Table des matières

Spectre réel et site réel étale ; théorème de comparaison de Coste–Coste-Roy

1. Corps ordonnés

L'exposition suit essentiellement [BCR87]. Les trois premières sous-sections décrivent la théorie d'Artin–Schreier.

1.1 Ordre sur un corps ; corps réels

Notation 1.1.1. Si E est une partie d'un groupe abélien G noté additivement, nous posons $-\mathrm{E} = \{-x, x \in \mathrm{E}\}$.

Ordre sur un anneau.

Définition 1.1.2. Un *anneau ordonné* est un anneau A muni d'un ordre total $\leqslant$ possédant les propriétés suivantes :

- si x et y sont des éléments de F tels que $x \leqslant y$, alors $x + z \leqslant y + z$ pour tout z appartenant à F ;
- si $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$, alors $0 \leqslant xy$.

Un élément x de A tel que $0 \leqslant x$ (respectivement $0 < x$) est un élément *positif* (respectivement *strictement* positif) de A ; un élément x de A est *négatif* (respectivement *strictement* négatif) si $-x$ est positif (respectivement strictement positif). Un *corps ordonné* est un anneau ordonné dont l'anneau sous-jacent est un corps.

Remarque. Lorsque nous parlons d'ordre sur un anneau, il s'agit toujours implicitement d'ordre en faisant un anneau ordonné, c'est-à-dire possédant les propriétés énoncées dans la définition.

Remarque. Un élément x de A est négatif si, et seulement si, $x \leqslant 0$. En effet, si x est négatif, alors $0 \leqslant -x$ donc $x \leqslant 0$ en ajoutant x aux deux membres de cette inégalité et si $x \leqslant 0$, alors $0 \leqslant -x$ en ajoutant $-x$ aux deux membres donc $-x$ est positif de sorte que x est négatif.

Lemme 1.1.3. *Soit* $(\mathrm{A}, \leqslant)$ *un anneau ordonné.*

1. *Si* $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A}$*, alors* $a \leqslant b$ *si, et seulement si,* $0 \leqslant b - a$.
2. *La somme d'éléments positifs de* A *est positive ; elle est strictement positive si l'un des éléments l'est ; si* $a \leqslant b$ *et* $c \leqslant d$*, alors* $a + c \leqslant b + d$ *: en particulier,* $x \leqslant x + y$ *pour tout* y *positif.*
3. *Supposons* $\mathrm{A} \setminus \{0\}$ *stable par* $x \mapsto x^2$*. Pour tout* $x \in \mathrm{A} \setminus \{0\}$, $0 < x^2$.
4. *Soit* $(a, b, c) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \mathrm{A}$ *tel que* $a \leqslant b$ *et* $0 \leqslant c$*. Alors,* $ac \leqslant bc$.
5. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et soit* $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *tel que* $0 \leqslant a \leqslant b$*. Alors,* $0 \leqslant a^n \leqslant b^n$*. Si* $0 < a < b$ *et si* a *et* b *ne sont pas diviseurs de* 0*, alors* $a^n < b^n$.
6. *Soit* $a \in \mathrm{A}^{\times}$*. Alors,* $0 < a$ *si, et seulement si,* $0 < a^{-1}$.
7. *Soit* $x \in \mathrm{A}$ *non diviseur de zéro tel que* $0 < x$ *et soit* $y \in \mathrm{A}$*. Alors,* y *est positif si, et seulement si,* yx *est positif.*

Démonstration. On sépare les assertions à établir.

1. Si $a \leqslant b$, alors $0 = a + (-a) \leqslant b + (-a) = b - a$; si $0 \leqslant b - a$, alors $a = 0 + a \leqslant b - a + a = b$.
2. Si $0 \leqslant y$ et $0 \leqslant x$, alors $0 \leqslant y = 0 + y \leqslant x + y$ donc $0 \leqslant x + y$ par transitivité ; si x ou y est non nul, alors l'une des inégalités est stricte donc $0 < x + y$. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c)$ est positif comme somme de termes positifs.
3. Si $0 < x$, alors $0 \leqslant x^2$ par produit tandis que x^2 est non nul par hypothèse. Sinon, $x < 0$ donc $0 < -x$ de sorte que $0 < (-x)^2 = x^2$.
4. En effet, $0 \leqslant c$ et $0 \leqslant b - a$ donc $0 \leqslant c(b - a) = bc - ac$ de sorte que $ac \leqslant bc$.
5. On peut supposer n supérieur ou égal à 2. Les éléments a^n et b^n de A sont positifs comme produit d'éléments positifs ; en outre,
$$b^n - a^n = (b - a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (b - a)x$$
où x est positif comme somme et produit de termes positifs et où $b - a$ est positif par hypothèse donc $b^n - a^n$ est positif, c'est-à-dire que $a^n \leqslant b^n$. Si $0 < a < b$ et si a et b ne sont pas diviseurs de zéro, alors $0 < a^{n-1}b \leqslant x$ donc $(b - a)a^{n-1}b \leqslant (b - a)x = b^n - a^n$ et $0 \neq (b - a)a^{n-1}b$ par hypothèse donc $0 < b^n - a^n$.
6. Supposons $0 < a$ — en particulier, A est non nul — ; si $a^{-1} < 0$, alors $0 < -a^{-1}$ donc $0 < -1$ de sorte que $1 < 0$: contradiction car $0 < 1$. La réciproque suit car $(a^{-1})^{-1} = a$.
7. Le sens direct résulte de ce que x est positif et du fait que l'ensemble des éléments positifs est stable par produit. Supposons que $y < 0$; alors, $0 < -y$ donc $0 < x(-y) = -(xy)$ de sorte que $xy < 0$.

□

Cônes. Il résulte de l'assertion du premier item du lemme 1.1.3 que l'ordre d'un anneau ordonné est entièrement déterminé par les éléments positifs pour icelui : on définit ainsi souvent l'ordre sur un anneau A en prescrivant les éléments positifs. Il est naturel de se demander à quelle condition la donnée d'un sous-ensemble P d'un anneau A induit un ordre $\leqslant$ dont les éléments positifs sont les éléments de P et déterminé par $x \leqslant y$ lorsque $y - x \in \mathrm{P}$. La notion de *cône* répond à cette interrogation :

Définition 1.1.4. Soit F un corps. Un *cône* de P est une partie d'un anneau P possédant les propriétés suivantes :
(i) pour tout $(x, y) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}$, $x + y$ appartient à P ;
(ii) pour tout $(x, y) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}$, xy appartient à P ;
(iii) pour tout $x \in \mathrm{F}$, x^2 appartient à P.
C'est donc un sous-ensemble de F est stable par somme et produit et contenant les carrés. On dit que le cône P est *propre* lorsqu'il possède en outre la propriété suivante :
(iv) l'élément -1 de F n'appartient pas à P.

Lemme 1.1.5. *Soit* F *un corps et soit* P *un cône de* F. *Les assertions suivantes sont alors équivalentes.*

1. *On a* $\mathrm{P} \cap (-\mathrm{P}) = \{0\}$.
2. *L'élément* -1 *de* F *n'appartient pas à* P.

Démonstration. Si $\mathrm{P} \cap (-\mathrm{P}) = \{0\}$, alors $-1 \notin \mathrm{P}$ puisque $0 \neq 1 = 1^2 \in \mathrm{P}$. Supposons que A soit un corps ; si $x \in \mathrm{P} \cap (-\mathrm{P}) \setminus \{0\}$, alors $-x^2 \in \mathrm{P}$ donc $-x^2 \in \mathrm{Q}$ de sorte que $-1 = (-x^2)x^{-2} \in \mathrm{P}$ si $x \neq 0$. □

Remarque. Soit F un corps. Si $2 = 0$ dans F, alors $-1 = 1 = 1^2 \in \mathrm{P} \cap -\mathrm{P}$ pour tout cône P de F donc F ne possède pas de cône propre. Excluant ce cas, les cônes propres sont exactement les cônes de F distincts de F. En effet, si P = F, alors P n'est bien sûr pas propre. Si P n'est pas propre, alors $-1 \in \mathrm{P}$ donc pour tout $a \in \mathrm{F}$,

$$a = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + (-1)\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

est un élément de P. Cela justifie la terminologie de *propre*.

Proposition 1.1.6 ([BCR87, Proposition et Définition 1.1.4])**.** *Soit* F *un corps.*

- *Soit* $\leqslant$ *un ordre sur le corps* F *; posons* $\mathrm{P} = \{a \in \mathrm{F}, 0 \leqslant a\}$. *L'ensemble* P *est alors un cône propre de* F *possédant la propriété suivante :* $\mathrm{P} \cup (-\mathrm{P}) = \mathrm{F}$. *On l'appelle le* cône positif *de* $(\mathrm{F}, \leqslant)$ *ou de* $\leqslant$ *ou même, abusivement, de* F *lorsque l'ordre* $\leqslant$ *est clair par le contexte.*
- *Soit* P *un cône propre sur* F *tel que* $\mathrm{P} \cup (-\mathrm{P}) = \mathrm{F}$. *La relation* $\leqslant$ *définie sur* F *par* $x \leqslant y$ *lorsque* $y - x \in \mathrm{P}$ *est alors un ordre sur* F *; le couple* $(\mathrm{F}, \leqslant)$ *est un anneau ordonné dont* P *est le cône positif.*

Démonstration. On reprend ces données.

- Si $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$, alors $0 \leqslant y = 0 + y \leqslant x + y$ tandis que $0 \leqslant xy$ par définition : ainsi, P est stable par somme et produit. On sait aussi que les carrés de F appartiennent à P : c'est donc un cône de F. En outre, $0 < 1$ car F est non nul et $1 = 1^2$ est un carré donc $-1 < 0$ en ajoutant -1 aux membres de cette inégalité, de sorte que $-1 \in \mathrm{P}$. Le cône P est donc propre. L'égalité $\mathrm{P} \cup (-\mathrm{P}) = \mathrm{F}$ suit de ce que l'ordre $\leqslant$ est total.
- Vérifions que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre.
  - Elle est réflexive car si $x \in \mathrm{F}$, alors $x - x = 0 = 0^2 \in \mathrm{P}$ donc $x \leqslant x$.
  - Elle est symétrique : si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x - y \in \mathrm{P} \cap (-\mathrm{P}) = \{0\}$ donc $x = y$.
  - Elle est transitive : si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $z - x = (z - y) - (y - x) \in \mathrm{P}$.

  En outre, elle est totale ; il suffit en effet de montrer que tout élément z de F vérifie $0 \leqslant z$ ou $z \leqslant 0$: cela résulte de l'hypothèse selon laquelle $\mathrm{P} \cup -\mathrm{P} = \mathrm{F}$. Enfin, l'ordre $\leqslant$ fait de F un anneau ordonné : en effet, si $x \leqslant y$, alors $(y+z) - (x+z) = y - x \in \mathrm{P}$ pour tout $z \in \mathrm{F}$; de plus, si $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$, alors x et y appartiennent à P donc xy appartient à P de sorte que $0 \leqslant xy$. On a par définition $0 \leqslant x$ si, et seulement si, $x \in \mathrm{P}$ donc P est bien le cône positif de $(\mathrm{F}, \leqslant)$.

$\square$

Exemple 1.1.7. Soit A un anneau ordonné. Tout sous-anneau de A muni de l'ordre induit est alors un anneau ordonné.

Exemple 1.1.8. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels muni de l'ordre usuel est un corps ordonné : c'est donc le cas de tout sous-corps de $\mathbb{R}$ muni de l'ordre induit, par exemple le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

L'ordre $\leqslant$ usuel sur $\mathbb{R}$ est d'ailleurs le seul ordre munissant $\mathbb{R}$ d'une structure de corps ordonné. En effet, soit $\preccurlyeq$ un tel ordre. Il suffit de montrer qu'un nombre réel x vérifie $0 \leqslant x$ si, et seulement si, il vérifie $0 \preccurlyeq x$. Or, si $0 \leqslant x$, alors x est un carré donc $0 \preccurlyeq x$; si $x < 0$, alors $0 < -x$ donc $-x$ est un carré de sorte que $0 \prec -x$: il s'ensuit que $x \prec 0$.

Exemple 1.1.9 ([BCR87, Exemple 1.1.2])**.** Si $\mathrm{P}(t)$ est un élément non nul de $\mathbb{R}[t]$, on note $\nu(\mathrm{P}(t))$ la valuation de $\mathrm{P}(t)$ et $\varphi(\mathrm{P}(t))$ le premier coefficient non nul de $\mathrm{P}(t)$. La fonction $\varphi : \mathbb{R}[t] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes.

- Si $\mathrm{P}(t)$ et $\mathrm{Q}(t)$ sont des éléments non nuls de $\mathbb{R}[t]$, alors $\varphi(\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)) = \varphi(\mathrm{P}(t))\varphi(\mathrm{Q}(t))$.
- Soient $\mathrm{P}(t)$ et $\mathrm{Q}(t)$ des éléments non nuls de $\mathbb{R}[t]$.
  - Si $\nu(\mathrm{P}(t)) < \nu(\mathrm{Q}(t))$, alors $\varphi(\mathrm{P}(t) + \mathrm{Q}(t)) = \varphi(\mathrm{P}(t))$.
  - Si $\nu(\mathrm{Q}(t)) < \nu(\mathrm{P}(t))$, alors $\varphi(\mathrm{P}(t) + \mathrm{Q}(t)) = \varphi(\mathrm{Q}(t))$.
  - Si $\nu(\mathrm{Q}(t)) = \nu(\mathrm{P}(t))$ et si $\varphi(\mathrm{P}(t)) + \varphi(\mathrm{Q}(t))$ est non nul, alors $\varphi(\mathrm{P}(t) + \mathrm{Q}(t)) = \varphi(\mathrm{P}(t)) + \varphi(\mathrm{Q}(t))$.

  En particulier, si $0 < \varphi(\mathrm{P}(t))$ et $0 < \varphi(\mathrm{Q}(t))$, alors $0 < \varphi(\mathrm{P}(t) + \mathrm{Q}(t))$.
- Soit $\mathrm{P}(t) \in \mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$. Alors, $\varphi(-\mathrm{P}(t)) = -\varphi(\mathrm{P}(t))$.

On pose aussi $\varphi(0) = 0$: les identités précédentes s'étendent au cas où P ou Q est nul.

Considérons le sous-ensemble P de $\mathbb{R}[t]$ défini comme suit : $f(t) \in \mathrm{P}$ lorsque $0 \leqslant \varphi(f(t))$. Posons $\mathrm{Q} = \{\frac{f(t)}{g(t)}, (f(t), g(t)) \in \mathrm{P} \times (\mathrm{P} \setminus \{0\})\} \subseteq \mathbb{R}(t)$. Montrons que Q est un cône propre tel que $\mathrm{Q} \cup -\mathrm{Q} = \mathbb{R}(t)$. Comme $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathbb{R}[t]$, Q est stable par produit ; en outre, si $(f, g) \in \mathrm{P}$, alors $\varphi(f(t) + g(t)) \in \{\varphi(f), \varphi(g), \varphi(f + g)\}$ donc $f + g \in \mathrm{P}$: ainsi, Q est stable par produit. Par ailleurs, $\varphi(f^2) = \varphi(f)^2$ pour tout $f \in \mathbb{R}[t]$ donc $f^2 \in \mathrm{P}$, ce qui implique que Q contient les carrés. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\frac{f}{g} \in (\mathrm{Q} \cap -\mathrm{Q}) \setminus \{0\}$; quitte à multiplier par g^2, on peut supposer que $\frac{f}{g} = f \in \mathbb{R}[t]$. Alors, $0 < \varphi(f)$ et $0 < \varphi(-f) = -\varphi(f)$ dans $\mathbb{R}$: contradiction. Enfin, si $f \in \mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$, alors $0 < \varphi(f)$ donc $f \in \mathrm{P}$ ou $0 < -\varphi(f) = \varphi(-f)$ donc $f \in -\mathrm{P}$: par conséquent, $\mathrm{Q} \cup -\mathrm{Q} = \mathbb{R}(t)$. On déduit de Q un ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}(t)$.

