Table des matières

Cohomologie de Deligne en degré 2

Le but de l'exposé est de donner une interprétation géométrique du groupe $\mathrm{H}^2_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(\mathrm{X}, \mathbb{Z}(2))$ où X désigne une variété algébrique réelle projective lisse.

Convention 0.1. La lettre G désigne sauf mention expresse du contraire le groupe de Galois de l'extension $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{G}$ un groupe. Sauf mention expresse du contraire, par $\mathfrak{G}$-ensemble (ou $\mathfrak{G}$-espace), nous entendons $\mathfrak{G}$-espace *à gauche*.

1. Le groupe $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}, \underline{\mathbb{Z}})$

1.1 Construction de Borel

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe. Si X et Y sont des $\mathfrak{G}$-espaces, le groupe $\mathfrak{G}$ agit sur le produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ par $g(x, y) = (gx, gy)$ pour tout $g \in \mathfrak{G}$ et tout $(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$: c'est l'*action diagonale* de $\mathfrak{G}$ sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$.

Définition 1.1. Le *produit contracté* de X et Y est $\mathrm{X} \times_{\mathfrak{G}} \mathrm{Y} = (\mathrm{X} \times \mathrm{Y})/\mathfrak{G}$, l'espace quotient de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ par l'action diagonale de $\mathfrak{G}$.

Désormais, le groupe $\mathfrak{G}$ est un CW-complexe localement fini (par exemple, $\mathfrak{G}$ est fini muni de la topologie discrète) ou une variété. Rappelons qu'il existe un espace contractile $\mathrm{E}\mathfrak{G}$ sur lequel $\mathfrak{G}$ agit librement et tel que la flèche de $\mathrm{E}\mathfrak{G}$ vers $\mathrm{B}\mathfrak{G} = \mathrm{E}\mathfrak{G}/\mathfrak{G}$ est une fibration localement triviale de fibre $\mathfrak{G}$ [1]. L'espace $\mathrm{B}\mathfrak{G}$ est l'*espace classifiant* du groupe $\mathfrak{G}$ car il classifie les $\mathfrak{G}$-fibrés principaux : si X est un espace topologique (raisonnable, par exemple un CW-complexe localement fini ou une variété), la donnée d'un $\mathfrak{G}$-fibré principal est équivalente à la donnée d'un élément de $[\mathrm{X}, \mathrm{B}\mathfrak{G}]$, l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X vers $\mathrm{B}\mathfrak{G}$, la bijection étant induite par la construction du tiré en arrière par une application continue $\mathrm{X} \to \mathrm{B}\mathfrak{G}$ du fibré $\mathrm{E}\mathfrak{G} \to \mathrm{B}\mathfrak{G}$.

Définition 1.2. Soit X un $\mathfrak{G}$-espace. L'*espace des orbites homotopique* de X est $\mathrm{X}//\mathfrak{G} = \mathrm{E}\mathfrak{G} \times_{\mathfrak{G}} \mathrm{X}$.

Remarque. L'espace $\mathrm{X}//\mathfrak{G}$ est une correction homotopique du quotient par la $\mathfrak{G}$-action. Plus précisément, il n'est pas vrai en général que si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une application équivariante entre $\mathfrak{G}$-espaces qui est une équivalence d'homotopie (en oubliant les $\mathfrak{G}$-actions), alors l'application $\mathrm{X}/\mathfrak{G} \to \mathrm{Y}/\mathfrak{G}$ qu'elle induit entre quotients naïfs est une équivalence d'homotopie : il suffit pour s'en convaincre de considérer $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ muni de l'action de $\mathbb{Z}$ par translation, et $\mathrm{Y} = *$ muni (forcément !) de l'action triviale de $\mathbb{Z}$. Notons que du point de vue de la théorie de l'homotopie classique, les espaces $\mathrm{E}\mathfrak{G} \times \mathrm{X}$ et X sont indiscernables puisque $\mathrm{E}\mathfrak{G}$ est contractile ; en revanche, puisque l'action de $\mathfrak{G}$ sur $\mathrm{E}\mathfrak{G}$ est *libre*, c'est aussi le cas de son action sur $\mathfrak{G}$ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{X}$: en effet, si l'action de $\mathfrak{G}$ sur X est libre, alors la flèche $\mathrm{X}//\mathfrak{G} \to \mathrm{X}/\mathfrak{G}$ induite par la projection $\mathrm{E}\mathfrak{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathfrak{G}$ est une équivalence d'homotopie. [2] La situation est analogue à celle de la cohomologie relative, qui coïncide avec la cohomologie du quotient dans le cas de bonnes paires comme les CW-complexes et leurs sous-complexes. [3]

1. C'est inexact si $\mathfrak{G}$ est trop pathologique.
2. De même, le quotient d'une variété par l'action d'un groupe de Lie est une variété *lorsque l'action est libre*.
3. Cette remarque est tirée d'une discussion sur le site Mathematics Stack Exchange, disponbile à l'adresse URL suivante : `https://math.stackexchange.com/questions/2757214/interpretation-of-borel-equivariant-cohomology`. D'autres motivations pour introduire l'espace $\mathrm{X}//\mathfrak{G}$ y sont également données.

