)_+$ correspond à

$$((s_X)_\# \circ tr_f) \wedge ((s_Y)_\# \circ tr_g) : \Sigma^\infty_X X'_+ \wedge \Sigma^\infty_Y Y'_+ \to \Sigma^\infty_F X_+ \wedge \Sigma^\infty_F Y_+$$

via les isomorphismes canoniques.

Changement de base

Soient F un corps parfait, $M \in \mathrm{SH}(F)^{\heartsuit}$, $g : V \to X$ un F-morphisme entre F-schémas lisses, $f : Y \to X$ un F-morphisme étale et fini, et $s : X \to \mathrm{Spec}(F)$ le morphisme structural. En notant ainsi leur carré cartésien

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g^* \circ tr_f(M) = tr_p(M) \circ q^* : M_n(Y) \to M_n(V)$

Formules de projection

Soient F un corps parfait, $M \in \mathrm{SH}(F)^{\heartsuit}$, $f : Y \to X$ un F-morphisme étale et fini entre F-schémas lisses.

$$\forall a \in \underline{K}_*^{\mathrm{MW}}(Y), \forall b \in M_*(X),\ tr_f(M)(a \cdot f^* b) = tr_f(\underline{K}^{\mathrm{MW}})(a) \cdot b$$

$$\forall a \in \underline{K}_*^{\mathrm{MW}}(X), \forall b \in M_*(Y),\ tr_f(M)(f^* a \cdot b) = a \cdot tr_f(M)(b)$$

Formules de projection

Soient F un corps parfait, $M \in \mathrm{SH}(F)^{\heartsuit}$, $f : Y \to X$ un F-morphisme étale et fini entre F-schémas lisses.

$$\forall a \in \underline{K}_*^{\mathrm{MW}}(Y), \forall b \in M_*(X),\ tr_f(M)(a \cdot f^* b) = tr_f(\underline{K}^{\mathrm{MW}})(a) \cdot b$$

$$\forall a \in \underline{K}_*^{\mathrm{MW}}(X), \forall b \in M_*(Y),\ tr_f(M)(f^* a \cdot b) = a \cdot tr_f(M)(b)$$

Prouvons la première affirmation.
Soit $\beta \in M(Y \times_F X)$ la classe du morphisme $\Sigma^\infty(Y \times_F X)_+ \to \Sigma^\infty Y_+ \wedge \Sigma^\infty X_+ \to \underline{K}^{\mathrm{MW}}(F) \wedge M \to M$ qui est le smash-produit de $\Sigma^\infty Y_+ \to \underline{K}^{\mathrm{MW}}(F)$ qui correspond à a et de $\Sigma^\infty X_+ \to M$ qui correspond à b.

Considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\delta_Y"] \arrow[d, "f"'] & Y \times_F Y \arrow[r, "\mathrm{Id} \times_F f"] & Y \times_F X \arrow[d, "f \times_F \mathrm{Id}"] \\ X \arrow[r, "\delta_X"'] & X \times_F X \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & X \times_F X \end{tikzcd}$$

Par changement de base, $\delta_X^*(tr_{f\times_F \mathrm{Id}}(M)(\beta)) = tr_f(M)((\mathrm{Id} \times_F f \circ \delta_Y)^*(\beta))$

Considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\delta_Y"] \arrow[d, "f"'] & Y \times_F Y \arrow[r, "\mathrm{Id} \times_F f"] & Y \times_F X \arrow[d, "f \times_F \mathrm{Id}"] \\ X \arrow[r, "\delta_X"'] & X \times_F X \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & X \times_F X \end{tikzcd}$$

Par changement de base, $\delta_X^*(tr_{f\times_F \mathrm{Id}}(M)(\beta)) = tr_f(M)((\mathrm{Id} \times_F f \circ \delta_Y)^*(\beta))$