Lemme 1.1.10. *La relation $\leqslant$ est l'unique relation d'ordre sur le corps $\mathbb{R}(t)$ possédant les propriétés suivantes : $0 < t$ et $t < a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. Soit $\preccurlyeq$ une telle relation d'ordre. Il suffit de montrer que $\preccurlyeq$ admet les mêmes éléments strictement positifs que la relation $\leqslant$ construite précédemment ; pour cela, puisque pour tout $f \in \mathbb{R}(t)$, il existe $g \in \mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$ tel que $fg^2 \in \mathbb{R}[t]$, il suffit de considérer les éléments de $\mathbb{R}(t)$. Notons tout d'abord que les relations $\leqslant$ et $\preccurlyeq$ induisent sur $\mathbb{R}$ un ordre qui en fait un corps ordonné : par conséquent, leurs restrictions coïncident avec l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \geqslant 1$. Alors, $t \prec \sqrt[n]{a}$ donc $t^n \prec a$. En appliquant cette inégalité à $\frac{a}{b}$ où $b \in \mathbb{R}_+^*$, on voit que $bt^n \prec a$ pour tout $b \in \mathbb{R}$: en effet, si $b \in \mathbb{R}_-$, alors $b \preccurlyeq 0$ donc $bt^n \preccurlyeq 0 \prec a$. Enfin, en appliquant l'inégalité $t^n \prec a$ à $a = \frac{1}{d}$, on voit que pour tout $\mathrm{P} \in t\mathbb{R}[t]$ de degré d, $\mathrm{P}(t) < d \cdot \frac{1}{d} = 1$ en sommant les inégalités obtenus précédemment. Soit alors $\mathrm{P}(t) \in \mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$. On écrit $\mathrm{P}(t) = at^\nu(1 - tp(t))$ où $p(t) \in \mathbb{R}[t]$: par définition, $\varphi(\mathrm{P}(t)) = a$ et $\varphi(1 - tp(t)) = 1$ donc $0 < 1 - tp(t)$ et $0 \prec 1 - tp(t)$ vu le raisonnement précédent ; par ailleurs, $0 < t$ et $0 \prec t$ donc $0 < t^\nu$ et $0 \prec t^\nu$. Ainsi, $0 \prec \mathrm{P}(t)$ si, et seulement si, $0 \prec a$: comme a est un nombre réel, il est équivalent de demander que a appartienne à $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire que $0 < \mathrm{P}(t)$ comme annoncé. $\square$

Le corps $\mathbb{R}(t)$ n'est pas archimédien : t est inférieur à $\frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$ — t est « infiniment petit » — et $n \leqslant \frac{1}{t}$ pour tout n — $\frac{1}{t}$ est « infiniment grand ».

Soit désormais $\preccurlyeq$ un ordre quelconque faisant sur le corps $\mathbb{R}(t)$. L'ordre $\preccurlyeq$ induit une *coupure* (I, J) de $\mathbb{R}$ [1] donnée par $\mathrm{I} = \{x \in \mathbb{R}, x \prec t\}$ et $\mathrm{J} = \{x \in \mathbb{R}, t \prec x\}$: le terme coupure signifie que I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $x < y$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$, $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \emptyset$ et $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = \mathbb{R}$ [2]. Le couple (I, J) est de la forme $(\emptyset, \mathbb{R})$, $(]-\infty, a[, [a, +\infty[)$ où $a \in \mathbb{R}$, $(]-\infty, a],]a, +\infty[)$ où $a \in \mathbb{R}$ ou $(\mathbb{R}, \emptyset)$: on note ces coupures $-\infty$, a_-, a_+ et $+\infty$ respectivement. La coupure correspondant à l'ordre $\leqslant$ construit ci-dessus est 0_-, par exemple.

Supposons que $\preccurlyeq$ détermine la coupure $-\infty$ (respectivement a_-, respectivement a_+, respectivement $+\infty$). Par le changement de variables $u = -\frac{1}{t}$ (respectivement $u = a - t$, respectivement $u = t - a$, respectivement $u = \frac{1}{t}$), $\preccurlyeq$ induit l'ordre $\leqslant$ précédent sur $\mathbb{R}(u)$: il résulte alors du lemme qu'il existe *au plus* un ordre sur $\mathbb{R}(t)$ induisant la coupure $-\infty$ (respectivement a_-, respectivement a_+, respectivement $+\infty$). Or, si on décrète que $f \preccurlyeq g$ lorsque $f(u) \leqslant g(u)$, alors on obtient un ordre $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}(t)$ qui induit la coupure $-\infty$ (respectivement a_-, respectivement a_+, respectivement $+\infty$). Finalement :

Proposition 1.1.11. *L'application qui à un ordre $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}(t)$ associe $(\{x \in \mathbb{R}, x \prec t\}, \{x \in \mathbb{R}, t \prec x\})$ induit une bijection de l'ensemble des structures de corps ordonné sur $\mathbb{R}(t)$ sur l'ensemble $\{\pm\infty\} \cup \{a_\pm, a \in \mathbb{R}\}$ des coupures de $\mathbb{R}$.*

Corps réels.

Notation 1.1.12. Soit F un corps. On note $\sum \mathrm{F}^2$ l'ensemble des éléments de F de la forme $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ où $x_i \in \mathrm{F}$: c'est un cône de F et il est contenu dans tout cône de F.

Théorème 1.1.13 ([BCR87, Théorème et Définition 1.1.6])**.** *Soit* F *un corps. Les assertions suivantes sont alors équivalentes.*

1. À ceci près qu'on autorise les membres de cette coupure à être vides.
2. Les propriétés énoncées sont redondantes.

1. *Il existe un ordre $\leqslant$ sur* F *faisant de* $(\mathrm{F}, \leqslant)$ *un corps ordonné.*
2. *Le corps* F *possède un cône propre.*
3. *L'élément* -1 *de* F n'appartient pas *à* $\sum \mathrm{F}^2$*.*
4. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *et si* $(x_1, \ldots, x_n)$ *est une famille d'éléments de* F *telle que* $\sum x_i^2 = 0$*, alors* $x_i = 0$ *pour tout* i*.*

On commence par un lemme et un corollaire.

Lemme 1.1.14 ([BCR87, Lemme 1.1.7 (i)])**.** *Soit* F *un corps et soit* P *un cône propre de* F*. Soit* $a \in \mathrm{F}$ *tel que* $-a \notin \mathrm{P}$*. L'ensemble* $\mathrm{P}[a] = \{x + ay, (x, y) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}\}$ *est alors un cône propre de* F*.*

Démonstration. La stabilité par somme est évidente, ainsi que le fait que $\mathrm{P}[a]$ contienne $\sum \mathrm{F}^2$ puisque $\sum \mathrm{F}^2 \subseteq \mathrm{P}$ et $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{P}[a]$. Si (x, y) et (z, t) appartiennent à $\mathrm{P} \times \mathrm{P}$, alors

$$(x + ay)(z + at) = (xz + a^2yt) + a(xt + zy)$$

où $xz+a^2yt$ et $xt+zy$ appartiennent à P par stabilité de P par somme et produit et d'après l'inclusion $\sum \mathrm{F}^2 \subseteq \mathrm{P}$. Enfin, $\mathrm{P}[a]$ est propre : en effet, si $-1 = x + ay$, alors $y \neq 0$ car $-1 \notin \mathrm{P}$ donc $-a = (-1 - x)y^{-1} = y(1 + x)y^{-2} \in \mathrm{P}$: contradiction donc $-1 \notin \mathrm{P}[a]$. □

Corollaire 1.1.15 ([BCR87, Lemme 1.1.7 (ii)])**.** *Soit* F *un corps et soit* P *un cône propre de* F*. Il existe alors un ordre $\leqslant$ sur* F *en faisant un corps ordonné et tel que* P *est contenu dans le cône positif de* $(\mathrm{F}, \leqslant)$*.*

Démonstration. L'idée est d'agrandir P grâce au lemme précédent jusqu'à ce que $\mathrm{P} \cup (-\mathrm{P})$ soit égal à F. Considérons l'ensemble $\mathscr{E}$ des cônes propres de F contenant P. Cet ensemble est non vide — il contient P — et inductif : si $(\mathrm{P}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une chaîne de cônes propres de F contenant P où I est un ensemble totalement ordonné, alors la réunion P' des P_i est un cône propre de F contenant P. On déduit alors du lemme de Zorn que $\mathscr{E}$ admet un élément maximal Q. Il suffit de prouver que $\mathrm{Q} \cup (-\mathrm{Q}) = \mathrm{F}$: si c'est le cas, alors l'ordre associé à Q par la proposition 1.1.6 admet pour cône positif Q qui contient P. Soit $a \in \mathrm{F}$ tel que $a \notin \mathrm{Q}$; alors, $\mathrm{Q}[-a]$ est un cône propre de F d'après le lemme précédent et il contient Q donc P : par maximalité de Q, il s'ensuit que $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}[-a]$ de sorte que $-a \in \mathrm{Q}$, c'est-à-dire que $a \in -\mathrm{Q}$. □

Montrons désormais le théorème 1.1.13.

Démonstration du théorème 1.1.13. Si $(\mathrm{F}, \leqslant)$ est un corps ordonné, alors $\{x \in \mathrm{F}, 0 \leqslant x\}$ est un cône propre de F.

Supposons que F admette un cône propre P ; alors, $\sum \mathrm{F}^2 \subseteq \mathrm{P}$ donc $-1 \notin \mathrm{F}^2$.

Supposons que -1 n'appartienne pas à $\sum \mathrm{F}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de F telle que $\sum x_i^2 = 0$; si $x_j \neq 0$, alors comme $-x_j^2 = \sum_{i\neq j} x_i^2$, $-1 = \sum_{i\neq j}(\frac{x_i}{x_j})^2$: contradiction. Réciproquement, supposons que l'assertion de l'item 4. soit satisfaite : si $-1 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, alors $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 0$ où $x_{n+1} = 1$. Ainsi, les assertions des items 3. et 4. sont équivalentes.

Il reste à montrer que si $-1 \notin \sum \mathrm{F}^2$, alors F peut être muni d'un ordre en faisant un corps ordonné : or, $\sum \mathrm{F}^2$ est alors un cône propre donc il est contenu dans le cône positif de $(\mathrm{F}, \leqslant)$ pour un ordre $\leqslant$ d'après le corollaire. □

Définition 1.1.16. Un corps vérifiant l'une des (donc toutes les) assertions équivalentes du théorème 1.1.13 est dit *réel*.

Remarque. Soit F un corps de caractéristique $p > 0$. Alors, $-1 = \sum_{i=1}^{p-1} 1^2$ donc F n'est pas réel. Par conséquent, tout corps réel est de caractéristique zéro.

Proposition 1.1.17 ([BCR87, Proposition 1.1.8])**.** *Soit* F *un corps de caractéristique* 0 *et soit* P *un cône de* F*. Alors,* P *est égal à l'intersection des cônes positifs de structures de corps ordonné sur* F *contenant* P*. En particulier, s'il n'existe pas de tel cône, alors* $\mathrm{P} = \mathrm{F}$*.*

Démonstration. Le cône P est contenu dans cette intersection. Si $\mathrm{P} = \mathrm{F}$, alors $-1 \in \mathrm{P}$ donc P n'est pas propre et n'est *a fortiori* contenu dans aucun cône positif de F : ainsi, l'égalité annoncée est vérifiée. Supposons $\mathrm{P} \neq \mathrm{F}$. Comme $a = \frac{1}{4}((a+1)^2 - (a-1)^2)$ pour tout $a \in \mathrm{F}$, l'hypothèse que $\mathrm{P} \neq \mathrm{F}$ implique que P est propre. On sait alors que le cône $\mathrm{P}[-a]$ est propre : il est dès lors contenu dans un cône positif Q de F. Le cône Q contient P et $-a$ donc il ne contient pas a. On en déduit que

$$\mathrm{X} \setminus \mathrm{P} \subseteq \bigcup_{\mathrm{P} \subseteq \mathrm{Q}, \mathrm{Q} \text{ positif}} \mathrm{X} \setminus \mathrm{Q},$$

c'est-à-dire que l'intersection du lemme est contenue dans P, ce qu'il fallait établir. □

Corollaire 1.1.18 ([BCR87, Corollaire 1.1.9])**.** *Soit* F *un corps de caractéristique* 0*. Alors,* $\sum \mathrm{F}^2$ *est l'intersection des cônes positifs de tous les ordres sur* F*.*

Terminons par un résultat de nature apparemment différente mais qui montre que les corps réels sont stables par extension de degré impair :

Proposition 1.1.19 (Artin–Springer, [Kah08, Proposition 1.5.1])**.** *Soit* F *un corps de caractéristique nulle, soit* q *une forme quadratique sur* F *et soit* E/F *une extension de degré (fini) impair. La forme* $q_{\mathrm{E}} = q \otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{E}$ *est alors anisotrope si* q *l'est.*

Démonstration. On peut supposer E/F monogène, soit $\mathrm{E} = \mathrm{F}(\alpha)$. On note f le polynôme minimal de α, n son degré ; on raisonne par récurrence sur n donc on peut supposer $n > 1$. Posons $q = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, c'est-à-dire que $q(x_1, \ldots, x_m) = \sum a_i x_i^2$. Raisonnons par l'absurde et supposons q_{E} isotrope. Il existe alors $(g_1, \ldots, g_m) \in \mathrm{F}[t]^m$ différent de 0 avec $\deg(g_i) < n$ et $h \in \mathrm{F}[t]$ tels que

$$a_1 g_1(t)^2 + \cdots + a_m g_m(t)^2 = f(t)h(t).$$

On peut en outre supposer les g_i premiers entre eux dans leur ensemble.

Notons d le maximum des degrés des g_i. Comme q est anisotrope, la relation ci-dessus montre que $2d = \deg f + \deg h$ — sinon, les coefficients dominants des polynômes g_i de degré d fournissent un zéro non nul de q dans F — donc $\deg h < n$ puisque $d < n$ et $\deg h$ est impair. Il s'ensuit que h possède un facteur irréductible h_1 de degré impair strictement inférieur à n donc q admet un zéro non nul dans le corps $\mathrm{F}[t]/\langle h_1 \rangle$ qui est de degré $\deg h_1$ sur F donc impair strictement inférieur à n : contradiction avec l'hypothèse de récurrence. □

Corollaire 1.1.20. *Une extension de degré impair d'un corps réel est réelle.*

Démonstration. Le fait qu'un corps F soit réel se traduit par le fait que la F-forme $q_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum x_i^2$ soit anisotrope pour tout n : il suffit alors d'invoquer le résultat d'Artin–Springer. □

1.2 Corps réels clos

Définition 1.2.1. Un corps réel F est un *corps réel clos* si F n'admet pas d'extension algébrique F' non triviale qui soit un corps réel.

Remarque. Le fait de se restreindre à des extensions *algébriques* est crucial car si F est réel, alors $\mathrm{F}(t)$ est réel ! En effet, cela résulte du fait que si q est une forme quadratique sur F (de caractéristique zéro) et si $q_{\mathrm{F}(t)}$ est son extension des scalaires à $\mathrm{F}(t)$, alors q et $q_{\mathrm{F}(t)}$ ont le même indice de Witt donc l'une est anisotrope si, et seulement si l'autre est (preuve de [Kah08, Proposition 3.1.1, b)]). En appliquant cette observation aux formes de la preuve du corollaire 1.1.20, on en déduit que $\mathrm{F}(t)$ est réel si F l'est et réciproquement. [3]

3. Cette observation n'a rien à voir avec les formes quadratiques : si k est un corps infini et si X est un k-schéma localement de type fini possédant un $k(t)$-point x, alors X possède un k-point. En effet, on peut supposer X affine, donné par une k-algèbre A de type fini, engendrée par $(a_1, \ldots, a_n)$. Le point x est donné par un k-morphisme $\varphi : \mathrm{A} \to k(t)$. Il existe alors $f \in k(t) \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(a_i) \in k[t]_f$ pour tout i donc $\varphi(\mathrm{A}) \subseteq k[t]_f$. Soit dès lors λ un élément de k en lequel f ne s'annule pas — un tel élément existe car k est infini — ; il induit un morphisme $\psi : k[t]_f \to k$ (l'évaluation en λ) d'où un morphisme $\psi \circ \varphi : \mathrm{A} \to k$, lequel induit un k-point de X.

Théorème 1.2.2. *Soit* F *un corps. Les assertions suivantes sont alors équivalentes.*

1. *Le corps* F *est réel clos.*
2. *Le corps* F *admet un unique ordre dont le cône positif est formé des carrés de* F *et tout polynôme de* $\mathrm{F}[t]$ *de degré impair possède une racine dans* F*.*
3. *La* F*-algèbre* $\mathrm{F}[i] = \mathrm{F}[t]/\langle t^2+1\rangle$ *est un corps algébriquement clos.*

Démonstration. Supposons que F soit un corps réel clos (donc de caractéristique 0) ; montrons que l'assertion de l'item 2. est satisfaite. Soit a un élément de F. Si a n'est pas un carré de F, alors $\mathrm{F}[\sqrt{a}] = \mathrm{F}[t]/\langle t^2-a\rangle$ est une extension algébrique non triviale de F donc $\mathrm{F}[\sqrt{a}]$ n'est pas réel. Il s'ensuit qu'on peut écrire -1 comme somme de carré d'éléments de $\mathrm{F}[\sqrt{a}]$; en développant les carrés et en identifiant les termes devant 1 dans la décomposition $\mathrm{F}[\sqrt{a}] = \mathrm{F}\cdot 1 \oplus \mathrm{F}\sqrt{a}$ en somme de F-espaces vectoriels, on voit que

$$-1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a\sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Comme F est un corps réel, -1 n'est pas somme de carrés d'éléments de F donc $\sum y_i^2 \neq 0$. On peut alors écrire

$$-a = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

donc $-a \in \sum \mathrm{F}^2$. En particulier, $\mathrm{F} = \sum \mathrm{F}^2 \cup (-\sum \mathrm{F}^2)$ donc $\sum \mathrm{F}^2$ est le cône positif d'un ordre sur F. Or, $\sum \mathrm{F}^2$ est contenu dans tout cône positif d'un ordre sur F : il s'ensuit que $\sum \mathrm{F}^2$ est le seul tel cône, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un ordre sur F. Remarquons en outre que si a n'est pas un carré, alors $a \leqslant 0$ donc tout élément positif est un carré : le cône $\sum \mathrm{F}^2$ est donc en fait formé des carrés de F.