Remarque. On appelle aussi le $\mathfrak{G}$-espace $E\mathfrak{G} \times_{\mathfrak{G}} X$ la *construction de Borel* de X. En effet, la cohomologie équivariante de Borel $H^*_{\mathrm{Bor}}(X, A)$ à coefficients dans un groupe abélien A est définie par

$$H^*_{\mathrm{Bor}}(X, A) = H^*(E\mathfrak{G} \times_{\mathfrak{G}} X, A)$$

où $H^*(-, A)$ désigne la cohomologie singulière à coefficients dans A. La cohomologie de Borel est très utile (par exemple, elle est employée, avec coefficients tordus, par Benoist et Wittenberg dans [Oli20]) mais, par exemple, elle ne permet pas de développer une théorie de l'obstruction.

Nous supposons désormais le groupe $\mathfrak{G}$ fini. Soit $\mathfrak{h}^*$ une théorie cohomologique équivariante [4] définie sur la catégorie des $\mathfrak{G}$-espaces.

Définition 1.3. La *cohomologie de Borel* associée à $\mathfrak{h}^*$ est la théorie cohomologique équivariante $\mathfrak{h}^*_{\mathrm{Bor}}$ donnée par $\mathfrak{h}^*_{\mathrm{Bor}}(X) = \mathfrak{h}^*(E\mathfrak{G} \times X)$.

Remarque. Comme $E\mathfrak{G}$ est contractile, « il ne se passe rien » au niveau homotopique en passant de $\mathfrak{h}^*$ à $\mathfrak{h}^*_{\mathrm{Bor}}$: la différence se situe au niveau des $\mathfrak{G}$-actions puisque comme nous l'avons signalé précédemment, la $\mathfrak{G}$-action sur $E\mathfrak{G} \times X$ est libre car c'est le cas de la $\mathfrak{G}$-action sur $E\mathfrak{G}$.

Remarque. Si $H^*_G(-, \underline{\mathbb{Z}})$ désigne la cohomologie définie par Bredon dans [Bre67] [5], alors $H^*_{\mathrm{Bor}}(X, \mathbb{Z}) = H^*_G(E\mathfrak{G} \times X, \underline{\mathbb{Z}})$ est la cohomologie de Borel associée à $H^*_{\mathbb{G}}$.

Nous notons $H^{*,*}_{\mathrm{Bor}}(-,-)$ la cohomologie de Borel associée à la cohomologie $H^{*,*}_{\mathrm{Br}}(-,-)$ de Bredon.

Rappelons des notations. L'anneau $RO(G)$ s'identifie à $\mathbb{Z}\mathbf{1} \oplus \mathbb{Z}\xi$ où ξ est la classe de la représentation signe. La cohomologie de Bredon $H^{*,*}_{\mathrm{Br}}(-, \underline{\mathbb{Z}})$ est représentable par des espaces d'Eilenberg–Mac Lane équivariants : plus précisément, il existe, pour tous entiers $n \geqslant p$, un G-espace pointé $K(\underline{\mathbb{Z}}, (n,p))$ et un isomorphisme $H^{n,p}_{\mathrm{Br}}(X, \underline{\mathbb{Z}}) = [X_+, K(\underline{\mathbb{Z}}, (n,p))]_G$ naturel en X, où $[Y, Z]_G$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie pointée d'applications G-équivariantes pointées (les homotopies étant réalisées par des applications G-équivariantes) de Y vers Z. Une construction explicite est donnée en considérant la sphère de représentation $S^{n,p}$ de $(n-p)\mathbf{1} + p\xi$, laquelle possède un point à l'infini ∞ qui est un point fixe de l'action de G ; le quotient $\mathbb{Z}_0(S^{p,p})$ du groupe abélien libre $\mathbb{Z}(S^{n,p})$ sur $S^{n,p}$, muni d'une topologie convenable, par $\mathbb{Z}(\{\infty\})$ est alors un modèle de $K(\underline{\mathbb{Z}}, (n,p))$, voir [San03].

Proposition 1.4 ([SL11, Proposition A.1])**.** *Soit (n,p) un couple d'entiers tel que $0 \leqslant n \leqslant p$. Alors, pour tout G-espace X, $H^{n,p}_{\mathrm{Br}}(X, \underline{\mathbb{Z}}) = H^{n,p}_{\mathrm{Bor}}(X, \underline{\mathbb{Z}})$.*

Démonstration. Le morphisme $\mathbb{Z}_0(S^{p,p}) \to F(EG, \mathbb{Z}_0(S^{p,p}))$ est une équivalence d'homotopie équivariante [6] — le membre de droite désigne l'espace des applications équivariantes de EG vers $\mathbb{Z}_0(S^{p,p})$. Vu la définition de $H^{*,*}_{\mathrm{Bor}}$, cela implique le résultat voulu pour $n = p$. Le cas $n \leqslant p$ s'en déduit par suspension. □

En outre, pour tout G-espace X,

$$H^{n,p}_{\mathrm{Bor}}(X, \underline{\mathbb{Z}}) = H^n_{\mathrm{Bor}}(X, \mathbb{Z}(p)),$$

où $\mathbb{Z}(p) = (2i\pi)^p\mathbb{Z}$, voir l'introduction de [SL11].

4. Nous restons volontairement vague sur la définition à donner à cette expression. Nous n'aurons en réalité besoin que du cas concret de la cohomologie de Bredon.