Or, par commutation du transfert avec les produits extérieurs, on a $\delta_X^*(tr_{f\times_F \mathrm{Id}}(M)(\beta)) = \delta_X^*(tr_f(a) \cdot tr_{\mathrm{Id}}(b)) = tr_f(\underline{K}^{\mathrm{MW}})(a) \cdot b$, et on a aussi $tr_f(M)((\mathrm{Id} \times_F f \circ \delta_Y)^*(\beta)) = tr_f(M)(a \cdot f^* b)$, donc

$$tr_f(M)(a \cdot f^* b) = tr_f(\underline{K}^{\mathrm{MW}})(a) \cdot b$$

Table des matières

Table des matières

Definition

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Le simplexe standard de dimension n est l'ensemble simplicial noté Δ^n qui à $[k] = \{0, \ldots, k\}$ associe l'ensemble des applications croissantes de $[k]$ dans $[n]$ et à un morphisme φ associe φ^* (la précomposition par φ) ; c'est le préfaisceau qui représente $[n]$.
- Soient $n \geq 1$ et $i \in \{0, \ldots, n\}$. Le i-ème cornet de Δ^n, noté Λ^n_i, est le sous-ensemble simplicial de Δ^n qui associe à $[k]$ l'ensemble des applications croissantes $\psi : [k] \to [n]$ telles que $\psi([k]) \cup \{i\} \neq [n]$.
- Une ∞-catégorie $\mathscr{C}$ est un ensemble simplicial qui vérifie que pour tous $n \geq 2, 0 < i < n$ et transformation naturelle $f : \Lambda^n_i \to \mathscr{C}$, il existe une transformation naturelle $\tilde{f} : \Delta^n \to \mathscr{C}$ prolongeant f :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathscr{C} \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Soit C une ∞-catégorie. On utilise les notations habituelles pour les ensembles simpliciaux : C_n, d_i^n, s_j^n.

- Les objets de C sont les éléments de C_0 ; si $x \in C_0$, on note $\mathrm{Id}_x := s_0^0(x)$.
- Les morphismes de C sont les éléments de C_1 ; si $f \in C_1$, on note $f : x \to y$ pour signifier $d_1^1(f) = x$ et $d_0^1(f) = y$.
- Deux morphismes $f, g : x \to y$ sont homotopiquement équivalents s'il existe $H \in C_2$ tel que $d_0^2(H) = f$, $d_1^2(H) = g$, $d_2^2(H) = s_x$ (H est une homotopie de f à g).
- La catégorie homotopique de C, notée $H(C)$, est la catégorie avec les objets de C pour objets, les classes d'homotopie de morphismes de C pour morphismes, et la composition suivante :

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g = d_0^2(H)"] & \\ x \arrow[ur, "f = d_2^2(H)"] \arrow[rr, "g \circ f = d_1^2(H)"'] & & z \end{tikzcd}$$

- On dit qu'un morphisme $f : x \to y$ de C est une équivalence faible si f a un inverse homotopique :

$$\exists g : y \to x, [g] \circ [f] = [\mathrm{Id}_x] \in H(C), [f] \circ [g] = [\mathrm{Id}_y] \in H(C`)$$

- Soient x, y des objets de C. L'ensemble simplicial des morphismes dans C de x vers y, noté $\mathrm{Map}_C(x, y)$, est le produit fibré (dans la catégorie des ensembles simpliciaux) suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}_C(x,y) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{Hom}(\Delta^n \times \Delta^1, C))_{n\in\mathbb{N}} = C^{\Delta^1} \arrow[d, "((\partial_1^1)^*{,}(\partial_1^0)^*)"] \\
\Delta^0 \arrow[r, "(x{,}y)"'] & C \times C = C^{\Delta^0} \times C^{\Delta^0}
\end{tikzcd}$$

Table des matières

Dans toute cette section, C est une ∞-catégorie monoïdale symétrique stable présentable (donc cocomplète), engendrée par des objets compacts $(T_i)_{i \in I}$. On note $H(C)$ sa catégorie homotopique. On note $\mathbb{1} \in H(C)$ l'unité pour $\otimes$ et abusivement $\mathbb{1} \in C$.

Dans toute cette section, C est une ∞-catégorie monoïdale symétrique stable présentable (donc cocomplète), engendrée par des objets compacts $(T_i)_{i\in I}$. On note $H(C)$ sa catégorie homotopique. On note $\mathbb{1} \in H(C)$ l'unité pour $\otimes$ et abusivement $\mathbb{1} \in C$.

On dit qu'un objet Y de C est inversible s'il existe un objet Y' de C tel que dans $H(C)$:

$$Y \otimes Y' = \mathbb{1}, Y' \otimes Y = \mathbb{1}$$

On fixe $\alpha : \mathbb{1} \to Y$ un morphisme de C avec Y inversible.