Reste à montrer que tout polynôme de degré impair possède une racine dans F. Soit f un polynôme à coefficients dans F de degré impair : montrons que f a une racine dans F. Comme f est de degré impair, l'un de ses facteurs irréductibles est de degré impair : quitte à remplacer f par celui-ci, on peut supposer f irréductible. Le corps $\mathrm{R} = \mathrm{F}[t]/\langle f\rangle$ est alors une extension de degré fini impair de F : c'est donc un corps réel d'après le corollaire 1.1.20 et comme F est réel clos, on en déduit que $\mathrm{R} = \mathrm{F}$, c'est-à-dire que $\deg f = 1$. Le fait que f admette une racine dans F est alors évident.

Supposons que l'assertion de l'item 2. soit vérifiée : en particulier, F est réel ; montrons que $\mathrm{F}[i]$ est algébriquement clos — la lettre i désigne l'image de t dans $\mathrm{F}[t]/\langle t^2+1\rangle$. Le *conjugué* d'un élément $z = a+bi$ où $(a,b) \in \mathrm{F}\times\mathrm{F}$ est l'élément $\overline{z} = a-bi$ de $\mathrm{F}[i]$. Montrons d'abord que tout élément de $\mathrm{F}[t]$ possède une racine dans $\mathrm{F}[i]$. Soit $f \in \mathrm{F}[t]\setminus\{0\}$; on écrit $\deg(f) = 2^m n$ où n est impair et on raisonne par récurrence sur m. Si $m = 0$, l'assertion 2. assure que f possède une racine dans F. Supposons $m > 0$ et le résultat vérifié au rang $m-1$. Soit $\overline{\mathrm{F}}$ une clôture algébrique de F contenant $\mathrm{F}[i]$; notons $y_1, \ldots, y_d$ les racines (distinctes) de f dans $\overline{\mathrm{F}}$ et posons

$$g_h(t) = \prod_{\lambda<\mu}(t - y_\lambda - y_\mu - h y_\lambda y_\mu)$$

pour tout $h \in \mathbb{Z}$. Pour tout h, les coefficients de g_h sont des fonctions symétriques des y_i : il s'ensuit que ce sont des éléments de F [4]. Le polynôme g_h est de degré $\frac{d(d-1)}{2}$ où $d = \deg(f)$ donc la valuation 2-adique du degré de g_h est $m-1$: en particulier, l'hypothèse de récurrence implique que g_h possède une racine dans $\mathrm{F}[i]$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda < \mu$ tel que $y_\lambda + y_\mu + h y_\lambda y_\mu$ appartient à $\mathrm{F}[i]$. D'après le principe des tiroirs, il existe donc $\lambda < \mu$ tels que $y_\lambda + y_\mu + h y_\lambda y_\mu \in \mathrm{F}[i]$ pour une infinité d'éléments h de $\mathbb{Z}$: en particulier, si $h < h'$ sont de tels nombres entiers, alors $(h'-h)y_\lambda y_\mu \in \mathrm{F}[i]$ et $h'-h \in \mathrm{F}^\times$ puisque F est réel donc de caractéristique zéro : il s'ensuit, puisque $\mathrm{F}[i]$ est un sous-F-espace vectoriel de $\overline{\mathrm{F}}$, que $y_\lambda y_\mu \in \mathrm{F}[i]$. Alors, $y_\lambda + y_\mu \in \mathrm{F}$ comme différence d'éléments de $\mathrm{F}[i]$. Posons $s = y_\lambda + y_\mu$ et $p = y_\lambda y_\mu$; alors, y_λ et y_μ sont les racines du polynômes $t^2 - st + p$ qui est à coefficients dans $\mathrm{F}[i]$. Pour conclure que y_λ et y_μ appartiennent à $\mathrm{F}[i]$, il suffit de montrer que le discriminant de ce polynôme, qui appartient à $\mathrm{F}[i]$, est un carré dans $\mathrm{F}[i]$: on fait appel au lemme suivant.

4. L'extension $\overline{\mathrm{F}}/\mathrm{F}$ est normale et séparable car F est de caractéristique zéro — il est réel ! — donc galoisienne.

Lemme 1.2.3. *Tout élément de* $\mathrm{F}[i]$ *est un carré dans* $\mathrm{F}[i]$.

Démonstration. La preuve est la même que celle de l'énoncé analogue pour l'extension $\mathbb{C}/\mathbb{R}$: c'est ici que l'hypothèse sur le cône positif de F intervient. Notons $\mathrm{F}_- = \{x \in \mathrm{F}, x \leqslant 0\}$ et $\mathrm{F}_+ = \{x \in \mathrm{F}, x \geqslant 0\}$; par hypothèse, F_+ coïncide avec l'ensemble des carrés de F. Les applications $\mathrm{F}_- \to \mathrm{F}_+$ et $\mathrm{F}_+ \to \mathrm{F}_+$ données par $x \mapsto x^2$ sont alors bijectives, la première est décroissante et la seconde est croissantes. En effet, il suffit pour la première assertion de montrer que pour tout $z \in \mathrm{F}_+$ non nul, le polynôme $t^2 - z$ possède deux racines, l'une positive et l'autre négative ; or, z est positif donc c'est un carré d'où $x \in \mathrm{F}$ tel que $x^2 = z$: x et $-x$ sont alors les racines du polynôme $t^2 - z$, l'une est négative, l'autre est positive. On sait déjà que $x \mapsto x^2$ est croissante sur F_+ — c'est le lemme 1.1.3 — tandis que si $y < z \leqslant 0$, alors $0 < -z \leqslant -y$ donc $z^2 \leqslant y^2$.

Soit $(a, b) \in \mathrm{F} \times \mathrm{F}$: on veut écrire $a + bi = (c + di)^2$ où c et d appartiennent à F. Comme le cône positif de F est formé de ses carrés, $a^2 + b^2$ est un carré : il existe un unique $\alpha \in \mathrm{F}$ strictement positif tel que $\alpha^2 = a^2 + b^2$. La relation $a + bi = (c + di)^2$ impose les égalités $a = c^2 - d^2$, $b = 2cd$ et $\alpha^2 = (c^2 + d^2)^2$: comme $c^2 + d^2$ est positif en tant que somme de carrés, on en déduit que $c^2 + d^2 = \alpha$ donc $c^2 = \frac{a+\alpha}{2}$. Or, $0 \leqslant a + \alpha$: en effet si $0 \leqslant a$, c'est évident ; sinon, il s'agit de s'assurer que $\alpha \geqslant -a$: comme $-a$ et α sont positifs, on peut le vérifier après passage au carré, c'est-à-dire qu'on doit établir que $a^2 \leqslant \alpha^2$: c'est clair car $\alpha^2 = a^2 + b^2$ et $b^2 \geqslant 0$. Soit β l'unique élément positif de F tel que $\beta^2 = \frac{a+\alpha}{2}$; on pose $c = \beta$. De même, $\alpha - a \geqslant 0$: soit γ l'unique élément positif de F tel que $\gamma^2 = \frac{\alpha-a}{2}$. Si $0 \leqslant b$, on pose $d = \gamma$; sinon, on pose $d = -\gamma$. Par définition,

$$c^2 - d^2 = \frac{\alpha + a}{2} - \frac{\alpha - a}{2} = a.$$

Pour vérifier l'égalité $2cd = b$, comme les deux membres de cette égalité sont simultanément positifs ou simultanément négatifs par choix de d, il suffit de la vérifier après passage au carré : or,

$$4c^2d^2 = (\alpha + a)(\alpha - a) = \alpha^2 - a^2 = b^2$$

d'où le résultat. □

Ainsi, tout polynôme à coefficients dans F admet une racine dans $\mathrm{F}[i]$. Soit désormais f un élément de $\mathrm{F}[i]$. Notons $\overline{f}$ le polynôme conjugué de f : c'est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de f. Alors, les conjugués des coefficients de $f\overline{f}$ sont les coefficients de $\overline{f}f = f\overline{f}$: il s'ensuit que les coefficients de $f\overline{f}$ sont fixes par la conjugaison et sont dès lors des éléments de F. Il résulte du raisonnement mené ci-dessus que $f\overline{f}$ possède une racine x dans $\mathrm{F}[i]$, c'est-à-dire que $f(x)\overline{f}(x) = 0$. Si $f(x) = 0$, c'est terminé ; sinon, $\overline{f}(x) = 0$ donc $f(\overline{x}) = 0$ de sorte que f a une racine dans $\mathrm{F}[i]$.

Supposons enfin que la F-algèbre $\mathrm{F}[i]$ soit un corps algébriquement clos. En particulier, $-1 = i^2$ donc $\mathrm{F}[i]$ n'est pas réel. Alors, puisque $\mathrm{F}[i]$ est un corps, -1 n'est pas un carré dans F. Pour montrer que F est réel, il suffit dès lors de prouver qu'une somme de carrés d'éléments de F est le carré d'un élément de F ; or, si $(a, b) \in \mathrm{F} \times \mathrm{F}$, comme $\mathrm{F}[i]$ est algébriquement clos, on peut écrire $a + ib = (c + id)^2$ et on en déduit que

$$a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^2$$

comme attendu. Maintenant, si F'/F est une extension algébrique non triviale, alors il existe un F-plongement de F' dans $\mathrm{F}[i]$ puisque ce dernier est algébriquement clos : en comparant les degrés, on en déduit que $\mathrm{F}' = \mathrm{F}[i]$ donc F' n'est pas un corps réel. Par définition, F est réel clos. □

Corollaire 1.2.4. *Soit* R *un corps réel clos et soit* $f \in \mathrm{R}[t]$. *Si* f *est irréductible unitaire, alors* $\deg f = 1$ *ou* $\deg f = 2$ *et* $f(t) = (t - a)^2 + b^2$ *où* $(a, b) \in \mathrm{R} \times (\mathrm{R} \setminus \{0\})$.

Démonstration. En effet, comme f est irréductible, c'est le polynôme minimal d'un élément de la clôture algébrique $\mathrm{R}[i] = \mathrm{R}[t]/\langle t^2 + 1\rangle$ (i est la classe de t) donc $\deg(f) \leqslant \dim_{\mathrm{R}} \mathrm{R}[i] = 2$. Si f n'est pas de degré 1, alors f est de degré 2 ; si $x = a + ib$ est une racine de f, alors $\overline{x}$ est aussi une racine de f puisque $f(\overline{x}) = \overline{f(x)} = 0$ car les coefficients de f sont fixes par la conjugaison : comme $x \neq \overline{x}$ car f est irréductible de degré 2, il s'ensuit que x et $\overline{x}$ sont les racines distinctes de f donc

$$f(t) = (t - (a + ib))(t - (a - ib)) = (t - a)^2 + b^2$$

où $b \neq 0$ car $x \notin \mathrm{R}$. □

Exemple 1.2.5. Le corps $\mathbb{R}$ est un corps réel clos. L'ensemble $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$ des nombres réels algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un corps réel clos : en effet, $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}[i] \subseteq \mathbb{C}$ s'identifie à la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ et est donc algébriquement clos.

Le corps $\mathbb{R}(t)$ n'est pas un corps réel clos.

Analyse sur un corps réel clos. Le but de ce paragraphe est de montrer que les polynômes à une variable sur un corps réel clos possèdent nombre de propriétés des fonctions dérivables sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. On étend au contexte des corps réels clos les mêmes notations que celles ayant cours pour le corps des nombres réels : $[a,b] = \{x \in \mathrm{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$ si (a,b) est un couple d'éléments d'un corps réel clos R, etc.

Proposition 1.2.6 (théorème des valeurs intermédiaires, [BCR87, Proposition 1.2.4])**.** *Soit* R *un corps réel clos, soit* $f \in \mathrm{R}[\mathrm{X}]$ *et soit* (a,b) *un couple d'éléments de* R *tel que* $a < b$*. Si* $f(a)f(b) < 0$*, alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que* $f(c) = 0$*.*

Démonstration. On peut supposer f et ses facteurs irréductibles unitaires. Les facteurs irréductibles unitaires de f de degré 2 sont strictement positifs R, *a fortiori* sur $[a,b]$. Or, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé : par conséquent, $g(a)$ et $g(b)$ sont de signe opposé pour un facteur irréductible g de f, nécessairement de degré 1. On écrit $g(\mathrm{X}) = \mathrm{X} - c$; alors $a - c < 0$ et $b - c > 0$ puisque g change de signe sur $[a,b]$ et g préserve l'ordre donc $c \in]a,b[$ et $g(c) = 0$ donc $f(c) = 0$. □

Corollaire 1.2.7. *Soit* $x \in]a,b[$ *tel que* $f(x) \neq 0$*. Il existe alors* $(u,v) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ *tel que* $a < u < x < v < b$ *et* $f(y)f(x) > 0$ *pour tout* $y \in [u,v]$*.*

Démonstration. Soit z (respectivement w) la plus grande (respectivement petite) racine de f telle que $z < x$ (respectivement $x < w$) : elle existe car l'ordre $\leqslant$ est total, l'ensemble des racines de f est fini et $f(x) \neq 0$. Posons

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{x - z, x - a, w - x, b - x\}.$$

Alors, $\max\{a, z\} < u = x - \delta$ et $v = x + \delta < \min\{b, w\}$ donc (u,v) convient : f ne s'annule pas sur $[u,v]$ donc $f(y)f(x) > 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. □

Proposition 1.2.8 (théorème de Rolle, [BCR87, Proposition 1.2.5])**.** *Soit* R *un corps réel clos, soit* $f \in \mathrm{R}[\mathrm{X}]$ *et soit* $(a,b) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ *tel que* $a < b$*. Si* $f(a) = f(b) = 0$*, alors le polynôme dérivé* f' *possède une racine sur* $]a,b[$*.*

Démonstration. Supposons que $f(a) = f(b) = 0$. Notons c la plus petite racine de f telle que $a < c < b$; l'élément c de R existe car l'ordre de R est total et l'ensemble des racines de f est fini. Il suffit de prouver que f' admet une racine sur $]a,c[$ donc on peut remplacer b par c : cela permet de supposer que f ne s'annule pas sur $]a,b[$. On écrit $f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-a)^m(\mathrm{X}-b)^n g(\mathrm{X})$ où m et n sont des nombres entiers naturels non nuls et où $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. La proposition précédente permet d'en déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$ ou $g(x) < 0$ pour tout $x \in [a,b]$: quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $g(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$. On a alors

$$f'(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-a)^{m-1}(\mathrm{X}-b)^{n-1}h$$

où

$$h(\mathrm{X}) = (m(\mathrm{X}-a) + n(\mathrm{X}-b))g + (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)g'.$$

Par conséquent,

$$h(a) = n(a-b)g(a) < 0, \quad h(b) = m(b-a)g(b) > 0.$$

D'après la proposition précédente, il existe ainsi $x \in]a,b[$ tel que $h(x) = 0$ d'où $f'(x) = 0$. □

Corollaire 1.2.9 (égalité des accroissements finis, [BCR87, Corollaire 1.2.6])**.** *Il existe* $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$*.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $f(\mathrm{X}) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(\mathrm{X}-a) - f(a)$. $\square$

Corollaire 1.2.10 (monotonie et dérivation, [BCR87, Corollaire 1.2.7])**.** *Soit* R *un corps réel clos, soit* $f \in \mathrm{R}[\mathrm{X}]$ *et soit* $(a,b) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ *tels que* $a < b$*. Si* $f'(x) > 0$ *(respectivement* $f'(x) < 0$*) pour tout* $x \in]a,b[$*, alors* f *est strictement croissant (respectivement strictement décroissant) sur* $[a,b]$*.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où $f' > 0$ sur $]a,b[$ en remplaçant f par $-f$ si $f' < 0$ sur $]a,b[$; si $x < y$ sont des éléments de $]a,b[$ et vérifient $f(x) > f(y)$, alors $\alpha = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < 0$ donc $\alpha \neq f'(z)$ pour tout $z \in]x,y[$, ce qui contredit la conclusion du corollaire précédent. $\square$

Le théorème suivant est un résultat de comptage des racines.