5. Ici, $\underline{\mathbb{Z}}$ est un *système de coefficients* au sens de Bredon, c'est-à-dire un foncteur contravariant de la catégorie des orbites de $\mathfrak{G}$ vers la catégorie des groupes abéliens : c'est le système de coefficients constant de valeur $\mathbb{Z}$.

Lorsque $\mathfrak{G} = G$, $H^*_G(-, \underline{\mathbb{Z}})$ est intimement liée à la cohomologie de Bredon $H^{*,*}_{\mathrm{Br}}(-, \underline{\mathbb{Z}})$ étudiée qui en est une extension RO(G)-graduée au sens où $H^{n,0}_{\mathrm{Br}}(X, \underline{\mathbb{Z}}) = H^n_G(X, \underline{\mathbb{Z}})$ où $\underline{\mathbb{Z}}$ désigne le préfaisceau de Mackey représenté par $\mathbb{Z}$ dans le premier groupe de cohomologie, et le système de coefficients constant de valeur $\mathbb{Z}$ dans le second.

6. L'article de dos Santos–Lima-Filho ne donne pas davantage de détails.

1.2 Descriptions en termes de fibrés en droites

Rappelons que la colimite $\mathbb{C}^\infty$ des espaces $\mathbb{C}^n$, où $\mathbb{C}^n$ est plongé dans $\mathbb{C}^{n+1}$ par $x \mapsto (x, 0)$, muni de la topologie de la colimite est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel topologique dont l'espace des droites, quotient de $\mathbb{C}^\infty$ par l'action de $\mathbb{C}^*$ par homothétie, est noté $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$: ce dernier s'identifie à la colimite des espaces $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (avec morphismes de transitions donnés par $x \mapsto [x : 0]$ avec un abus de notations évident). Concrètement, un élément de $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ est une suite $[x_0 : x_1 : \cdots]$ presque nulle dont au moins un terme est non nul où deux suites $[x_0 : x_1 : \cdots]$ et $[x'_0 : x'_1 : \cdots]$ sont identifiées lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $x'_i = \lambda x_i$ pour tout i.

L'espace $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ est naturellement muni d'une fibré en droites $p : \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ dit tautologique : l'espace total $\mathcal{O}(-1)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\infty$ donné par $\mathcal{O}(-1) = \{(\ell, v) \in \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\infty, v \in \ell\}$ et l'application p est la restriction à L de la deuxième projection. Ainsi, la fibre au-dessus d'une droite ℓ de $\mathbb{C}^\infty$ est « la droite ℓ elle-même ».

Si X est un espace topologique et si $f : \mathrm{X} \to \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ est une application continue, alors $f^*\mathcal{O}(-1) = \{(x, (\ell, v)) \in \mathrm{X} \times \mathcal{O}(-1), f(x) = \ell\}$ muni de la première projection est un fibré en droites sur X. Le résultat suivant est bien connu (mais non trivial !).

Théorème 1.5. *Soit* X *un espace paracompact. L'association* $f \mapsto f^*\mathcal{O}(-1)$ *de l'ensemble des applications continues de* X *vers* $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ *vers l'ensemble* $\mathrm{Pic}(\mathrm{X})$ *des classes d'isomorphismes de fibrés en droites descend en une bijection* $[\mathrm{X}, \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})] \cong \mathrm{Pic}(\mathrm{X})$.

On peut résumer cet énoncé en disant que $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ est l'espace classifiant du groupe $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ (avec son fibré en droites tautologique) classifie les fibrés en droites (sur les espaces raisonnables).

L'espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ muni de l'involution $\sigma : [x_0 : x_1] \mapsto [x_0 : -x_1]$ s'identifie en tant que G-espace à la sphère de représentation $\mathrm{S}^{2,2}$ par l'identification standard de $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ envoyant z sur $[z : 1]$ et ∞ sur $[1 : 0]$. L'involution σ s'étend en une involution de $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$, envoyant $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \cdots]$ sur $[x_0 : -x_1 : x_2 : -x_3 : \cdots]$ et toujours notée σ. Le couple $(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}), \sigma)$ est un $\mathrm{K}(\overline{\mathbb{Z}}, (2, 2))$ en vertu de l'identification de $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ au symétrisé infini de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire à la colimite de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n/\mathfrak{S}_n$, le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n$ par permutation des coordonnées, voir **??**. En outre, le morphisme structural du tiré en arrière fournit une application $\tau : \sigma^*\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}(-1)$ qui recouvre σ (c'est la commutativité du diagramme de produit fibré) et vérifie $\tau \circ \sigma^*\tau = \mathrm{Id}$.

Soit (Y, σ) un G-espace. Nous notons $\mathrm{P}_1(\mathrm{Y})$ l'ensemble des paires (L, τ) où :

- la lettre L désigne un fibré en droites complexe lisse sur Y ;
- la lettre τ désigne un morphisme de fibrés de $\sigma^*\mathrm{L}$ vers L recouvrant σ, c'est-à-dire que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \sigma^*\mathcal{L} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & \mathrm{L} \arrow[d] \\ \mathrm{Y} \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

  est commutatif ;
- on a $\tau \circ \sigma^*\tau = \mathrm{Id}$.