Dans toute cette section, C est une ∞-catégorie monoïdale symétrique stable présentable (donc cocomplète), engendrée par des objets compacts $(T_i)_{i\in I}$. On note $H(C)$ sa catégorie homotopique. On note $\mathbb{1} \in H(C)$ l'unité pour $\otimes$ et abusivement $\mathbb{1} \in C$.

On dit qu'un objet Y de C est inversible s'il existe un objet Y' de C tel que dans $H(C)$:

$$Y \otimes Y' = \mathbb{1}, Y' \otimes Y = \mathbb{1}$$

On fixe $\alpha : \mathbb{1} \to Y$ un morphisme de C avec Y inversible.

Soit U un objet de C. On note

$$U[\alpha^{-1}] := \operatorname{colim}\ U \simeq U \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \alpha} U \otimes Y \simeq U \otimes Y \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \alpha} \ldots$$

Definition

Un objet X de C est α-local si pour tout objet T de C, $(\mathrm{Id}_T \otimes \alpha)^* : \mathrm{Map}_C(T \otimes Y, X) \to \mathrm{Map}_C(T, X)$ est une équivalence faible.

Definition

Un morphisme $f : T \to Z$ de C est une α-équivalence faible si pour tout objet α-local X de C, $f^* : \mathrm{Map}_C(Z, X) \to \mathrm{Map}_C(T, X)$ est une équivalence faible.

Ainsi, pour tout objet T de C, $\mathrm{Id}_T \otimes \alpha$ est une α-équivalence faible.

Theorem

Le foncteur $U \mapsto U[\alpha^{-1}]$ est un foncteur d'α-localisation, c'est-à-dire que pour tout $U \in C$, $U[\alpha^{-1}]$ est α-local et est α-faiblement équivalent à U (via le morphisme canonique $U \to U[\alpha^{-1}]$).

Étant donné que C est engendrée par des objets compacts, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Id}_{U \otimes Y^n} \otimes \alpha : U \otimes Y^n \to U \otimes Y^{n+1}$ est une α-équivalence faible pour avoir le fait que le morphisme canonique $U \to U[\alpha^{-1}]$ est une α-équivalence faible. Or ceci découle des définitions !

Le fait que $U[\alpha^{-1}]$ est α-local est plus dur à montrer (c'est aussi le cas dans les catégories de modèles). On va d'abord montrer un lemme sur les objets α-locaux.

Notons $\alpha' : Y' \to Y' \otimes Y = \mathbb{1}$ le morphisme $\mathrm{Id}_{Y'} \otimes \alpha$.

Lemma

- *Un objet X est α-local si et seulement si pour tout objet T, $(\alpha' \otimes \mathrm{Id}_X)_* : \mathrm{Map}_C(T, Y' \otimes X) \to \mathrm{Map}_C(T, X)$ est une équivalence faible.*
- *Un objet X est α-local si et seulement s'il est $\alpha \otimes \alpha$-local.*

Notons $\alpha' : Y' \to Y' \otimes Y = \mathbb{1}$ le morphisme $\mathrm{Id}_{Y'} \otimes \alpha$.

Lemma

- *Un objet X est α-local si et seulement si pour tout objet T, $(\alpha' \otimes \mathrm{Id}_X)_* : \mathrm{Map}_C(T, Y' \otimes X) \to \mathrm{Map}_C(T, X)$ est une équivalence faible.*
- *Un objet X est α-local si et seulement s'il est $\alpha \otimes \alpha$-local.*

Le premier point découle du fait que $\mathrm{Map}_C(T, X \otimes Y') \simeq \mathrm{Map}_C(T \otimes Y, X)$.

Notons $\alpha' : Y' \to Y' \otimes Y = \mathbb{1}$ le morphisme $\mathrm{Id}_{Y'} \otimes \alpha$.

Lemma

- *Un objet X est α-local si et seulement si pour tout objet T, $(\alpha' \otimes \mathrm{Id}_X)_* : \mathrm{Map}_C(T, Y' \otimes X) \to \mathrm{Map}_C(T, X)$ est une équivalence faible.*
- *Un objet X est α-local si et seulement s'il est $\alpha \otimes \alpha$-local.*

Le premier point découle du fait que
$\mathrm{Map}_C(T, X \otimes Y') \simeq \mathrm{Map}_C(T \otimes Y, X)$.
Le second point découle du fait qu'on peut appliquer la définition d'α-localité à l'objet $T \otimes Y$ et qu'on peut appliquer la définition d'$\alpha \otimes \alpha$-localité à $T \otimes Y'$.