Théorème 1.2.11 (Sturm, [BCR87, Théorème 1.2.8])**.** *Soit* R *un corps réel clos. Soit* f *un polynôme à coefficients dans* R *tel que* f *et* f' *sont premiers entre eux. Notons* $(f_0, \ldots, f_k)$ *la suite de polynômes définie comme suit :*

$$f_0 = f, \quad f_1 = f', \quad f_{i-2} = f_{i-1}g_i - f_i$$

où $\deg f_i < \deg f_{i-1}$ *— autrement dit,* f_i *est l'opposé du reste dans la division euclidienne de* f_{i-2} *par* f_{i-1} *— et* $f_k \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$*.*

Soit $a \in \mathrm{R}$*. On note* E *l'ensemble des couples* $(i,j) \in [\![0,k]\!]^2$ *tels que* $i < j$ *et*

$$v(a) = |\{(i,j) \in \mathrm{E}, f_i(a)f_j(a) < 0 \wedge (\forall l \in [\![i+1, j-1]\!], f_l(a) = 0)\}|$$

le nombre de changements de signes de la suite $(f_i(a))_i$*.*

Soit $(a,b) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ *tel que* $a < b$ *et* $f(a)f(b) \neq 0$*. Le nombre de racines de* f *sur l'intervalle* $]a,b[$ *est alors égal à* $v(a) - v(b)$*.*

Démonstration. Puisque la suite $(f_i)_i$ est au signe près celle de l'algorithme d'Euclide pour la recherche du plus grand commun diviseur et comme f et f' sont premiers entre eux, elle se termine par une constante non nulle ; en outre, f_{i-1} et f_i sont premiers entre eux pour tout $i \geqslant 1$. Notons Z l'ensemble des éléments x de R tels que $f_i(x) = 0$ pour un indice i — ainsi, Z est l'ensemble des racines d'un des f_i. Si $c < d$ sont des éléments de R tels que $[c,d] \cap \mathrm{Z} = \emptyset$, alors les f_i sont de signe constant sur $[c,d]$ pour tout i : par conséquent, la fonction v est constante sur $[c,d]$. Il suffit dès lors d'établir les faits suivants :

- si $x \in \mathrm{R}$ « traverse » une racine de f, alors $v(x)$ diminue de 1 : autrement dit, si c est une racine de f, il existe $\alpha < c < \beta$ tels que v est constante sur $[\alpha, c[$ et sur $[c, \beta]$ et $v(c) = v(\alpha) - 1$;
- si $x \in \mathrm{R}$ « traverse » une racine de f_i pour $i > 0$, alors $v(x)$ ne change pas : autrement dit, si c est racine de f_i avec $i > 0$, alors il existe $\alpha < c < \beta$ tels que v est constante sur $[\alpha, \beta]$.

En effet, si c'est le cas, alors en notant r le nombre de racines de f dans R, $v(b) = v(a) - r$ donc $v(a) - v(b) = r$.

Soit $c \in]a,b[$ une racine de f : comme f et f' sont premiers entre eux, $f'(c)$ est non nul. On se place sur $[\alpha, \beta] \subseteq]\alpha, \beta[$ de sorte que $f'(c)f'(x) > 0$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$: c'est possible d'après le corollaire 1.2.7. On peut en outre supposer que f ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta] \setminus \{c\}$. Si $f'(c) > 0$, alors $f(x) < 0$ et $f'(x) > 0$ donc $f(x)f'(x) < 0$ pour tout $\in [\alpha, c[$ et $f(x) > 0$ pour tout $x > c$ donc $f(x)f(c) > 0$ pour tout $x > c$. On en déduit que $v(x) = v(\alpha) - 1$ pour tout $x \geqslant c$. [5]

Soit $c \in]a,b[$ une racine de f_i avec $i \in [\![1, k-1]\!]$. Alors, $f_{i-1}(c) = -f_{i+1}(c)$ donc $f_{i-1}(c)f_{i+1}(c) \leqslant 0$; en outre, $f_{i-1}(c)$ et $f_{i+1}(c)$ sont non nuls puisque f_{i-1} et f_i (respectivement f_i et f_{i+1}) sont premiers entre eux. On en déduit que $f_{i-1}(c)f_{i+1}(c) < 0$ donc $f_{i-1}(x)f_{i+1}(x) < 0$ pour tout $x \in [\alpha, \beta] \subseteq]\alpha, \beta[$ pour (α, β) convenable (corollaire 1.2.7 appliqué au polynôme $f_{i-1}f_{i+1}$). Il s'ensuit que le passage de c ne cause aucune variation de $v(x)$. [6]

Le résultat suit. $\square$

5. La preuve est plus claire avec un tableau de variations ; l'auteur admet le rôle qu'a joué sa paresse dans le choix de ne pas en dresser.

6. *Cf.* la note précédente.

Notation 1.2.12. Soit $(\mathrm{F}, \leqslant)$ un corps ordonné. Comme $\leqslant$ est total, les parties finies non vides de F possèdent un maximum et un minimum. On pose $|x| = \max\{x, -x\}$ pour tout $x \in \mathrm{F}$: c'est la *valeur absolue* de x.

Lemme 1.2.13 (inégalité triangulaire)**.** *Soit* F *un corps ordonné et soit* $(a, b) \in \mathrm{F} \times \mathrm{F}$*. Alors,* $|a+b| \leqslant |a| + |b|$*.*

Démonstration. Supposons $a + b$ positif ; alors, $|a + b| = a + b \leqslant |a| + |b|$ car $x \leqslant |x|$ pour tout x par construction. Si $a + b \leqslant 0$, alors $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leqslant |a| + |b|$. ☐

Lemme 1.2.14 ([BCR87, Lemme 1.2.9])**.** *Soit* R *un corps réel clos et soit*

$$f = a_n \mathrm{X}^n + \cdots + a_0$$

un polynôme à coefficients dans R *avec* $a_n \neq 0$*. Posons*

$$\mathrm{M} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{|a_n|}$$

— noter que $\mathrm{M} \geqslant 1$*. Alors,* f *ne s'annule pas sur* $]-\infty, -\mathrm{M}]$ *(respectivement sur* $[\mathrm{M}, +\infty[$*) et* $f(x)(-1)^n a_n > 0$ *(respectivement* $f(x) a_n > 0$*) pour tout* $x \leqslant -\mathrm{M}$ *(respectivement* $x \geqslant \mathrm{M}$*).*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{R}$ tel que $\mathrm{M} \leqslant |x|$. Posons $b_i = \frac{|a_i|}{|a_n|}$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$; alors,

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i-n}\right)$$

où

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i-n}\right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{i=0}^{n-1} |b_i| < 1$$

donc $f(x)$ a même signe que $a_n x^n$, c'est-à-dire que a_n si $0 < x$ et que $(-1)^n a_n$ si $0 < -x$. ☐

Corollaire 1.2.15 ([BCR87, Corollaire 1.2.10])**.** *Soit* R *un corps réel clos, soit* $f \in \mathrm{R}[\mathrm{X}]$ *tel que* f *et* f' *sont premiers entre eux et soit* $(f_0, \ldots, f_k)$ *la suite du théorème 1.2.11. Si* $0 \leqslant i \leqslant k$*, notons* α_i *(respectivement* β_i*) le coefficients de* $f_i(\mathrm{X})$ *(respectivement* $f_i(-\mathrm{X})$*) devant* $\mathrm{X}^{\deg(f_i)}$ *; posons*

$$v(-\infty) = |\{(i, j) \in \mathrm{E}, \alpha_i \alpha_j < 0 \wedge (\forall l \in [\![i+1, j-1]\!], \alpha_l = 0)\}$$

et

$$v(-\infty) = |\{(i, j) \in \mathrm{E}, \beta_i \beta_j < 0 \wedge (\forall l \in [\![i+1, j-1]\!], \beta_l = 0)\}$$

où $\mathrm{E} = \{(i, j) \in [\![0, k]\!], i < j\}$*. Le nombre de racines de* f *dans* R *est alors égal à* $v(-\infty) - v(+\infty)$*.*

Démonstration. Le lemme précédent permet de choisir $\mathrm{M} \in \mathrm{R}$ tel que l'ensemble des racines de f est contenu dans $]-\mathrm{M}, \mathrm{M}[$, $v(-\infty) = v(-\mathrm{M})$ et $v(+\infty) = v(\mathrm{M})$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Sturm. ☐

Amalgamation. La propriété suivante des corps réels clos nous sera utile.

Théorème 1.2.16 (amalgamation)**.** *Soit* F *un corps réel clos et soient* R/F *et* R′/F *des extensions de* F *telles que* R *et* R′ *sont des corps réels clos. Il existe alors un corps réel clos* S *et des morphismes* $\mathrm{R} \to \mathrm{S}$ *et* $\mathrm{R}' \to \mathrm{S}$ *dont les composés avec* $\mathrm{F} \to \mathrm{R}$ *et* $\mathrm{F} \to \mathrm{R}'$ *coïncident.*

Remarque. Il y a aussi amalgamation des corps : si K et L sont des extensions d'un corps k, tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de l'anneau $\mathrm{K} \otimes_k \mathrm{L}$ — qui est non nul car K et L sont non nuls et k est un corps — induit un corps $\mathrm{M} = \mathrm{K} \otimes_k \mathrm{L}/\mathfrak{m}$ muni de morphismes évidents de source K et L dont les composés avec $k \to \mathrm{K}$ et $k \to \mathrm{L}$ coïncident.

1.3 Clôture réel d'un corps ordonné

Définition 1.3.1. Soit $(\mathrm{F}, \leqslant)$ un corps ordonné. Une *clôture réelle* de F est une extension R/F de corps possédant les propriétés suivantes :

1. le corps R est réel clos ;
2. l'extension R/F est algébrique ;
3. l'unique ordre de R étend l'ordre donné sur F, c'est-à-dire que le morphisme structural $\mathrm{F} \to \mathrm{R}$ de l'extension R/F préserve l'ordre.

Théorème 1.3.2 ([BCR87, Théorème 1.3.2]). *Soit* $(\mathrm{F}, \leqslant)$ *un corps ordonné. Alors,* $(\mathrm{F}, \leqslant)$ *possède une clôture réelle.*

Démonstration. L'idée pour construire une clôture réelle de $(\mathrm{F}, \leqslant)$ est d'ajouter des racines carrés aux éléments positifs dans une clôture algébrique de F jusqu'à obtenir un corps réel clos. Soit $\overline{\mathrm{F}}/\mathrm{F}$ une clôture algébrique de F et soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des couples $(\mathrm{K}, \leqslant)$ où K/F est une sous-extension de $\overline{\mathrm{F}}/\mathrm{F}$ et où l'inclusion $\mathrm{F} \to \mathrm{K}$ préserve l'ordre. On définit une relation $\prec$ sur $\mathscr{E}$ comme suit : si $(\mathrm{K}, \leqslant)$ et $(\mathrm{K}', \leqslant')$ sont des éléments de $\mathscr{E}$, $(\mathrm{K}, \leqslant) \prec (\mathrm{K}', \leqslant')$ lorsque $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$ et que l'inclusion de K vers K′ préserve l'ordre. L'ensemble $\mathscr{E}$ contient $(\mathrm{F}, \leqslant)$ donc il est non vide ; il est en outre inductif : si $((\mathrm{K}_i, \leqslant_i))_{i \in \mathrm{I}}$ est une chaîne d'éléments de $\mathscr{E}$, la réunion K des K_i, ordonnée par $0 \leqslant x$ si $x \in \mathrm{K}_i$ est dans le cône positif de K_i, est un majorant de $(\mathrm{K}_i)_i$ dans $\mathscr{E}$. D'après le lemme de Zorn, l'ensemble $\mathscr{E}$ possède un élément maximal $(\mathrm{R}, \leqslant)$: nous allons vérifier que R est un corps réel clos. Montrons d'abord que tout élément positif de $(\mathrm{R}, \leqslant)$ est un carré. Soit a un élément positif de R. Raisonnons par l'absurde et supposons que a ne soit pas un carré dans R. Notons P le sous-ensemble de $\mathrm{R}[\sqrt{a}] \subseteq \mathrm{F}$ formé des éléments de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} b_i (c_i + d_i \sqrt{a})^2$$

où, pour tout i, b_i appartient au cône positif de $(\mathrm{R}, \leqslant)$, $c_i \in \mathrm{R}$ et $d_i \in \mathrm{R}$. On voit alors facilement que P est un cône ; en outre, si

$$-1 = \sum_{i=1}^{n} b_i (c_i + d_i \sqrt{a})^2$$

où $0 \leqslant b_i \in \mathrm{R}$ et où $(c_i, d_i) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$, alors en identifiant les composantes devant 1 dans la décomposition $\mathrm{R}[\sqrt{a}] = \mathrm{R} \cdot 1 \oplus \mathrm{R}\sqrt{a}$, on obtient

$$-1 = \sum_{i=1}^{n} b_i (c_i^2 + a d_i^2)$$

dans R où le membre de gauche est positif : contradiction. Il existe alors un ordre $\leqslant'$ sur $\mathrm{R}[\sqrt{a}]$ — qui en fait un corps ordonné — dont le cône positif Q contient P donc le cône positif de R, ce qui implique que $\leqslant'$ étend $\leqslant$: cela contredit la maximalité de $(\mathrm{R}, \leqslant)$. Le corps R possède donc un ordre unique dont les éléments positifs sont les carrés — il est en particulier réel. Si K/R est une extension algébrique de R, on peut supposer que K/R est une sous-extension de $\overline{\mathrm{F}}/\mathrm{R}$. Si $\leqslant$ est un ordre sur K, alors les carrés de K, *a fortiori* ceux de R, sont positifs pour cet ordre : on en déduit que $\leqslant$ étend l'ordre de R donc $\mathrm{K} = \mathrm{R}$ par maximalité. Par définition, R est une clôture réelle de F. ☐

Proposition 1.3.3 ([BCR87, Proposition 1.3.4]). *Soit* $(\mathrm{F}, \leqslant)$ *un corps ordonné, soit* R *une clôture réelle de* $(\mathrm{F}, \leqslant)$ *et soit* R'/F *une extension de corps telle que* R′ *est un corps réel clos et l'inclusion* $\mathrm{F} \to \mathrm{R}'$ *préserve l'ordre. Il existe alors un unique* F*-morphisme de* R *dans* R′*.*

Remarque. Comme les éléments positifs de R sont les carrés, un morphisme de corps de R dans un corps ordonné préserve automatiquement l'ordre.

Démonstration. On commence par la construction suivante. Notons $\mathscr{F}$ l'ensemble des morphismes $\varphi : \mathrm{K} \to \mathrm{R}'$ d'extensions de F, où K/F est une sous-extension de R/F, et telle que φ préserve l'ordre, le corps K étant muni de l'ordre induit par l'ordre de R. On définit une relation $\prec$ sur $\mathscr{F}$ comme suit : si $\varphi : \mathrm{K} \to \mathrm{R}'$ et $\varphi' : \mathrm{K}' \to \mathrm{R}'$ sont des morphismes de corps, $\varphi \prec \varphi'$ lorsqu'il existe un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathrm{K}' \arrow[d] \\ & \mathrm{R}' \end{tikzcd}$$

L'ensemble $\mathscr{F}$ est non vide — il contient le morphisme structural de F vers R' — et il est inductif : si $(\varphi_i : \mathrm{K}_i \to \mathrm{R}')_{i\in\mathrm{I}}$ est une chaîne d'éléments de $\mathscr{F}$, alors $\mathrm{K} = \bigcup \mathrm{K}_i$ est un sous-corps de R et l'application $\varphi : \mathrm{K} \to \mathrm{R}'$ donnée par $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ si $x \in \mathrm{K}_i$ est bien définie ; elle induit un élément $\varphi : \mathrm{K} \to \mathrm{R}'$ de $\mathscr{F}$ qui majore les φ_i. D'après le lemme de Zorn, on peut choisir un élément maximal $\Phi : \mathrm{L} \to \mathrm{R}'$ de Φ. Nous allons montrer que $\mathrm{L} = \mathrm{R}$.

Lemme 1.3.4. *Soit $a \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{L}$. Il existe alors un morphisme $\Phi' : \mathrm{L}(a) \to \mathrm{R}'$ qui étend Φ.*[7]

Démonstration. Si $g = \sum d_i t^i \in \mathrm{L}[t]$, nous posons $\Phi(g) = \sum \Phi(d_i)t^i$. Notons f le polynôme minimal de a sur L. Le polynôme f n'a pas de racine multiple puisque L'/L est séparable. Notons $(f_0, \dots, f_k)$ la suite de polynômes associée à f par le théorème de Sturm, f étant vu comme un polynôme à coefficients dans le corps réel clos R ; le polynôme f_i est à coefficients dans L pour tout i par définition de la suite $(f_0, \dots, f_k)$. On note en outre que $\Phi(f') = \Phi(f)'$ donc la suite $(\Phi(f_0), \dots, \Phi(f_k))$ est la suite associée à $\Phi(f)$ selon le théorème de Sturm. Par ailleurs, Φ préserve l'ordre donc les changements de signe des suites de termes dominants définies dans le corollaire 1.2.15 : il résulte de celui-ci que le nombre $v(-\infty) - v(+\infty)$ pour $\Phi(f)$ est égal au nombre analogue pour f, c'est-à-dire que Φ a n racines distinctes dans R' où d est le nombre de racines de f dans R. Notons $a_1 < \ldots < a_n$ les racines de f dans R et $b_1 < \cdots < b_n$ les racines de $\Phi(f)$ dans R' ; il existe un indice j tel que $a = a_j$ et un unique morphisme $\Phi' : \mathrm{L}(a) \to \mathrm{R}'$ étendant Φ tel que $\Phi'(a) = b_j$. ☐

Corollaire 1.3.5 ([BCR87, Lemme 1.3.3])**.** *Soit* L'/L *une sous-extension finie de* R/L. *Il existe alors un morphisme* $\Psi : \mathrm{L}' \to \mathrm{R}'$ *étendant* Φ.