Nous notons $\sim_1$ la relation sur $\mathrm{P}_1(\mathrm{Y})$ définie comme suit : $(\mathrm{L}, \tau) \sim_1 (\mathrm{L}', \tau')$ lorsqu'il existe un isomorphisme $\phi : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ de fibrés vectoriels tel que $\phi \circ \tau = \tau' \circ \sigma^*\phi$. Le tiré en arrière fait de $\mathrm{Prm}_1(\mathrm{Y})$ un foncteur contravariant sur la catégorie des G-espaces.

Lemme 1.6. *Le produit tensoriel de fibrés en droites descend en une loi de groupe sur* $\mathcal{L}_1(\mathrm{Y}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{Y})/\sim_1$. *En outre, le groupe* $(\mathcal{L}_1(\mathrm{Y}), \otimes)$ *est isomorphe à* $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{Y}, \underline{\mathbb{Z}})$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $((\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}), \sigma), (\mathcal{O}(-1), \tau))$ représente $\mathcal{L}_1$ [7], et que $(\mathbb{P}\infty(\mathbb{C}), \sigma)$ est un $\mathrm{K}(\underline{\mathbb{Z}}, (2, 2))$. □

Nous allons introduire un autre outil pour comprendre le groupe $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}, \underline{\mathbb{Z}})$. Commençons par une notation. Si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\overline{\mathrm{V}}$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont le groupe abélien sous-jacent est le même que celui de V, et dont l'action de $\mathbb{C}$ est donnée par $(\lambda, v) \mapsto \overline{\lambda} v$ — c'est

7. L'auteur n'est pas parvenu à vérifier cette affirmation.

donc la même construction que celle de la théorie de Hodge. L'association $\mathrm{V} \mapsto \overline{\mathrm{V}}$ s'étend en un endofoncteur de la catégorie des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de façon évidente. La donnée d'une application $\mathbb{C}$-antilinéaire f de V vers W (cela signifie que $f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v)$) est équivalente à la donnée d'une application $\mathbb{C}$-linéaire de $\overline{\mathrm{V}}$ vers W ou de V vers $\overline{\mathrm{W}}$, par l'identité en termes ensemblistes. En outre, la donnée d'un produit hermitien sur V consiste la donnée d'un morphisme $h : \mathrm{V} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathrm{V}} \to \mathbb{C}$ de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. La construction $\mathrm{V} \mapsto \overline{\mathrm{V}}$ s'étend de manière évidente aux fibrés vectoriels : si $p : \mathrm{E} \to \mathrm{X}$ est un fibré vectoriel complexe, $\overline{\mathrm{E}}$ est le fibré de projection p tel que pour tout $x \in \mathrm{X}$, $\overline{\mathrm{E}}_x = \overline{\mathrm{E}_x}$ — seule la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur les fibres change (en conjuguant les trivialisations locales, on voit immédiatment que $\overline{\mathrm{E}} \to \mathrm{X}$ est un fibré vectoriel).

Rappelons qu'un *fibré vectoriel Réel* sur un G-espace Y consiste en la donnée d'un couple (E, τ) où E est un fibré vectoriel complexe sur Y et $\tau : \overline{\sigma^* \mathrm{E}} \to \mathrm{E}$ est un σ-isomorphisme de fibrés vectoriels [8] tel que $\tau \circ \overline{\sigma^* \tau} = \mathrm{Id}$. Nous notons $\mathrm{P}_2(\mathrm{Y})$ l'ensemble des couples (L, q) où :

- la lettre L désigne un fibré en droites complexe lisse sur Y ;
- la lettre q désigne un isomorphisme $q : \mathrm{L} \otimes \overline{\sigma^* \mathrm{L}} \to \mathbf{1}_{\mathrm{Y}}$ de fibrés vectoriels Réels sur Y, où $\not\Vdash_{\mathrm{Y}}$ désigne la structure évidente de fibré vectoriel Réel sur le fibré en droites complexe trivial sur Y, et où $\mathrm{L} \otimes \overline{\sigma^* \mathrm{L}}$ est muni de la structure tautologique de fibré vectoriel Réel sur Y donnée par l'échange des facteurs du produit tensoriel.

Nous introduisons la relation $\sim_2$ définie comme suit : $(\mathrm{L}, q) \sim_2 (\mathrm{L}', q')$ si, et seulement si, il existe un isomorphisme $\phi : \mathrm{L}' \to \mathrm{L}'$ tel que $q' \circ (\phi \otimes \overline{\sigma^* \phi}) = q$. La relation $\sim_2$ est une relation d'équivalence sur $\mathrm{P}_2(\mathrm{Y})$. La classe de (L, q) est notée $\langle \mathrm{L}, q \rangle$.

Lemme 1.7. *Le produit tensoriel descend en une structure de groupe sur l'ensemble* $\mathcal{L}_2(\mathrm{Y}) = \mathrm{P}_2(\mathrm{Y})$.

La proposition suivante fournit plusieurs descriptions de $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{Y}, \underline{(}\mathbb{Z}))$.