- Remarquons que $X := U[\alpha^{-1}] = U[(\alpha \otimes \alpha)^{-1}]$ (ce qui fait que Y est remplacé par $Y \otimes Y$).

- Remarquons que $X := U[\alpha^{-1}] = U[(\alpha \otimes \alpha)^{-1}]$ (ce qui fait que Y est remplacé par $Y \otimes Y$).
- Il nous suffit de montrer que pour tout objet T, $(\mathrm{Id}_X \otimes (\alpha \otimes \alpha)')_* : \mathrm{Map}_C(T, X \otimes Y' \otimes Y') \to \mathrm{Map}_C(T, X)$ est une équivalence faible.

- Remarquons que $X := U[\alpha^{-1}] = U[(\alpha \otimes \alpha)^{-1}]$ (ce qui fait que Y est remplacé par $Y \otimes Y$).
- Il nous suffit de montrer que pour tout objet T, $(\mathrm{Id}_X \otimes (\alpha \otimes \alpha)')_* : \mathrm{Map}_C(T, X \otimes Y' \otimes Y') \to \mathrm{Map}_C(T, X)$ est une équivalence faible.
- En fait il nous suffit de le vérifier pour T compact, ce qui simplifie la preuve car pour tous X_i, $\mathrm{Map}_C(T, \mathrm{colim}_i X_i) = \mathrm{colim}_i \mathrm{Map}_C(T, X_i)$ si T est compact.

- Remarquons que $X := U[\alpha^{-1}] = U[(\alpha \otimes \alpha)^{-1}]$ (ce qui fait que Y est remplacé par $Y \otimes Y$).
- Il nous suffit de montrer que pour tout objet T, $(\mathrm{Id}_X \otimes (\alpha \otimes \alpha)')_* : \mathrm{Map}_C(T, X \otimes Y' \otimes Y') \to \mathrm{Map}_C(T, X)$ est une équivalence faible.
- En fait il nous suffit de le vérifier pour T compact, ce qui simplifie la preuve car pour tous X_i, $\mathrm{Map}_C(T, \mathrm{colim}_i X_i) = \mathrm{colim}_i \mathrm{Map}_C(T, X_i)$ si T est compact.
- Étant donné que $U[(\alpha \otimes \alpha)^{-1}] \simeq U \otimes \mathbb{1}[(\alpha \otimes \alpha)^{-1}]$, on peut supposer que $U = \mathbb{1}$.

Il nous reste à montrer que le diagramme commutatif suivant (où $. = \otimes$) :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}_C(T, Y'.Y') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Map}_C(T, \mathbb{1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Map}_C(T, Y.Y) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\mathrm{Map}_C(T, \mathbb{1}) \arrow[r] & \mathrm{Map}_C(T, Y.Y) \arrow[r] & \mathrm{Map}_C(T, Y.Y.Y.Y) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

induit une équivalence faible entre les colimites ; c'est le cas car les classes d'homotopie des flèches dans ce diagramme qui ont même domaine et même codomaine sont égales !
(Attention, on utilise le fait que $Y \otimes Y$ est un carré)

Il nous reste à montrer que le diagramme commutatif suivant (où $. = \otimes$) :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}_C(T, Y'.Y') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Map}_C(T, \mathbb{1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Map}_C(T, Y.Y) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\mathrm{Map}_C(T, \mathbb{1}) \arrow[r] & \mathrm{Map}_C(T, Y.Y) \arrow[r] & \mathrm{Map}_C(T, Y.Y.Y.Y) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

induit une équivalence faible entre les colimites ; c'est le cas car les classes d'homotopie des flèches dans ce diagramme qui ont même domaine et même codomaine sont égales !
(Attention, on utilise le fait que $Y \otimes Y$ est un carré)
Pour ce faire, on considère les groupes d'homotopies stables et on utilise le fait que le π_n d'une colimite (homotopique) filtrante est la colimite dans la catégorie des groupes abéliens du système induit (puis chasse au diagramme !).

Merci de votre attention !