Démonstration. Le corps L est réel donc de caractéristique zéro : par conséquent, l'extension L'/L est finie et séparable donc monogène — c'est le théorème de l'élément primitif — de sorte que le lemme précédent s'applique. ☐

Lemme 1.3.6. *Soit $a \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{L}$. Alors, le morphisme $\Phi' : \mathrm{L}(a) \to \mathrm{R}'$ construit dans la preuve du lemme 1.3.4 préserve l'ordre.*

Démonstration. Il suffit de montrer que Φ' préserve les éléments positifs. Soit $y \in \mathrm{L}(a)$ tel que $0 \leqslant y$. Comme le corps R est un corps réel clos, il existe $(x_1, \dots, x_{n-1}, z) \in \mathrm{R}^n$ tel que $x_i^2 = a_{i+1} - a_i$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $z^2 = y$. Considérons l'extension $\mathrm{M} = \mathrm{L}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_{n-1}, z)$ de L : l'extension M/L est de type fini et algébrique car sous-extension de R/L, qui est algébrique car R/F l'est, donc [M : L] est fini. D'après le lemme, Φ s'étend en un morphisme $\Psi : \mathrm{M} \to \mathrm{R}'$. Le polynôme $\Psi(f)$ est égal à $\Phi(f)$ car f est à coefficients dans L et Ψ étend Φ : par conséquent, les racines de $\Psi(f)$ dans R' sont $\Psi(a_1), \dots, \Psi(a_n)$; en outre, $\Psi(a_{i+1}) - \Psi(a_i) = \Psi(x_i)^2$ donc $\Psi(a_i) < \Psi(a_{i+1})$ pour tout i. Il s'ensuit que $\Psi(a_i) = b_i$ pour tout i. En particulier, $\Psi(a) = b_j$ donc Ψ étend Φ' de sorte que $\Phi'(y) = \Psi(y) = \Psi(z)^2$ donc $\Phi'(y)$ est positif. ☐

On en déduit que $\mathrm{L} = \mathrm{R}$: en effet, sinon, il existe $a \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{L}$ et une extension $\Psi : \mathrm{L}(a) \to \mathrm{R}'$ de Φ préservant l'ordre, ce qui contredit la maximalité de Φ. Ainsi, Φ est un F-morphisme de R vers R' qui préserve l'ordre. Le morphisme Φ est en outre unique car d'après la preuve du lemme précédent, il est déterminé par la condition suivante : si $a \in \mathrm{R}$ est la j-ème racine — au sens de l'ordre de R — de son polynôme minimal en tant qu'élément de l'extension R/F, alors $\Phi(a)$ est la j-ème racine — au sens de l'ordre de R' — de $\Phi(f)$. ☐

Corollaire 1.3.7. *Supposons que* R' *soit une clôture réelle de* F. *L'unique* F*-morphisme* $\Phi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ *est alors un isomorphisme.*

7. C'est naturellement un résultat démontré dans [BCR87] mais comme nous avons organisé la preuve de façon légèrement différente, il n'y a pas de référence à proprement parler : voir p. 14 dans [BCR87].

Démonstration. Comme R' est une clôture réelle de F, il existe un F-morphisme $\Xi : \mathrm{R}' \to \mathrm{R}$; alors, $\Xi \circ \Phi$ et Id_R sont des F-morphismes de R vers R donc par unicité, $\Xi \circ \Phi = \mathrm{Id}_\mathrm{R}$; on prouve de même que $\Phi \circ \Xi = \mathrm{Id}_{\mathrm{R}'}$ donc Ξ est l'inverse de Φ. □

Remarque. La théorie des clôtures réelles est plus rigide que celle des clôtures algébriques : si R est une clôture réelle de $(\mathrm{F}, \leqslant)$, alors le groupe des automorphismes de $\mathrm{R}/(\mathrm{F}, \leqslant)$ est trivial. Le corollaire précédent permet de parler de *la* clôture réelle d'un corps ordonné.

Exemple 1.3.8 ([BCR87, Exemple 1.3.6])**.** La clôture réelle de $\mathbb{Q}$ est le sous-corps de $\mathbb{R}$ formé des nombres algébriques. La clôture réelle de $\mathbb{R}(t)$ muni de l'ordre correspondant à la coupure 0_+ est le sous-corps du corps $\mathbb{R}(t)^\wedge$ des séries de Puiseux [8] formé des éléments algébriques sur $\mathbb{R}(t)$.

Plus généralement, soit $(\mathrm{F}, \leqslant)$ un corps réel et soit R' un corps réel clos contenant F dont l'ordre étend $\leqslant$. Alors, l'ensemble $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}'$ des éléments de R' algébriques sur F est une clôture réelle de F. En effet, son ordre étend $\leqslant$; l'extension R/F est algébrique ; il suffit de prouver que R est réel clos : or, si $x \in \mathrm{R}$ est positif, alors x est le carré d'un élément y de R' ; si $f \in \mathrm{F}[t] \setminus \{0\}$ annule x, alors $g(t) = f(t^2) \in \mathrm{F}[t] \setminus \{0\}$ annule y donc $y \in \mathrm{R}$.

1.4 Le principe de Tarski–Seidenberg

Notation 1.4.1. Soit R un corps réel clos. On note $\mathrm{sign}(a)$ l'élément de $\{-1, 0, 1\} \subseteq \mathrm{R}$ donné comme suit : $\mathrm{sign}(a) = 1$ si $0 < a$, $\mathrm{sign}(a) = 0$ si $a = 0$ et $\mathrm{sign}(a) = -1$ si $a < 0$.

Théorème 1.4.2 (principe de Tarski–Seidenberg, [BCR87, Théorème 1.4.4])**.** *Soit*

$$(f_i(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = h_{i,m_i}(\mathrm{Y})\mathrm{X}^{m_i} + \cdots + h_{i,0}(\mathrm{Y}))_{1 \leqslant i \leqslant s}$$

une famille de polynômes en $n+1$ variables $(X, \mathrm{Y} = (\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n))$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit ε une application de $[\![1, s]\!]$ dans $\{-1, 0, 1\}$. Il existe alors une formule $\mathscr{B}(\mathrm{Y})$ qui est combinaison booléenne (c'est-à-dire obtenue par conjonction finie, disjonction finie et négation) d'équations et d'inéquations polynomiales en les Y_i à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telle que pour tout corps réel clos et tout $y \in \mathrm{R}^n$, le système

$$\mathrm{sign}(f_1(\mathrm{X}, y)) = \varepsilon(1), \ldots, \mathrm{sign}(f_s(\mathrm{X}, y)) = \varepsilon(s)$$

possède une solution x dans R *si, et seulement si, $\mathscr{B}(y)$ est vraie dans* R.

Remarque. Les f_i induisent une formule *avec* quantificateurs — il existe x satisfaisant le système proposé — et le théorème dit que cette formule est équivalente à une formule *sans* quantificateurs. En termes de théorie des modèles, le principe de Tarski–Seidenberg énonce que la théorie des corps réels clos admet l'*élimination des quantificateurs*. Cette dernière est très utile pour les problèmes de décidabilité des formules — le principe de Tarski–Seidenberg joue un rôle important en géométrie algébrique algorithmique — et elle permet de mieux comprendre les ensembles dits *définissables* au sens de la théorie des modèles, qu'on peut comprendre intuitivement comme les ensembles « raisonnables » de la théorie : dans le cas des corps réels clos, ces ensembles sont donnés par la satisfaction d'égalités ou d'inégalités polynomiales et de combinaisons booléennes d'icelles.

Corollaire 1.4.3 ([BCR87, Corollaire 1.4.6])**.** *Soit* F *un corps réel, soit* $(f_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \ldots, f_s(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))$ *une famille de polynômes en $n+1$ variables* $(\mathrm{X}, (\mathrm{Y}_0, \ldots, \mathrm{Y}_n))$ *à coefficients dans* F. *Soit ε une fonction de $[\![1, s]\!]$ dans $\{0, -1, 1\}$. Il existe alors une combinaison booléenne $\mathscr{B}(\mathrm{Y})$ d'équations et d'inégalités polynomiales en les variables* Y *à coefficients dans* F *telle que pour tout corps réel clos* R *contenant* F *et tout $y \in \mathrm{R}^n$, le système*

$$\mathrm{sign}(f_1(\mathrm{X}, y)) = \varepsilon(1), \ldots, \mathrm{sign}(f_s(\mathrm{X}, y)) = \varepsilon(s)$$

possède une solution x dans R *si, et seulement si, $\mathscr{B}(y)$ est vraie dans* R.

8. Par définition, une série de Puiseux est une expression de la forme $f(t) = \sum_{i \geqslant k} a_i t^{i/q}$ où $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a_i \in \mathbb{R}$. Le corps $\mathbb{C}(t)^\wedge$, dont la définition des éléments est identique sauf qu'on autorise les coefficients a_i à être des nombres complexes, est algébriquement clos et on a visiblement que $\mathbb{C}(t)^\wedge = \mathbb{R}(t)^\wedge[i]$ donc $\mathbb{R}(t)^\wedge$ est un corps réel clos.

Démonstration. On peut écrire $f_i(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{G}_i(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, a)$ où a est la suite des coefficients des f_i, élément de F^m pour m convenable, et où G_i est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Il suffit alors d'appliquer le principe de Tarski–Seidenberg aux polynômes G_i, en considérant les points $(y, a) \in \mathrm{R}^{n+m}$ où a est fixe et y varie. □

2. Spectre réel, site réel étale

2.1 L'espace réel associé à un schéma

L'exposition suit [Sch94, (0.6)].

Les points du spectre réel et sa topologie.

Définition 2.1.1. Soit A un anneau. Le *spectre réel* de A, noté $\operatorname{Sper} \mathrm{A}$, est l'ensemble des couples $(\kappa(x), \leqslant_\xi)$ où x est un point de $\operatorname{Spec} \mathrm{A}$ et où $\leqslant_\xi$ est un ordre sur $\kappa(x)$.

Notation 2.1.2. Soit A un anneau. Si $\xi = (x, \alpha)$ est un point de $\operatorname{Sper} \mathrm{A}$, nous notons $\kappa(\xi)$ la clôture réelle de $(\kappa(x), \alpha)$ et $a(\xi)$ l'image de $a \in \mathrm{A}$ dans $\kappa(\xi)$.

Définition 2.1.3. Soit A un anneau. La topologie de $\operatorname{Sper} \mathrm{A}$ est la topologie engendrée par les ensembles de la forme $\mathrm{D}(a) = \{\xi \in \operatorname{Sper} \mathrm{A}, a(\xi) > 0\}$, c'est-à-dire la topologie dont les ouverts sont les réunions d'intersection finie d'ensembles de la forme $\mathrm{D}(a)$ [9].

Fonctorialité. Soient A et B des anneaux et soit $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un morphisme d'anneaux ; notons $\varphi : \operatorname{Spec} \mathrm{B} \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ le morphisme de schémas associé. Soit $\zeta = (y, \leqslant_\xi)$ un point de $\operatorname{Sper} \mathrm{B}$. Le morphisme φ induit un point $x = \varphi(y)$ de $\operatorname{Spec} \mathrm{A}$ et un morphisme $\varphi^* : \kappa(x) \to \kappa(y)$ de corps. En particulier, $\kappa(x)$ hérite d'un ordre $\leqslant_\zeta$ donné par $u \leqslant_\zeta v$ lorsque $\varphi^*(u) \leqslant_\xi \varphi^*(v)$. On pose $\phi(\xi) = \zeta$ où $\zeta = (x, \leqslant_\zeta)$: cela définit une application $\phi : \operatorname{Sper} \mathrm{B} \to \operatorname{Sper} \mathrm{A}$. La construction $f \mapsto \phi$ est compatible à la composition des morphismes et à l'identité : ainsi, $\mathrm{A} \mapsto \operatorname{Sper} \mathrm{A}$ s'étend en un foncteur de la catégorie des anneaux vers la catégorie des ensembles. De plus, l'application ϕ est continue : en effet, pour tout $a \in \mathrm{A}$, on vérifie que $\phi^{-1}(\mathrm{D}(a)) = \mathrm{D}(f(a))$, essentiellement par définition de l'ordre sous-jacent à $\phi(\xi)$ si $\xi \in \operatorname{Sper} \mathrm{B}$. Le foncteur $\mathrm{A} \mapsto \operatorname{Sper} \mathrm{A}$ se factorise donc en un foncteur de la catégorie des anneaux vers la catégorie des espaces topologiques.

Support. Soit A un anneau. On dispose alors d'une application évidente $\operatorname{supp} : \operatorname{Sper} \mathrm{A} \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ envoyant $(x, \leqslant)$ sur x dite de *support*. L'application supp est continue car $\operatorname{supp}^{-1}(\mathrm{D}(a)) = \mathrm{D}(a) \cup \mathrm{D}(-a)$ pour tout $a \in \mathrm{A}$.

Remarque. Même si k est un corps réel, il y a *a priori* plusieurs ordres sur k donc l'application $\operatorname{Sper} k \to \operatorname{Spec} k$ n'est pas bijective. C'est néanmoins le cas si k est réel clos, par exemple, bien que ce ne soit pas équivalent comme le révèle le cas de $\mathbb{Q}$.

Espaces spectraux et topologie constructible. Les espaces spectraux furent introduits par Hochster dans sa thèse pour caractériser les espaces topologiques homéomorphes au spectre d'un anneau.

Définition 2.1.4. Soit X un espace topologique. On dit que X est *spectral* lorsque X est un espace de Kolmogorov — si $x \neq y$ sont des points de X, alors $x \notin \overline{\{y\}}$ ou $y \notin \overline{\{x\}}$ —, X est quasi-compact, les fermés irréductibles de X possèdent un point générique et X possède une base d'ouverts quasi-compacts stable par intersection finie.

9. Contrairement au cas des schémas, *a priori*, $\mathrm{D}(ab)$ contient strictement $\mathrm{D}(a) \cap \mathrm{D}(b)$.

Exemple 2.1.5. Si A est un anneau, alors Spec A et Sper A sont spectraux : c'est standard dans le premier cas ; voir [BCR87, Corollaire 7.1.13, Corollaire 7.1.16] dans le second — Sper A est de Kolmogorov car c'est le cas de Spec A et Supp : Spec A $\to$ Sper A est continue tandis que les cônes positifs des ordres correspondants se contiennent l'un l'autre.

Soit X un espace topologique spectral. Les ouverts quasi-compacts et leurs complémentaires forment une sous-base d'une topologie dite *constructible* sur X [10]. Un sous-espace Z de X est fermé pour la topologie constructible si, et seulement si, il est proconstructible : par définition, cela signifie que Z est l'intersection d'une famille d'ensembles constructibles, où une partie C de X est constructible lorsque

$$\mathrm{C} = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{U}_i \cap (\mathrm{X} \setminus \mathrm{V}_i))$$

où U_i (respectivement V_i) est un ouvert quasi-compact de X pour tout i. Noter que la classe des parties constructibles de X est stable par réunion finie, intersection finie et passage au complémentaire. On note $\mathrm{X}_{\mathrm{cons}}$ l'ensemble (sous-jacent à) X muni de la topologie constructible.

Exemple 2.1.6. Si A est un anneau noethérien, la topologie constructible sur le spectre de A considérée ci-dessus coïncide avec la topologie constructible usuelle : en effet, tout ouvert de Spec A (pour la topologie de Zariski) est alors quasi-compact.

Si X est spectral, la topologie constructible fait de X un espace compact et totalement discontinu ([Sta22, Tag 0901]). En outre :

Lemme 2.1.7. *Les ouverts-fermés pour la topologie constructible sont exactement les parties constructibles de* X. [11]

Démonstration. Si C est constructible, alors C est proconstructible donc fermé pour la topologie constructible ; en outre, $\mathrm{X} \setminus \mathrm{C}$ est constructible donc fermé pour la topologie constructible, de sorte que C est ouvert pour la topologie constructible. Réciproquement, soit E une partie ouverte et fermée de X pour la topologie constructible. Comme $\mathrm{X}_{\mathrm{cons}}$ est compact, son fermé $\mathrm{X} \setminus \mathrm{E}$ est compact pour la topologie constructible : en écrivant l'ensemble proconstructible E comme intersection d'ensembles constructibles, on en déduit que $\mathrm{X}\setminus\mathrm{E}$ est réunion finie d'ensembles constructibles donc est constructible, de sorte que E est constructible. □

Remarque. Soit X un espace spectral. La topologie constructible sur X est alors plus fine que la topologie de X. En effet, soit F un fermé de X : il s'agit de montrer que F est un fermé de $\mathrm{X}_{\mathrm{cons}}$. Si $\mathrm{U} = \mathrm{X} \setminus \mathrm{F}$ est quasi-compact, alors U est constructible par définition : comme la famille des ensembles constructibles est stable par passage au complémentaire, F est constructible donc proconstructible, c'est-à-dire fermé. En général, puisque X est spectral, U est réunion d'ouverts quasi-compacts donc F est intersection d'ensembles constructibles et est par conséquent fermé pour la topologie constructible.

Définition 2.1.8. Soient X et Y des espaces spectraux et soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ une application. On dit que f est *spectrale* lorsque $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ et $f : \mathrm{Y}_{\mathrm{cons}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{cons}}$ sont continues.