Proposition 1.8. *On dispose d'isomorphismes naturels*

$$\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{Y}, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Y}, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \mathcal{L}_1(\mathrm{Y}) \cong \mathcal{L}_2(\mathrm{Y})$$

de groupes abéliens pour tout G*-variété* Y*.*

Remarque. Dans **??**, les auteurs ajoutent que $\mathcal{L}_2(\mathrm{Y})$ est tautologiquement isomorphe à $\mathbb{H}^1(\mathrm{Y}_{\text{éq}}, \mathrm{G}^0 \xrightarrow{a} \mathrm{G}^1)$ (en fait, il vaut mieux employer, comme dos Santos et Lima-Filho le font dans l'appendice, la cohomologie de Čech) où G^0 (respectivement G^1) est le faisceau sur la catégorie des G-variétés donnés par $\mathrm{G}^0(\mathrm{Y}) = \{f : \mathrm{Y} \to \mathbb{C}^*,\ f \text{ lisse}\}$ et $\mathrm{G}^1(\mathrm{Y}) = \{f : \mathrm{Y} \to \mathbb{C}^*,\ f \text{ lisse et équivariante}\}$ (rappelons que $\mathbb{C}^*$ est muni de la G-action par conjugaison complexe), et le morphisme a est donné par $a(f) = f\overline{\sigma^* f}$ (où $\sigma^* f : x \mapsto f(\sigma(x))$). L'auteur n'a pas réussi à restituer convenablement cette tautologie. Nous soupçonnons que la preuve est analogue à l'identification de l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites avec $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathcal{O}^*_{\mathrm{X}})$ (dans différents contextes) puisque, si f est une fonction de transition pour un fibré L, $a(f)$ est la fonction de transition pour $\mathrm{L} \otimes \overline{\sigma^* \mathrm{L}}$, mais nous n'avons pas réussi à le détailler complètement — l'une des difficultés est que, *a priori*, il n'est pas possible de trivialiser un fibré en droites complexe lisse L par des ouverts G-stables : il est peut-être possible de le faire si L est de surcroît muni d'une application q telle que (L, q) est dans $\mathrm{P}_2(\mathrm{Y})$ mais l'auteur n'a pas pu l'établir.

Cette interprétation de $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}$ n'apparaît que dans l'appendice B, dont l'organisation est analogue à celle de la section 5, où les auteurs donnent, en termes de cocyles, une description explicite de l'application $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{Y}, \underline{\mathbb{Z}}) \to \mathbb{H}^1(\mathrm{Y}_{\text{éq}}, \mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}^1)$, en tant que prélude à la démonstration de la suite exacte où s'insère le groupe $\mathrm{H}^2_{\mathrm{D}/\mathbb{R}}(\mathrm{X}, \mathbb{Z})$.

Démonstration. Il reste désormais seulement à démontrer que $\mathcal{L}_1(\mathrm{Y})$ et $\mathcal{L}_2(\mathrm{Y})$ sont isomorphes.

- Soit (L, τ) un élément de $\mathrm{P}_1(\mathrm{Y})$. Soit $h : \mathrm{L} \otimes \overline{\mathrm{L}} \to \mathbf{1}_{\mathrm{Y}}$ une métrique hermitienne. On pose

$$q^h_\tau = h \circ 1 \otimes \overline{\tau} : \mathrm{L} \otimes \overline{\sigma^* \mathrm{L}} \xrightarrow{1 \otimes \overline{\tau}} \mathrm{L} \otimes \overline{\mathrm{L}} \to \mathbf{1}_{\mathrm{Y}}.$$

C'est un isomorphisme de fibrés en droites Réels d'où un élément (L, q^h_τ) de $\mathrm{P}_2(\mathrm{Y})$.

8. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\overline{\mathrm{V}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel ayant le même groupe abélien sous-jacent que V mais dont la $\mathbb{C}$-action $* : \mathbb{C} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ est donnée par $\lambda * v = \overline{\lambda} v$.

Si $\psi : \mathrm{L}' \to \mathrm{L}$ est un isomorphisme de fibrés en droites tel que $q \circ \phi \otimes \overline{\sigma^* \phi} = q$, alors $(\mathrm{L}', q_\tau^{\psi^* h}) \sim_2 (\mathrm{L}, q_\tau^h)$. On en déduit [9] que $(\mathrm{L}, \tau) \mapsto \langle \mathrm{L}, q_\tau^h \rangle$ induit une application $\mathcal{L}_1(\mathrm{Y}) \to \mathcal{L}_2(\mathrm{Y})$.
– Pour la réciproque, on part d'un élément (L, q) de $\mathrm{P}_2(\mathrm{Y})$, on fixe une métrique hermitienne h sur L et on construit par la dualité induite par h un morphisme $\tau : \sigma^*\mathrm{L} \to \mathrm{L}$ tel que $q = h \circ 1 \otimes \overline{\tau}$. Cela définit un morphisme $\mathcal{L}_2(\mathrm{Y}) \to \mathcal{L}_1(\mathrm{Y})$, inverse de celui construit ci-dessus. [10]

□

Soit Y une G-variété. Notons S l'ensemble $\pi_0(\mathrm{Y}^\mathrm{G})$ des composantes connexes par arcs de Y^G, le *lieu réel* de Y. On identifie $\mathrm{H}^0(\mathrm{Y}^\mathrm{G}, \mathbb{Z}^\times)$ à $(\mathbb{Z}^\times)^\mathrm{S}$. On observe que si Y^G est vu comme une G-variété par l'action triviale de G,

$$\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Y}^\mathrm{G}, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathrm{H}^n_{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Y}^\mathrm{G}, \mathbb{Z}(2)) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Y}^\mathrm{G} \times_\mathrm{G} \mathrm{EG}, \mathbb{Z}(2)) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Y}^\mathrm{G} \times \mathrm{BG}, \mathbb{Z}(2)).$$