Remarque. Il revient au même de demander que f soit continue (pour les topologies usuelles) et quasi-compacte, c'est-à-dire que $f^{-1}(\mathrm{U})$ soit quasi-compact pour tout ouvert quasi-compact U de X ([Sta22, Tag 0G1J]). En effet, supposons $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ continue. Alors, f est spectrale si, et seulement si, l'image réciproque d'un ensemble proconstructible est proconstructible puisque ces ensembles sont les fermés de la topologie constructible : comme les ensembles constructibles sont les ouverts-fermés de la topologie constructible et comme les ensembles proconstructibles sont les intersections de familles d'ensembles constructibles, il revient au même de demander que l'image réciproque d'un ensemble constructible soit constructible. Si c'est le cas, alors pour tout ouvert U quasi-compact de X, $f^{-1}(\mathrm{U})$ est fermé dans $\mathrm{Y}_{\mathrm{cons}}$ qui est quasi-compact donc $f^{-1}(\mathrm{U})$ est quasi-compact pour la topologie constructible.

10. Si X n'est pas nécessairement spectral, il faut remplacer quasi-compact par *rétrocompact* : un ouvert U d'un espace topologique Y est rétrocompact lorsque $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ est quasi-compact pour tout ouvert quasi-compact V de Y.

11. L'auteur ne prétend à aucune originalité mais n'a pas trouvé la référence dans le *Stacks Project*.

Or, Y est spectral donc l'application $\mathrm{Id} : \mathrm{Y}_{\mathrm{cons}} \to \mathrm{Y}$ est continue : il s'ensuit que l'application $\mathrm{Id} : f^{-1}(\mathrm{U}) \to f^{-1}(\mathrm{U})$ est surjective et continue si la source est munie de la topologie induite par $\mathrm{Y}_{\mathrm{cons}}$ donc $f^{-1}(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{Y}$ est quasi-compact. Réciproquement, si f est quasi-compacte, alors pour tout ensemble constructible C de X, en écrivant $\mathrm{C} = \bigcup(\mathrm{U}_i \cap (\mathrm{X} \setminus \mathrm{V}_i))$ où U_i et V_i sont quasi-compacts,

$$f^{-1}(\mathrm{C}) = \bigcup(f^{-1}(\mathrm{U}_i) \cap (\mathrm{Y} \setminus f^{-1}(\mathrm{V}_i))$$

est constructible car $f^{-1}(\mathrm{U}_i)$ et $f^{-1}(\mathrm{V}_i)$ sont quasi-compacts pour tout i par hypothèse.

On peut donner une condition pour qu'une application spectrale entre espaces spectraux soit un homéomorphisme en termes des spécialisations :

Définition 2.1.9. Soit X un espace topologique et soit (x, x') un couple de points de X. On dit que x est une *spécialisation* de x' ou que x' est une *générisation* de x si $x \in \overline{\{x'\}}$; on note $x' \succ x$. On dit que $\mathrm{Z} \subseteq \mathrm{X}$ est *stable par spécialisation* lorsque pour toute spécialisation $z' \succ z$ dans X telle que $z' \in \mathrm{Z}$, l'élément z de X appartient à Z.

Si Y est un espace topologique et $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est une application, on dit que *les spécialisations se relèvent le long de* f ou que f est spécialisante lorsque pour tout spécialisation $x' \succ x$ dans X et tout $y' \in \mathrm{Y}$ tel que $f(y') = x'$, il existe une spécialisation $y' \succ y$ de y' telle que $f(y) = x$. On dit que *les générisations se relèvent le long de* f ou que f est générisante lorsque pour toute générisation $x' \succ x$ et tout $y \in \mathrm{Y}$ tel que $f(y) = x$, il existe une générisation $y' \succ y$ de y telle que $f(y') = y'$.

Remarque. Si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est une application continue, alors $f(\overline{\mathrm{A}}) \subseteq \overline{f(\mathrm{A})}$ pour tout sous-ensemble A de Y donc si y est un point de Y adhérent à $\{y'\}$, alors $f(y)$ est adhérent à $f(y')$. Autrement dit, la spécialisation et la générisation descendent le long des applications continues.

Lemme 2.1.10 ([Sta22, Tag 09XU])**.** *Soient* X *et* Y *des espaces spectraux et soit* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *une application spectrale, bijective et spécialisante. Alors,* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *est un homéomorphisme.*

Idée de preuve. Comme $\mathrm{X}_{\mathrm{cons}}$ est quasi-compact et $\mathrm{Y}_{\mathrm{cons}}$ est séparé, puisque c'est une bijection continue par hypothèse, $f : \mathrm{Y}_{\mathrm{cons}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{cons}}$ est un homéomorphisme ([Sta22, Tag 08YE]). En outre, si Z est un fermé de Y tel que $\mathrm{Y} \setminus \mathrm{Z}$ est quasi-compact, alors $f(\mathrm{Z})$ est stable par spécialisation, et fermé pour la topologie constructible par ce qui a déjà été vu : d'après [Sta22, Tag 0903], $f(\mathrm{Z})$ est fermé. Comme Y est spectral, tout fermé de Y est intersection de fermés dont le complémentaire est quasi-compact et f préserve les intersections car elle est injective : le résultat suit. □

Définition 2.1.11. Un espace topologique X est *localement spectral* lorsqu'il existe un recouvrement de X par des ouverts qui sont des espaces spectraux pour la topologie induite. La topologie constructible $\mathrm{X}_{\mathrm{cons}}$ est alors définie par recollement. Si Y et X sont localement spectraux, une application $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est localement spectrale lorsque $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ et $f : \mathrm{Y}_{\mathrm{cons}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{cons}}$ sont continues.

Remarque. Supposons que X est le spectre réel d'un anneau A. Dans ce cas, un ouvert quasi-compact de X est réunion finie d'ouverts de la forme

$$\mathrm{D}(a_1, \ldots, a_n) = \{\xi \in \mathrm{X}, a_1(\xi) > 0, \ldots, a_n(\xi) > 0\}.$$

Le principe de Tarski–Seidenberg — plus précisément, son corollaire 1.4.3 — montre alors que les parties constructibles de X sont exactement les parties de X de la forme $\{\xi, \kappa(\xi)$ vérifie $\Phi\}$ où Φ est une formule (du premier ordre) sans variable libre mais éventuellement avec quantificateurs à coefficients dans A. Plus précisément, le principe de Tarski–Seidenberg implique qu'une telle partie est constructible : en effet, si Φ est construite par combinaison booléenne d'égalités et d'inégalités polynomiales à coefficients dans A, alors par définition, l'ensemble des ξ tels que le corps réel clos $\kappa(\xi)$ satisfait cette formule est construit par intersection et réunion finies et par passage au complémentaire à partir des $\mathrm{D}(a_1, \ldots, a_n)$ et le principe de Tarski–Seidenberg nous apprend qu'on peut toujours se ramener à une telle formule Φ.

Espace réel associé à un schéma. Soit désormais X un schéma. Recouvrons X par une famille $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'ouverts affines. On peut alors recoller les espaces $\operatorname{Sper}\mathscr{O}_\mathrm{X}(\mathrm{U}_i)$ le long des ouverts $\operatorname{supp}^{-1}(\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j)$. L'espace topologique obtenu ne dépend pas (à unique homéomorphisme près) du choix du recouvrement $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ donc la définition suivante est correcte :

Définition 2.1.12. L'espace topologique X_r construit ci-dessus est l'*espace réel* associé à X, noté X_r.

Pour tout $i\in\mathrm{I}$, le morphisme structural $\operatorname{Sper}\mathscr{O}_\mathrm{X}(\mathrm{U}_i)\to\mathrm{X}_r$ est une immersion ouverte.

Soient Y et X des schémas et soit $f:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ un morphisme de schémas. On recouvre X par une famille $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'ouverts affines et, pour tout $i\in\mathrm{I}$, on recouvre $f^{-1}(\mathrm{U}_i)$ par une famille $(\mathrm{V}_{ij})_{j\in\mathrm{J}_i}$ d'ouverts affines. Pour tout $i\in\mathrm{I}$ et tout $j\in\mathrm{J}_i$, le morphisme f induit une application continue $(\mathrm{V}_{ij})_r\to(\mathrm{U}_i)_r$: ces applications se recollent en une application continue $f_r:\mathrm{Y}_r\to\mathrm{X}_r$. L'association $\mathrm{X}\mapsto\mathrm{X}_r$ est fonctorielle *via* cette constructionn.

Exemple 2.1.13. Soit U un ouvert du schéma X ; la flèche $\mathrm{U}_r\to\mathrm{X}_r$ est alors une immersion ouverte.

Le support s'étend en une application continue $\operatorname{Supp}:\mathrm{X}_r\to\mathrm{X}$ pour tout schéma X.

Description par le foncteur des points. Soit X un schéma. Si k' et k'' sont des corps réels clos et si $\operatorname{Spec}k\to\mathrm{X}$ et $\operatorname{Spec}k''\to\mathrm{X}$ sont des morphismes de schémas, on dit que f et f' sont *équivalents* lorsqu'il existe un corps réel clos k et un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec}k' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\operatorname{Spec}k \arrow[rr] & & \mathrm{X} \\
 & \operatorname{Spec}k' \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Les points de X_r correspondent alors aux classes d'équivalence de morphismes $\operatorname{Spec}k\to\mathrm{X}$ où k est un corps réel clos. Notons que grâce à la propriété d'amalgamation des corps réels clos, on obtient la même relation d'équivalence en renversant les flèches entre spectres de corps réels clos dans le diagramme ci-dessus — mais le corps k change !

2.2 Le site réel étale

Définition 2.2.1. Soit $(f_i:\mathrm{U}_i\to\mathrm{U})_i$ une famille de morphismes de schémas. On dit que $(f_i)_i$ est *réel-surjective* lorsque U_r est la réunion des $f_r((\mathrm{U}_i)_r)$.

Lemme 2.2.2 ([Sch94, (1.2)])**.** *Soit* X *un schéma. Les familles réel-surjectives de morphismes de* X*-schémas induisent une prétopologie sur la catégorie des* X*-schémas.*

Démonstration. Les produits fibrés existent dans la catégorie des X-schémas. Vérifions désormais les axiomes de prétopologie.

- Comme l'association $\mathrm{U}\mapsto\mathrm{U}_r$ est fonctorielle, les isomorphismes forment des familles réel-surjectives.
- Soit U un X-schéma, soit $(\mathrm{U}_i\to\mathrm{U})_i$ une famille réel-surjective de morphismes de U-schémas et soit V un U-schéma. Soit k' un corps réel clos et soit $\operatorname{Spec}k'\to\mathrm{V}$ un morphisme. Le point $\operatorname{Spec}k'\to\mathrm{V}\to\mathrm{U}$ de U_r induit par hypothèse un point de U_i pour un indice i : il existe donc des corps réels clos k et k'' et un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec}k' \arrow[r] & \mathrm{V} \arrow[dr] & \\
\operatorname{Spec}k \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & \mathrm{U} \\
 & \operatorname{Spec}k'' \arrow[r] & \mathrm{U}_i \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On utilise ici l'amalgamation des corps réels clos. On déduit de ce diagramme un morphisme $\operatorname{Spec} k \to \mathrm{U}_i \times_{\mathrm{U}} \mathrm{V}$ qui factorise $\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} k' \to \mathrm{V}$, lequel induit le même point de V_r que $\operatorname{Spec} k' \to \mathrm{V}$.

– On prouve le caractère local [12] de façon analogue en utilisant l'amalgamation des corps réels clos.

□

Définition 2.2.3. Le *site réel étale* de X est le site dont la catégorie sous-jacente est la catégorie des X-schémas étales et dont la topologie est donnée par la prétopologie engendrée par les familles de morphismes de X-schémas réel-surjectives. Ce site est noté $\mathrm{X}_{\text{rét}}$; la catégorie des faisceaux sur $\mathrm{X}_{\text{rét}}$ est notée $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$.

Remarque. La topologie réel-étale *n'est pas* sous-canonique en général, c'est-à-dire que les préfaisceaux représentables ne sont pas toujours des faisceaux pour cette topologie. Par exemple, si X est un schéma sur un corps qui n'est pas réel, alors la topologie réel-étale est la topologie discrète, c'est-à-dire que la famille *vide* est un recouvrement de tout X-schéma étale donc si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur icelle, alors $\mathscr{F}(\mathrm{U}) = *$ pour tout X-schéma étale U. En particulier, si $\mathrm{X} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, alors X n'est pas un faisceau sur la catégorie des X-schémas étales pour cette topologie.

Donnons un exemple moins idiot qui montre que la topologie réel-étale n'est pas toujours sous-canonique sur la catégorie C des S-schémas. [13] Posons $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}$. Considérons l'ouvert $\mathrm{U} = \mathrm{D}(t^2+1)$ de $\mathrm{X} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$. L'inclusion de U dans X est un recouvrement réel-étale : en effet, comme le point générique de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ appartient à U — ce dernier est un ouvert non vide —, il suffit de vérifier que U contient les points fermés, c'est-à-dire les points de $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$, ce qui est évident. En outre, $\mathrm{U} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{U} = \mathrm{U}$. Cependant, la flèche

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = \mathbb{R}[t] \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{U}, \mathrm{X}) = \mathbb{R}[t]_{t^2+1}$$

n'est pas surjective car $\frac{1}{1+t^2} \notin \mathbb{R}[t]$.

2.3 Le théorème de comparaison

(R)appels sur les topos.

Notation 2.3.1. Si C est une catégorie, nous notons $\widehat{\mathsf{C}}$ la catégorie [14] des préfaisceaux d'*ensembles* sur C, c'est-à-dire des foncteurs de C^{op} vers la catégorie des ensembles. Si C est un site, nous notons $\widetilde{\mathsf{C}}$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathsf{C}}$ dont les objets sont les faisceaux ; si τ désigne la topologie de C, on dispose d'un foncteur $a_\tau : \widehat{\mathsf{C}} \to \widetilde{\mathsf{C}}$ dit de *faisceautisation* et $a_\tau(\mathscr{F})$ est le *faisceautisé* ou *faisceau associé* à $\mathscr{F}$: il est obtenu en appliquant deux fois le foncteur L_τ de [AGV71, Exposé II, 3.0.5] d'après [AGV71, Exposé II, Proposition 3.2] et est adjoint à gauche à l'inclusion de $\widetilde{\mathsf{C}}$ dans $\widehat{\mathsf{C}}$. Il préserve donc les colimites ; en outre, il préserve les limites finies, c'est-à-dire qu'il est exact à gauche car L_τ est exact à gauche ([AGV71, Exposé II, Proposition 3.2, 1)]) : il est en particulier exact.

Soient C et D des catégories. Si $u : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est un foncteur, il induit un foncteur $u^* : \widehat{\mathsf{D}} \to \widehat{\mathsf{C}}$ associant à un préfaisceau $\mathscr{G}$ le préfaisceau $\mathscr{G} \circ u$.

Lemme 2.3.2. *Si C est petite, alors le foncteur u^* possède un adjoint à gauche noté $u_!$.*

Démonstration. C'est [AGV71, Exposé I, Proposition 5.1]. Rappelons le principe de la démonstration. Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur C. Soit Y un objet de D. Considérons la catégorie $\mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}}$ suivante. Les objets sont les couples (X, m) formé d'un objets X de C et d'un morphisme $m : \mathrm{Y} \to u(\mathrm{X})$. Les flèches de (X, m) vers (X', m') sont les morphismes $\xi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ tels que $m' = u(\xi) \circ m$; ils se composent de manière évidente et l'identité est tout aussi évidente. Si Y' est un objet de D et si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ est un morphisme, il induit un foncteur $\mathsf{I}_u^f : \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}} \to \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}'}$ par composition — nous dirons que l'association $\mathrm{Y}' \mapsto \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}'}$ est fonctorielle. On dispose en outre d'un foncteur $p_{\mathrm{Y}} : \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}} \to \mathsf{C}$ associant à un objet (X, m) de $\mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}}$ l'objet X de C. Si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ est un morphisme de D, le diagramme

12. « Les recouvrements de recouvrements sont des recouvrements ».

13. Cet exemple a été communiqué à l'auteur par Antoine Ducros.

14. Modulo les problèmes ensemblistes usuels que nous ignorons mais auxquels on peut remédier facilement en supposant C petite.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}} \arrow[rr, "\mathsf{I}_u^f"] \arrow[dr, "p_{\mathrm{Y}}"'] & & \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}'} \arrow[dl, "p_{\mathrm{Y}'}"] \\ & \mathsf{C} & \end{tikzcd}$$

est commutatif. On pose

$$u_!\mathscr{F}(\mathrm{Y}) = \operatorname{colim} \mathscr{F} \circ p_{\mathrm{Y}}.$$

La fonctorialité des colimites et de l'association $\mathrm{Y}' \mapsto \mathsf{I}_u^{\mathrm{Y}'}$ étend l'association ainsi définie en un préfaisceau $u_!\mathscr{F}$ sur D puis $\mathscr{F}' \mapsto u_!\mathscr{F}'$ en un foncteur $u_!$ de $\widehat{\mathsf{C}}$ vers $\widehat{\mathsf{D}}$ qui est adjoint à gauche du foncteur u^*. □

Supposons en outre que C et D sont des sites.

Définition 2.3.3. Le foncteur $u : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est *continu* lorsque pour tout faisceau $\mathscr{G}$ sur D, le préfaisceau $u^*\mathscr{G}$ est un faisceau. Nous notons u_s le foncteur de $\widetilde{\mathsf{D}} \to \widetilde{\mathsf{C}}$ le foncteur induit par u si c'est le cas.

Lemme 2.3.4. *Supposons $u : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ continu ; notons τ_{D} la topologie sous-jacente à D. Si C est petite, alors le foncteur $u^s = a_{\tau_{\mathsf{D}}} \circ u_! : \widehat{\mathsf{C}} \to \widehat{\mathsf{D}}$ est adjoint à gauche de u^s : dans ce cas, il est exact à gauche si $u_!$ l'est, par exemple si u l'est.*

Démonstration. C'est [AGV71, Exposé III, Proposition 1.3] (et [AGV71, Exposé I, Proposition 5.4, 4)]). □

Définition 2.3.5. Un *morphisme de sites* de D vers C est un foncteur continu $u : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ tel que u^s est exact à gauche. Si $f : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ est le morphisme de sites correspondant au foncteur $u : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, on note f^* le morphisme u^s et f_* le morphisme u_s.

Venons-en enfin aux topos :

Définition 2.3.6. Un *topos* est une catégorie des faisceaux sur un site ; nous disons que $\widetilde{\mathsf{C}}$ est le topos *associé à* C. Si E et E' sont des topos, un *morphisme de topos* de E dans E' est un couple $f = (f^*, f_*)$ de foncteurs adjoints $f^* : \mathsf{E}' \to \mathsf{E}$ et $f_* : \mathsf{E} \to \mathsf{E}'$ tels que f^* est exact à gauche.

Remarque. Par extension, on appelle aussi topos toute catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un site. Par exemple, la catégorie des ensembles est équivalente à la catégorie des faisceaux sur le site dont la catégorie sous-jacente a un objet et un morphisme, la topologie étant prescrite : c'est donc un topos dit *topos des ensembles*.

Les morphismes de topos qui nous intéressent seront souvent construits de la manière suivante :

Lemme 2.3.7. *Soit $f : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ un morphisme de sites. Le couple (f^*, f_*) est alors un morphisme de topos de $\widetilde{\mathsf{C}}$ vers $\widetilde{\mathsf{D}}$.*

Exemple 2.3.8. Si Z est un espace topologique, nous notons $\mathsf{Ouv}(\mathrm{Z})$ la catégorie des ouverts de Z. Nous munissons $\mathsf{Ouv}(\mathrm{Z})$ de la prétopologie dont les recouvrements sont les recouvrements ouverts dans Z ; nous notons $\widetilde{\mathrm{Z}}$ le topos associé.

Soient X et Y des espaces topologiques et soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue. L'application f induit un foncteur $u : \mathsf{Ouv}(\mathrm{Y}) \to \mathsf{Ouv}(\mathrm{X})$ associant à un ouvert V de Y l'ouvert $f^{-1}(\mathrm{V})$ de X. Il est connu en topologie que ce foncteur est continu et par définition, u_s est le foncteur f_* bien connu en topologie. En particulier, il résulte de l'adjonction (f^{-1}, f_*) que $u^s = f^{-1}$ est exact. Ainsi, u induit un morphisme $\varphi : \widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{Y}}$ de topos tel que $\varphi^* = f^{-1}$ et $\varphi_* = f_*$: pour cette raison, nous notons $\varphi = f$. Lorsque Y est sobre [15], *tout* morphisme de topos est construit ainsi : plus précisément, si $\psi : \widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{Y}}$ est un morphisme de topos, alors il est isomorphe (en un sens naturel mais à préciser) à $f : \widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{Y}}$

15. Par définition, un espace topologique est *sobre* si tout fermé irréductible d'icelui possède un et un seul point générique. Presque tous les espaces topologiques rencontrés « dans la nature » sont sobres, y compris les espaces topologiques dont les points sont fermés et l'espace topologique sous-jacent à un schéma ou l'espace réel associé à un schéma car tout espace localement spectral est sobre.

pour une application continue $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ bien déterminée ([AGV71, Exposé IV, 4.2.3]). C'est en cela que les topos sont une généralisation des espaces topologiques (sobres [16]).

Remarque. Rappelons que si (L, R) sont des foncteurs adjoints, les assertions suivantes sont équivalentes.

- Les foncteurs L et R sont pleinement fidèles.
- Le foncteur L est une équivalence de catégorie.
- Le foncteur R est une équivalence de catégorie.

En outre, si une adjonction entre L et R est donnée, alors L (respectivement R) est pleinement fidèle si, et seulement si, l'unité (respectivement la counité) de cette adjonction est un isomorphisme. Cela justifie la définition suivante.

Définition 2.3.9. Un morphisme de topos est une *équivalence* de topos lorsque l'un des (donc les) foncteurs adjoints sous-jacents est (sont) une (des) équivalence(s) de catégories.

Le théorème de comparaison.

Notation 2.3.10. Soit X un schéma. Nous notons $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$ le topos associé au site $\mathrm{X}_{\text{rét}}$.

Le théorème de comparaison est alors le suivant :

Théorème 2.3.11 ([Sch94, (1.3) Theorem])**.** *Soit* X *un schéma. Les topos* $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$ *et* $\widetilde{\mathrm{X}_r}$ *sont alors naturellement équivalents.*

Ce théorème est très utile. Parce que la catégorie sous-jacente au topos $\mathrm{X}_{\text{rét}}$ est la catégorie des X-schémas étales, ce topos est particulièrement adapté à la comparaison avec la topologie étale et à l'étude de la cohomologie étale ; et l'étude de ce topos est grandement facilitée par le fait qu'il est équivalent au topos associé à un espace topologique qui possède en outre des propriétés spécifiques.

La stratégie de preuve est la suivante. On introduire un topos auxiliaire $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{aux}}}$ et on construit des morphismes de topos $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}} \leftarrow \widetilde{\mathrm{X}_{\text{aux}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_r}$: on montre ensuite que les morphismes $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{aux}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$ et $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{aux}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_r}$ sont des équivalences ; c'est facile et formel pour le premier ; pour le second, on utilise un avatar d'un résultat classique de géométrie complexe : un morphisme étale induit un homéomorphisme local au niveau des espaces réels. L'un des ingrédients principaux est l'usage de la notion d'anneau de valuation réel clos que nous présentons désormais.

Anneaux de valuations réels clos.

Définition 2.3.12. Soit A un anneau. On dit que A est un *anneau de valuation* si A est intègre et si pour tout élément x de K, x appartient à A ou x^{-1} appartient à A. Un tel anneau est local : nous notons $\mathfrak{m}_{\mathrm{A}}$ son idéal maximal, $\kappa(\mathfrak{m}_{\mathrm{A}})$ son corps résiduel et K son corps des fractions. On dit que A est *réel clos* lorsque les corps K et $\kappa(\mathfrak{m}_{\mathrm{A}})$ sont réels clos.

Remarque. Un anneau de valuation est *intégralement clos* : si A est un anneau de valuation de corps des fractions K et si $x \in \mathrm{K}$ vérifie $\mathrm{P}(x) = 0$ où $\mathrm{P} \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$ est unitaire, alors $x \in \mathrm{A}$. En effet, si $x \notin \mathrm{A}$, alors $x^{-1} \in \mathrm{A}$; on écrit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_0$ où $a_i \in \mathrm{A}$: il vient que

$$x = -a_{n-1} - \cdots - a_0 x^{-(n-1)} \in \mathrm{A}$$

d'où une contradiction donc $x \in \mathrm{A}$.

Les anneaux de valuation réels clos — ou plus généralement réels — sont intimement liés à la notion de sous-anneau convexe :

16. Il n'y a pas lieu d'espérer mieux : si Z est un espace topologique, il existe un espace topologique sobre Z' et une application continue $i : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}'$ initiale parmi les applications continues de Z vers un espace topologique sobre et l'application induite par i entre topos est un isomorphisme ([AGV71, Exposé IV, 4.2.1]).

Définition 2.3.13. Soit K un corps réel clos, ou plus généralement un corps ordonné, et soit A un sous-anneau de K. On dit que A est *convexe* lorsque pour tout $(z,x) \in \mathrm{K} \times \mathrm{A}$, si $0 \leqslant z \leqslant x$, alors $z \in \mathrm{A}$. L'*enveloppe convexe* de A est $\{x \in \mathrm{K}, \exists a \in \mathrm{A}, a \leqslant x \leqslant -a\}$: c'est le plus petit sous-anneau convexe de K contenant A.

Remarque. Demander que A soit convexe revient à de demander que $[0,1] = \{x \in \mathrm{K}, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ soit inclus dans A. En effet, comme $1 \in \mathrm{A}$, c'est nécessairement le cas ; réciproquement, si $[0,1] \subseteq \mathrm{A}$ et si $0 < b < a$ où $a \in \mathrm{A}$, alors $ba^{-1} \in [0,1]$ donc $ba^{-1} \in \mathrm{A}$ et $b = ba^{-1}a \in \mathrm{A}$. On en déduit que si A est convexe, alors tout sous-anneau de K contenant A est convexe.

Lemme 2.3.14. *Soit* A *un anneau. Alors,* A *est un anneau de valuation réel clos si, et seulement si,* A *est un sous-anneau convexe d'un corps réel clos.*

Démonstration. Supposons que A soit un sous-anneau convexe du corps réel clos K. Soit $x \in \mathrm{K}$ tel que x n'appartient pas à A ; montrons que x^{-1} appartient à A. Quitte à remplacer x par $-x$, on peut supposer x positif. Si $x \leqslant 1$, alors comme $1 \in \mathrm{A}$ et comme A est convexe, $x \in \mathrm{A}$ donc $1 < x$ de sorte que $x^{-1} < 1$: par conséquent, $x^{-1} \in \mathrm{A}$ par convexité de A. L'anneau A est donc de valuation. On va montrer le lemme suivant :

Lemme 2.3.15 ([BCR87, Proposition 10.1.6])**.** *Soit* $(\mathrm{F}, \leqslant)$ *un corps ordonné et soit* B *un anneau de valuation convexe de* F *; notons* κ *le corps résiduel de* B *et* $\pi : \mathrm{B} \to \kappa$ *le morphisme quotient. Il existe alors un et un seul ordre sur* κ *telle que pour tout* $x \in \mathrm{B}^*$*,* $0 < \pi(x)$ *pour cet ordre si, et seulement si,* $0 < x$ *dans* F*.*

Démonstration. On vérifie que si x et x' sont des éléments de B^* tels que $\pi(x) = \pi(x')$, alors x et x' sont de même signe. En effet, posons $y = x' - x$: c'est un élément de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B et $x' = x(1 + x^{-1}y)$ où $0 < 1 + x^{-1}y$ — en effet, si cette dernière inégalité n'est pas satisfaite, alors $0 \leqslant xy^{-1} \leqslant 1$ donc $xy^{-1} \in \mathrm{B}$ par convexité de sorte que $y^{-1} \in \mathrm{B}$, ce qui contredit le fait que y^{-1} appartient à $\mathfrak{m}$. Il est alors clair que la propriété de la proposition fournit (les éléments non nuls du cône positif d') un ordre sur κ. □

En particulier, comme K est réel clos, le corps résiduel κ de A possède un ordre naturel. Si $0 < \pi(x)$ où $x \in \mathrm{A}$, alors $0 < x$ donc il existe $w \in \mathrm{K}$ tel que $w^2 = x$; l'élément w de K est racine du polynôme unitaire $\mathrm{X}^2 - x$ à coefficients dans A, lequel est intégralement clos, donc $w \in \mathrm{A}$ et $\pi(x) = \pi(w)^2$ est un carré. L'ordre sur κ est donc déterminé par le fait que les éléments positifs sont les carrés. Pour conclure que A est un anneau de valuation réel clos, il suffit de justifier que κ est réel clos, c'est-à-dire que tout polynôme g de degré impair à coefficients dans κ possède une racine dans κ ; on relève g en un polynôme f unitaire à coefficients dans A : comme K est un corps réel clos, f possède une racine x dans K laquelle appartient à A puisque A est intégralement clos et $\pi(x)$ est alors une racine de g.

Réciproquement, supposons que A soit un anneau de valuation réel clos. Soit $(z,x) \in \mathrm{A}$ tel que $0 \leqslant z \leqslant x$. On peut supposer z non nul et différent de x. Si $x \in \mathrm{A}^*$ mais $z \notin \mathrm{A}$, alors $0 < x^{-1} < z^{-1}$; on peut écrire $x^{-1} = w^2$ où $w \in \mathrm{A}^*$ car K est réel clos, A est intégralement clos et $x^{-1} \in \mathrm{A}^*$ donc $0 < \pi(x) = \pi(w)^2 < \pi(z^{-1}) = 0$: contradiction. Si $x \in \mathfrak{m}$, on remplace x par $x+1$ et z par $z+1$. □

Lemme 2.3.16. *Si* B *est un anneau de valuation réel clos, alors la flèche de support de* Sper B *dans* Spec B *est un homéomorphisme.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B. Alors, $\mathrm{Frac}\,\mathrm{B}/\mathfrak{p}$ est réel clos. En effet, il suffit d'après le lemme prouvé dans la preuve précédente d'établir que $\mathrm{B}_{\mathfrak{p}}$ est convexe : or, $\mathrm{B}_{\mathfrak{p}}$ contient B et est donc convexe. On en déduit que l'application de support est une bijection continue. En outre, elle est ouverte : en effet, si $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{Sper}\,\mathrm{B}$ est ouvert, alors est réunion d'intersection finies d'ensembles de la forme $\mathrm{D}(f)$; comme l'application de support est injective, elle préserve les intersections finies : il suffit donc de montrer que si $f \in \mathrm{B}$, alors l'image de $\mathrm{D}(f)$ par l'application support est ouverte. Si $f < 0$, f est l'opposé d'un carré donc est négatif sur Sper B de sorte que $\mathrm{Sper}\,\mathrm{B} \supseteq \mathrm{D}(f) = \emptyset$ et l'assertion est évidente ; si $0 < f$, alors f est un carré donc f est strictement positive en les points où elle est non nulle : on en déduit que $\mathrm{Supp}\,\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(f) \subseteq \mathrm{Spec}\,\mathrm{B}$ qui est ouvert. L'application support est donc un homéomorphisme. □

Les anneaux de valuation réels clos jouent un rôle important dans la description de la topologie de l'espace réel associé à un schéma car ils permettent d'y décrire les spécialisations.

Définition 2.3.17. Soit B un anneau de valuation réel clos ; notons V son spectre. Soit X un schéma et soit $v : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ un morphisme de schémas. La *spécialisation induite par* v dans X_r est la spécialisation $v_r(\xi') \succ v_r(\xi)$ où ξ' (respectivement ξ) est le point générique (respectivement le point fermé) de V_r.

Remarque. C'est correct car le support étant un homéomorphisme, Sper B possède un point générique et un point fermé.

Toute spécialisation de l'espace réel d'un schéma peut être déterminée par un anneau de valuation réel clos :

Lemme 2.3.18 ([Sch94, (1.5.2)])**.** *Soit* X *un schéma et soit* $\xi' \succ \xi$ *une spécialisation dans* X_r*. Il existe alors un anneau de valuation réel clos* B *et un morphisme* $v : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ *de schémas où* $\mathrm{V} = \operatorname{Spec} \mathrm{B}$ *déterminant* $\xi' \succ \xi$ *tels que pour tout anneau de valuation réel clos* B' *et tout morphisme* $v' : \operatorname{Spec} \mathrm{B}' \to \mathrm{X}$ *déterminant la spécialisation* $\xi' \succ \xi$*, il existe un unique morphisme* $\varphi : \mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ *tel que* $v \circ \varphi = v'$*.*

Autrement dit, il existe un choix minimal pour déterminer cette spécialisation.

Démonstration. Notons B l'enveloppe convexe de l'image A de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},\operatorname{Supp}\xi}$ dans $\kappa(\xi')$ — rappelons qu'on note ainsi la clôture réelle du corps ordonné correspondant à ξ'. C'est par construction un sous-anneau convexe de $\mathrm{R} = \kappa(\xi')$ et donc un anneau de valuation discrète réel clos. Le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},\operatorname{Supp}\xi} \to \mathrm{B}$ induit un morphisme $\operatorname{Spec} \mathrm{B} \to \mathrm{X}$ possédant les propriétés requises. En effet, ce morphisme est local. Pour cela, il suffit de prouver que l'inclusion $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ est locale. Notons $\mathfrak{m}_{\mathrm{B}}$ l'idéal maximal de B ; il est clair que $\mathfrak{m}_{\mathrm{B}} \cap \mathrm{A} \subseteq \mathfrak{m}_{\mathrm{A}}$ puisque A est local. Soit x un élément de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\mathrm{A}}$ de A, qu'on peut supposer strictement positif — en tant qu'élément du corps réel clos R — : il s'agit de montrer que $x \in \mathfrak{m}_{\mathrm{B}}$, c'est-à-dire que $x^{-1} \notin \mathrm{B}$, soit encore, par définition de l'enveloppe convexe, que $y < x^{-1}$, enfin que $xy < 1$. Or, comme ξ est une spécialisation de ξ' et comme $0 = xy < 1$ dans $\kappa(\xi)$, $0 < xy$ dans R. La propriété de minimalité est alors claire. □

Les morphismes étales induisent des homéomorphismes locaux entre espaces réels.