Comme $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, $\mathrm{BG} = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{H}^0(\mathrm{BG}, \mathbb{Z}(2)) = \mathbb{Z}(2)$ et $\mathrm{H}^2(\mathrm{BG}, \mathbb{Z}(2)) = \mathbb{Z}^\times$. Il résulte alors de la formule de Künneth que

$$\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Y}^\mathrm{G}, \underline{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{Z}^\times)^\mathrm{S} \oplus \mathrm{H}^2(\mathrm{Y}^\mathrm{G}, \mathbb{Z}(2)).$$

On construit alors un morphisme de $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{Y}, \underline{\mathbb{Z}})$ vers $(\mathrm{Z}^\times)^\mathrm{S}$ en considérant la composition suivante :

$$\aleph : \mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{Y}, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Y}, \underline{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Y}^\mathrm{G}, \underline{\mathbb{Z}}) \to (\mathbb{Z}^\times)^\mathrm{S},$$

où le morphisme $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Y}, \underline{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Y}^\mathrm{G}, \underline{\mathbb{Z}})$ est donné par fonctorialité équivariante (l'inclusion de Y^G dans Y est équivariante), le morphisme $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Y}^\mathrm{G}, \underline{\mathbb{Z}}) \to (\mathbb{Z}^\times)^\mathrm{S}$ est la deuxième projection.

Le morphisme $\aleph$ a l'interprétation géométrique suivante. Si (L, q) est un élément de $\mathrm{P}_2(\mathrm{Y})$, la forme q se restreint en une forme hermitienne non dégénérée sur Y^G qui possède une signature $\aleph_{\langle \mathrm{L}, q\rangle}$: c'est une fonction localement constante de Y^G vers $\{\pm 1\}$, c'est-à-dire un élément de $(\mathrm{Z}^\times)^\mathrm{S}$, et il est facile de vérifier que $\aleph$ et $\langle \mathrm{L}, q\rangle \mapsto \aleph_{\langle \mathrm{L}, q\rangle}$ coïncide modulo l'isomorphisme $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{Y}, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \mathcal{L}_2(\mathrm{Y})$. [11] Cette observation justifie la terminologie employée dans la définition suivante.

Définition 1.9. On appelle $\aleph : \mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{Y}, \underline{\mathbb{Z}}) \to (\mathbb{Z}^\times)^\mathrm{S}$ la *signature équivariante* de Y. L'image $\aleph_{\mathrm{tor}}(\mathrm{Y})$ du sous-groupe de $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Y}, \underline{\mathbb{Z}})$ des éléments de torsion est le *groupe de signature équivariant* de Y. Lorsque Y est de la forme $\mathrm{X}(\mathbb{C})$ muni de la conjugaison, de sorte que $\mathrm{S} = \pi_0(\mathrm{X}(\mathbb{R}))$, on note plus simplement $\aleph_{\mathrm{tor}}(\mathrm{X})$ pour $\aleph(\mathrm{Y})$.

Exemple 1.10. Supposons que X soit une courbe algébrique réelle projective. Il suit alors de la suite exacte longue de la paire $(\mathrm{EG} \times_\mathrm{G} \mathrm{X}(\mathbb{C}), \mathrm{BG} \times \mathrm{X}(\mathbb{C}))$ que le morphisme $\aleph$ est un isomorphisme. [12] Ainsi, comme le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(\mathrm{X})$ s'identifie à $(\mathbb{Z}^\times)^\mathrm{S}$ d'après un résultat de Witt (*cf.* [Wit34]), on dispose d'identifications naturelles

$$\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}), \underline{\mathbb{Z}}) = (\mathbb{Z}^\times)^\mathrm{S} = \mathrm{B}(\mathrm{X})$$

par le moyen de $\aleph$.

2. Le groupe $\mathrm{H}^2_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$

Rappelons que la définition de la cohomologie de Deligne en tant que cohomologie d'un (translaté d'un) cône fournit un diagramme commutatif de la forme suivante :

9. À supposer que la classe de (L, q_τ^h) ne dépende pas de h, ce que l'auteur n'a pas pu vérifier.

10. Pour le vérifier, il faudrait établir que τ ainsi construit est continu la classe de (L, τ) pour $\sim_1$. L'auteur est confiant de la véracité de la deuxième assertion sous l'hypothèse que la première est vraie, bien qu'il ne l'ait pas vérifié ; il n'a pas su prouver la première.

11. Du moins, c'est ce qu'affirme [SL11], nous ne sommes pas parvenu à le vérifier.

12. Nous ne somme pas parvenu à écrire les détails. Le conoyau de $\aleph$ est contrôlé par $\mathrm{H}^3(\mathrm{EG} \times_\mathrm{G} \mathrm{X}(\mathbb{C}), \mathrm{BG} \times \mathrm{X}(\mathbb{C}))$, ce qui explique peut-être la surjectivité de $\aleph$ car X est une courbe, mais nous n'avons pas d'idée pour l'injectivité.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}_{\mathrm{B}}^{n,p}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}}) \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{H}^n_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(p))\mathrm{G} \arrow[d, "j"] \\
\mathrm{H}^n_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(\mathrm{X},\mathbb{Z}(p)) \arrow[ur, "\rho"] \arrow[r, "\nu"] & \mathrm{H}_{\mathrm{B}}^{n,p}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}}) \oplus \mathrm{F}^p\mathrm{H}^n_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{C})^{\mathrm{G}} \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & \mathrm{H}^n_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{C})^{\mathrm{G}} \\
 & \mathrm{F}^p\mathrm{H}^n_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{C})^{\mathrm{G}} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

où $\rho : \mathrm{H}^n_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(\mathrm{X},\mathbb{Z}(p)) \to \mathrm{H}_Br^{n,p}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}})$ est l'application de classe de la cohomologie de Deligne vers la cohomologie de Bredon, dont la ligne du milieu est exacte. La filtration de Hodge $\mathrm{F}^p\mathrm{H}^n_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ induit un sous-groupe

$$\mathrm{F}^p\mathrm{H}^{n,p}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}}) = \varphi^{-1}j^{-1}\mathrm{F}^p\mathrm{H}^n_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{C})^{\mathrm{G}}.$$

Nous considérons le cas $n = p = 2$.

Proposition 2.1. *Pour toute variété algébrique réelle projective lisse* X*, on a*

$$\mathrm{F}^2\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) = \mathrm{Im}(\rho) = \mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tor}},$$

le dernier groupe dénotant le sous-groupe de torsion de $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}})$*. En particulier, l'image du morphisme*

$$\Psi : \mathrm{H}^n_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(\mathrm{X},\underline{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{H}_Br^{n,p}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\aleph} \mathrm{H}^0(\mathrm{X}(\mathbb{R}),\mathbb{Z}^\times)$$

est égale à $\aleph_{\mathrm{tor}}(\mathrm{X})$*.*

Démonstration. L'égalité $\mathrm{F}^2\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) = \mathrm{Im}(\rho)$ provient de l'exactitude de la ligne du milieu du diagramme.

Pour la suivante, on constate qu'on peut décomposer $j \circ \varphi$ selon

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^2_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(\mathrm{X},\mathbb{Z}(2)) \arrow[r, "j\circ\varphi"] \arrow[d] & \mathrm{H}^n_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{C})^{\mathrm{G}} \\
\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}})/\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tor}} \arrow[d, hook] & \\
\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, hook] & \mathrm{H}^2_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Q} \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

car le dernier membre est un sous-groupe d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, qui n'a donc pas de torsion. Ici, l'injectivité de la flèche

$$\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathrm{H}^2_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(2))$$

provient de l'isomorphisme $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}}) = \mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Bor}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}})$ et de faits bien connus de la cohomologie équivariante.[13] Mais

$$\mathrm{H}^2_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Q} \cap \mathrm{F}^2\mathrm{H}^2(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{C}) = 0.$$

En effet, les éléments de $\mathrm{H}^2_{\mathrm{sing}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(2))$ qui appartiennent à $\mathrm{F}^2\mathrm{H}^2(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ appartiennent aussi au conjugué $\overline{\mathrm{F}^2\mathrm{H}^2(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{C})}$ donc sont de torsion et donnent ainsi 0 après tensorisation par $\mathbb{Q}$. On en conclut que

$$(j\circ\varphi)^{-1}\mathrm{F}^2\mathrm{H}^2(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\mathbb{C})^{\mathrm{G}} = \mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}),\underline{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tor}}.$$

Cela achève la démonstration. □

Nous allons désormais donner une description géométrique du noyau de la flèche

$$\Psi : \mathrm{H}^2_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(\mathrm{X},2) \to \aleph_{\mathrm{tor}}(\mathrm{X}).$$

Nous introduisons l'ensemble des couples (L,∇,q) où :

13. L'article [SL11] ne donne pas davantage de détails.

– L est un fibré en droites holomorphes sur $\mathrm{X}(\mathbb{C})$;
– ∇ est une connexion holomorphe sur L, c'est-à-dire un morphisme $\nabla : \mathrm{L} \to \mathrm{L} \otimes \Omega^1$ de fibrés vectoriels tel que $\nabla(fs) = s \otimes \partial f + f\nabla s$ pour toute fonction holomorphe f et toute section s définies sur un ouvert de X ;
– $q : \mathrm{L} \otimes \overline{\sigma^* \mathrm{L}} \to \mathbf{1}_\mathrm{Y}$ est un isomorphisme holomorphe de fibrés Réels.

Ces données sont assujetties aux conditions suivantes.
– La restriction de q à $\mathrm{L}_{\mathrm{X}(\mathbb{R})}$ est une métrique hermitienne définie positive.
– En tant que section du fibré $\mathrm{M} = (\mathrm{L} \otimes \overline{\sigma^*\mathrm{L}})^\vee$, q est parallèle à la connexion $\widetilde{\nabla}$ sur M induite par ∇ : $\widetilde{\nabla} q = 0$.

Un morphisme $f : (\mathrm{L}, \nabla, q) \to (\mathrm{L}', \nabla', q')$ entre tels triplets est un morphisme $f : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ de fibrés en droites tel que $q' \circ (f \otimes \overline{\sigma^* q}) = q$ et $\nabla' \circ f = (1 \otimes f) \circ \nabla$.

Définition 2.2. On note $\mathrm{PW}^\nabla(\mathrm{X})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets (L, ∇, q) comme ci-dessus. C'est un groupe pour la loi $\odot$ donnée par

$$\langle \mathrm{L}, \nabla, q\rangle \odot \langle \mathrm{L}', \nabla', q'\rangle = \langle \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}', \nabla \otimes 1 + 1 \otimes \nabla, q \cdot q'\rangle.$$

On appelle $\mathrm{PW}^\nabla(\mathrm{X})$ le *groupe de Picard–Witt différentiel* de X.

Remarque. La formule $\nabla \otimes 1 + 1 \otimes \nabla$ définit le produit des connexions ∇ et ∇' : c'est une connexion sur le produit tensoriel des fibrés en droites sous-jacents à ∇ et ∇'.

Remarque. On peut de façon analogue au cas du groupe de cohomologie $\mathrm{H}^{2,2}_{\mathrm{Br}}(\mathrm{X}(\mathbb{C}), \underline{\mathbb{Z}})$ donner une interprétation du groupe $\mathrm{PW}^\nabla(\mathrm{X})$ en termes de cohomologie de $\mathrm{X}(\mathbb{C})_{\text{éq}}$ à valeurs dans un certain complexe $\mathcal{P}^*$ de préfaisceaux sur la catégorie des variétés holomorphes réelles (c'est-à-dire munis d'une involution antiholomorphe). Si U est une variété holomorphe réelle, on pose

$$\mathcal{P}^0(\mathrm{U}) = \mathcal{O}^*_\mathbb{C}(\mathrm{U}) = \{f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}^* \text{ holomorphe}\}$$

et

$$\mathcal{P}^1(\mathrm{U}) = \Omega^1_\mathbb{C}(\mathrm{U}) \oplus \mathcal{O}^*_{\mathbb{R}_+}(\mathrm{U})$$

où $\Omega^1_\mathbb{C}(\mathrm{U})$ désigne le groupe des 1-formes holomorphes et $\mathcal{O}^*_{\mathbb{R}_+}(\mathrm{U})$, le sous-groupe de $\mathcal{O}^*_\mathbb{C}(\mathrm{U})$ formé par les fonctions $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}^*$ qui sont holomorphes Réelles, c'est-à-dire que $f = \overline{\sigma^* f}$, qui sont strictement positives sur le lieu réel U^G ; en outre, on pose $D(g) = (\frac{dg}{g}, g \cdot \overline{\sigma^* g}) \in \mathcal{P}^1(\mathrm{U})$ pour tout $g \in \mathcal{P}^0(\mathrm{U})$. Enfin, on définit

$$\mathcal{P}^2(\mathrm{U}) = \Omega^1_\mathbb{R}(\mathrm{U}) = \{\psi \in \Omega^1_\mathbb{C}(\mathrm{U}), \psi = \overline{\sigma^* \psi}\}$$

et on pose $D(\psi, f) = \psi + \overline{\sigma^* \psi} - \frac{df}{f}$. Alors, $D^2 = 0$ et $\mathrm{PW}^\nabla(\mathrm{X})$ s'identifie au groupe $\check{\mathbb{H}}^1(\mathrm{X}(\mathbb{C})_{\text{éq}}, \mathcal{P}^*)$.

Le théorème est alors le suivant.

Théorème 2.3. *Si* X *est une variété algébrique réelle projective lisse, alors on a une suite exacte courte*

$$0 \to \mathrm{PW}^\nabla(\mathrm{X}) \to \mathrm{H}^2_{\mathcal{D}/\mathbb{R}}(\mathrm{X}, \mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\Psi} \aleph_{\mathrm{tor}}(\mathrm{X}) \to 0$$

de groupes abéliens.

Démonstration. La preuve consiste à construire explicitement des cocycles de Čech satisfaisant aux conditions requises pour l'exactitude, notamment à l'aide de l'argument d'obstruction locale ([SL11, Lemma B.4]) qui établit l'acyclicité du complexe de Bredon dans certain cas et de ses dérivés pour les complexes définissant la cohomologie de Deligne, voir [SL11, Appendix B]. □

Bibliographie

[Bre67] Glen E. Bredon. « Equivariant cohomology theories ». In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 73.2 (1967), p. 266–268 (cf. p. 4).

[Oli20] Olivier Benoist et Olivier Wittenberg. « On the integral Hodge conjecture for real varieties, I ». In : *Invent. math.* 222 (2020), p. 1–77 (cf. p. 4).

[San03] Pedro F. dos Santos. « A note on the equivariant Dold–Thom theorem ». In : *J. Pure Appl. Algebra* 183 (2003), p. 973–1022 (cf. p. 4).

[SL11] Pedro F. dos Santos et Paulo Lima-Filho. « Integral Deligne cohomology for real varieties ». In : *Math. Ann.* 350.4 (2011), p. 973–1022 (cf. p. 4, 7–9).

[Wit34] Ernst Witt. « Zerlegung reeler algebraischer Funktionen in Quadrate, Schiefkörper über reellem Funktionenk¨orper ». In : *J. reine angew. Math.* 171 (1934), p. 4–11 (cf. p. 7).