Lemme 2.3.19 ([Sch94, (1.6) Lemma])**.** *Soient* X *et* Y *des schémas et soit* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *un morphisme de schémas. On suppose que l'extension* $\kappa(f(y))/\kappa(y)$ *induite par* f *est algébrique pour tout* $y \in \mathrm{Y}$*.*

a) Considérons un point ξ *de* X_r *induit par un morphisme* $\alpha : \operatorname{Spec} \mathrm{R} \to \mathrm{X}$ *de schémas où* R *est un corps réel clos. L'application évidente*

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{X}}(\operatorname{Spec} \mathrm{R}, \mathrm{Y}) \to \mathrm{Y}_r$$

est alors une bijection de $\operatorname{Hom}_{\mathrm{X}}(\operatorname{Spec} \mathrm{R}, \mathrm{Y})$ *sur la fibre* $f_r^{-1}(\xi)$*.*

b) Soit V *le spectre d'un anneau de valuation réel clos, soit* $v : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ *un morphisme de schémas et soit* $\zeta' \succ \zeta$ *une spécialisation telle que la spécialisation* $\xi' = f_r(\zeta') \succ f_r(\zeta) = \xi$ *est induite par* v*. Il existe alors un unique* X*-morphisme de* V *vers* Y *qui détermine* $\zeta' \succ \zeta$*.*

Remarque. On peut résumer l'item b) ainsi : *les spécialisations qui descendent en une spécialisation déterminée par* V *sont déterminées par* V.

Démonstration. Prouvons l'item a). En remplaçant X par $\operatorname{Spec} \kappa(x)$ où x est l'image du point de Spec R par α, Y par $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \operatorname{Spec} \kappa(x)$ et f par la projection $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \operatorname{Spec} \kappa(x)$, ce qui ne change pas les corps résiduels, on se ramène au cas où X est le spectre d'un corps k. De même, en partitionnant $\operatorname{Hom}_{\mathrm{X}}(\operatorname{Spec} \mathrm{R}, \mathrm{Y})$ selon les images du point de Spec R dans Y, on se ramène au cas où Y est le spectre d'un corps K, extension algébrique de k. Dans ce cas, la fibre de ξ dans Y_r est exactement l'ensemble des ordres sur K induisant le même ordre sur k que R. L'assertion à établir devient la suivante : si $\leqslant$ est un ordre sur K induisant l'ordre prescrit sur k, il existe un unique morphisme k-morphisme de K dans R induisant $\leqslant$.

Soit $\leqslant$ un ordre sur K induisant l'ordre prescrit sur k. Notons L la clôture réelle associée. Alors, comme K/k est algébrique, L/k est algébrique et par hypothèse, l'inclusion $k \to \mathrm{L}$ préserve l'ordre : par conséquent, $k \to \mathrm{L}$ est une clôture réelle de k. D'après la proposition 1.3.3, il existe alors un k-morphisme de L vers R — qui préserve nécessairement l'ordre car L et R sont réels clos — qui se restreint en un k-morphisme de K vers R qui induit $\leqslant$ sur K. Comme tout morphisme de K dans R induisant $\leqslant$ s'étend en un K-morphisme de L vers R, le résultat à établir est prouvé.

Prouvons désormais l'item b). L'unicité dans celui-ci résulte de l'item a) appliqué au corps des fractions de $\mathscr{O}_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$ en restreignant $\mathrm{V} \to \mathrm{Y}$ au point générique ; montrons l'existence. Notons y' le support de ζ' et y le support de ζ ; posons $x' = f(y')$ et $x = f(y)$. Comme v détermine $f_r(\zeta') \succ f_r(\zeta)$, x (respectivement x') est l'image du point fermé (respectivement générique) de V. On en déduit que le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \to \mathrm{V}$ qui induit v induit un morphisme $\mathrm{V} \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathfrak{m}_{x'})$ qui factorise f. Par ailleurs, comme $f(y) = x$ et $f(y') = x'$, f induit un morphisme $f : \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}/\mathfrak{m}_{y'}) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathfrak{m}_{x'})$ et le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathfrak{m}_{x'} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}/\mathfrak{m}_{y'}$ est injectif car $f(y') = x'$. Pour prouver l'existence de v, on peut remplacer Y par $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}/\mathfrak{m}_{y'})$, X par $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathfrak{m}_{x'})$ et f par le morphisme $f : \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}/\mathfrak{m}_{y'}) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathfrak{m}_{x'})$: autrement dit, on s'est ramené au cas où Y (respectivement X) est le spectre d'un anneau local N (respectivement M, sous-anneau local de N), f est induit par l'inclusion de M dans N et le support de ζ' (respectivement ζ) est le point générique y' (respectivement le point fermé y) du schéma Y.

Notons K (respectivement L) le corps des fractions de M (respectivement N). Par définition, à ζ' est attaché un ordre sur L : notons R sa clôture réelle. Par hypothèse sur le morphisme f, l'extension L/K est algébrique : comme $f_r(\zeta') = \xi'$, $\mathrm{K} \to \mathrm{L} \to \mathrm{R}$ est la clôture réelle de K relative à ξ'. Si v n'est pas minimale au sens du lemme 2.3.18, on peut remplacer v par la valuation minimale d'icelui et par conséquent supposer que $\mathrm{B} = \mathscr{O}_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$ est l'enveloppe convexe de M dans R et v est induite par l'inclusion de M dans B. Il s'agit alors de prouver que N est inclus dans B (en tant que sous-anneau de R).

Notons C l'enveloppe convexe de N dans R. Comme $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$, C contient B : on va montrer que $\mathrm{B} = \mathrm{C}$. Considérons la suite de morphismes

$$\mathrm{M} \to \kappa(\xi) \to \kappa(\zeta) \to \kappa_{\mathrm{C}}$$

où κ_{C} est le corps résiduel de l'anneau de valuation C — C est de valuation car il est convexe dans le corps réel clos R. Cette suite est bien définie car l'inclusion $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{C}$ est locale. Le morphisme $\mathrm{M} \to \kappa(\xi)$ se factorise par le corps résiduel $\kappa(x)$ et $\kappa(x) \to \kappa(\xi)$ est la clôture réelle de $(\kappa(x), \xi)$. En particulier, cette extension est *archimédienne*, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathrm{B}$, il existe $y \in \mathrm{M}$ tel que $-\overline{y} \leqslant \overline{x} \leqslant \overline{y}$ dans $\kappa(\xi)$: en effet, il suffit de prendre y tel que $x \leqslant y$ vu l'ordre de $\kappa(\xi)$ d'après le lemme 2.3.15 — un tel y existe car B est l'enveloppe convexe de M [17]. En outre, la flèche $\kappa(\xi) \to \kappa(\zeta)$ est un isomorphisme car $\kappa(\zeta)$ est une clôture réelle de $\kappa(x)$ vu que $\kappa(y)/\kappa(x)$ est algébrique. De même, $\kappa(\zeta) \to \kappa_{\mathrm{C}}$ est archimédienne. Ainsi, l'image de M dans κ_{C} est archimédienne : c'est *a fortiori* le cas de l'image de B dans κ_{C}, ce qui implique que $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{B}$ par convexité de B d'où le résultat. □

Proposition 2.3.20 ([Sch94, (1.7) Proposition]). *Soit*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Z} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & \mathrm{Z} \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{Y} \arrow[r, "f"] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien dans la catégorie des schémas. Supposons que pour tout $y \in \mathrm{Y}$, l'extension $\kappa(y)/\kappa(f(y))$ soit algébrique. L'application évidente

$$\gamma : (\mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Z})_r \to \mathrm{Y}_r \times_{\mathrm{X}_r} \mathrm{Z}_r$$

est alors un homéomorphisme.

17. Si R est la clôture réelle du corps ordonné $(\mathrm{F}, \leqslant)$, alors $\mathrm{F} \to \mathrm{R}$ est archimédienne. En effet, soit $x \in \mathrm{R}$. Par définition de la notion de clôture réelle, R/F est algébrique donc il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathrm{F}$ tels que $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$. On sait alors que $|x| \leqslant \mathrm{M} = 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$, lequel appartient à F car $|y| = \max\{y, -y\} \in \mathrm{F}$ si $y \in \mathrm{F}$.

Démonstration. Notons pour commencer que le morphisme p possède la même propriété que le morphisme f. Autrement dit, soit $t \in \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Z}$; alors, l'extension $\kappa(t)/\kappa(p(t))$ est algébrique. En effet, posons $z = p(t)$, $y = q(t)$ et $x = f(y) = g(z)$. Alors, t correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\operatorname{Spec} \mathrm{A}$ où $\mathrm{A} = \kappa(y) \otimes_{\kappa(x)} \kappa(z)$, c'est-à-dire que $\kappa(t) = \operatorname{Frac} \mathrm{A}/\mathfrak{p}$; pour montrer que $\kappa(t)/\kappa(z)$ est algébrique, il suffit de montrer que le morphisme $\kappa(z) \to \mathrm{A}$ est entier : c'est vrai car les morphismes entiers sont stables par changement de base et le morphisme $\kappa(x) \to \kappa(y)$ est entier.

Posons $\mathrm{P} = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Z}$. Soit z le spectre d'un corps réel clos. On dispose alors d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(z, \mathrm{P}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(z, \mathrm{Y}) \arrow[d] \\ q_r^{-1}(\zeta_r) \arrow[r, "\gamma"] & f_r^{-1}(g_r(\zeta)) \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale est induite par p et les flèches verticales sont fournies par le lemme précédent. Il résulte de l'item a) du lemme précédent que les flèches verticales sont bijectives et du fait que le diagramme de l'énoncé de la proposition est un diagramme de produit fibré que la flèche horizontale supérieure est bijective : par conséquent, γ est bijective. Pour prouver que γ est un homéomorphisme, en raisonnant localement, on peut supposer que X, Y et Z sont affines. L'espace $\mathrm{Y}_r \times_{\mathrm{X}_r} \mathrm{Z}_r$ est alors spectral. En effet, Y_r et Z_r sont spectraux donc $\mathrm{Y}_r \times \mathrm{Z}_r$ l'est ([Sta22, Tag 0907]) et $\mathrm{Y}_r \times_{\mathrm{X}_r} \mathrm{Z}_r$ est fermé pour la topologie constructible car les espaces en jeu sont séparés pour la topologie constructible donc $\mathrm{Y}_r \times_{\mathrm{X}_r} \mathrm{Z}_r$ est spectral ([Sta22, Tag 0903]). En outre, l'application γ est elle-même spectrale puisque ses composantes, qui sont p_r et q_r, sont spectrales. Pour montrer que c'est un homéomorphisme, il suffit dès lors de prouver que γ est spécialisante, c'est-à-dire que γ^{-1} préserve les spécialisations. Soit (ξ, ξ') un couple de points de P_r, telle que $\gamma(\xi) \succ \gamma(\xi')$. Alors, par continuité de p_r et q_r, $p_r(\xi') \succ p_r(\xi)$ et $q_r(\xi') \succ q_r(\xi)$. Soit $v : \mathrm{V} \to \mathrm{Z}$ un morphisme de schémas, où V est le spectre d'un anneau de valuation réel clos, induisant la spécialisation $q_r(\xi') \succ q_r(\xi)$. D'après l'item b) du lemme précédent, il existe un (unique) morphisme $u : \mathrm{V} \to \mathrm{Y}$ induisant la spécialisation $p_r(\xi') \succ p_r(\xi)$ et tel que $f \circ u = g \circ v$. Les morphismes u et v induisent par conséquent un morphisme $(u, v) : \mathrm{V} \to \mathrm{P}$ qui, par injectivité de $\gamma = (p_r, q_r)$, induit la spécialisation $\xi' \succ \xi$ comme voulu. □

Corollaire 2.3.21 ([Sch94, (1.7.1) Corollary])**.** *Soit* X *un schéma. Le foncteur* $\mathrm{U} \mapsto \mathrm{U}_r$ *de* Ét/X *vers la catégorie des* X_r*-espaces topologiques commute alors aux limites finies.*

Démonstration. Les morphismes étales vérifient la condition de la proposition 2.3.20 donc ce foncteur commute aux objets finaux et aux produits fibrés d'après la conclusion d'icelle et les produits fibrés permettent de produire toutes les limites finies. Le point clef est que l'égalisateur de $u, v : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est $\mathrm{X} \times_{\mathrm{X} \times \mathrm{Y}} \mathrm{X}$ muni de la deuxième projection, où les morphismes $\mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ sont donnés par $\mathrm{Id}_{\mathrm{X}} \times u$ et $\mathrm{Id}_{\mathrm{X}} \times v$. □

Venons-en à l'analogue d'un résultat de géométrie analytique classique précité :

Proposition 2.3.22 ([Sch94, (1.8) Proposition])**.** *Soit* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *un morphisme étale. L'application* $f_r : \mathrm{Y}_r \to \mathrm{X}_r$ *est alors un homéomorphisme local.*

Démonstration. Montrons que f_r est ouverte. Pour cela, on peut supposer X et Y affines. Par définition de la notion de morphisme étale, f est alors de présentation finie. Il résulte alors du principe de Tarski–Seidenberg que f_r envoie les parties constructibles de Y sur des parties constructibles de X. [18] Soit en effet A un anneau et soit $\mathrm{B} = \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]/\langle \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m \rangle$ une A-algèbre de présentation finie. Si E est une partie constructible de Spec B, alors $\mathrm{E} = \{\xi \in \mathrm{X}_r, \kappa(\xi) \text{ satisfait } \Phi(\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_s)\}$ où les Q_i sont des polynômes en n variables à coefficients dans A et Φ est une formule dont les coefficients sont les Q_i. On vérifie alors que

$$f_r(\mathrm{E}) = \{\zeta \in \mathrm{X}_r, \kappa(\zeta) \text{ satisfait } (\exists x_1, \ldots, \exists x_n, \forall j, \mathrm{P}_j(x) = 0 \wedge \Phi(\mathrm{Q}_1(x), \ldots, \mathrm{Q}_s(x)))\}$$

18. L'argument qui suit est celui de la preuve de [CR82, Proposition 2.3 ("théorème de Chevalley réel"), p. 34].

donc $f_r(\mathrm{E})$ est constructible. Comme X_r est spectral, montrer que f_r est ouverte revient à prouver qu'elle est *généralisante* : si $\xi \in \mathrm{Y}_r$ et si $\zeta \succ f_r(\xi)$ dans X_r, alors il existe un point ξ' de Y_r tel que $\xi' \succ \xi$ et $f_r(\xi') = \zeta$ ([Sta22, Tag 0903]).

Représentons la spécialisation $\zeta \succ f_r(\xi)$ par un morphisme $v : \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ de schémas, où V est le spectre d'un anneau de valuation réel clos. Soit $z \to \mathrm{V}$ l'inclusion du spectre du corps résiduel de V ; le point $z \to \mathrm{X}$ induit par v représente $f_r(\xi)$, d'où d'après le point b) du lemme 2.3.19 un morphisme $z \to \mathrm{Y}$ induisant $f_r(\xi)$. On dispose donc d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Y} \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{V} \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

et on doit montrer l'existence d'un relèvement de $z \to \mathrm{Y}$, sous la forme d'un morphisme $\mathrm{V} \to \mathrm{Y}$ comme dans le diagramme en pointillés faisant commuter le diagramme. Notons $(\mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{V}, p : \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{V} \to \mathrm{V}, q : \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{V} \to \mathrm{Y})$ le produit fibré correspondant et $(\mathrm{Q}, \mathrm{Q} \to \mathrm{V}, \mathrm{Q} \to \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{V})$ le changement de base le long de $\mathrm{Id}_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$. Il suffit de prouver l'existence d'un morphisme $\mathrm{V} \to \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{V}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Q} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{V} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{V} \arrow[r] \arrow[ur] & \mathrm{V} \end{tikzcd}$$

commute : en effet, si ψ est un tel morphisme, alors $q \circ \psi : \mathrm{V} \to \mathrm{Y}$ possède les propriétés requises. Comme p est étale par stabilité des morphismes étales par changement de base, on peut remplacer X par V, v par Id_{V} et f par p et il s'agit de prouver que f admet une section. Formons le changement de base par $z \to \mathrm{V}$:

$$\begin{tikzcd} z \times_{\mathrm{V}} \mathrm{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Y} \arrow[d, "f"] \\ z \arrow[r] & \mathrm{V} \end{tikzcd}$$

Le morphisme $z \times_{\mathrm{V}} \mathrm{Y} \to z$ possède une section, à savoir le morphisme $z \to z \times_{\mathrm{V}} \mathrm{Y}$ donné par $(\mathrm{Id}, z \to \mathrm{Y})$. Or :

Lemme 2.3.23. *Soit* A *un anneau. Supposons que* A *soit un anneau de valuation réel clos. L'anneau* A *est alors hensélien.*

Le résultat suit alors de [Gro67, Théorème 18.5.11].

Démonstration du lemme. Par définition, il s'agit de prouver que si $f \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$ est unitaire dont on note $\overline{f}$ l'image dans $k[\mathrm{X}]$ et si b est une racine simple de $\overline{f}$, alors il existe $a \in \mathrm{A}$ tel que $f(a) = 0$ et $\overline{a} = b$. Comme b est racine *simple* de $\overline{f}$ et comme k est réel clos, $\overline{f}$ change de signe en b donc il existe $x, y \in \mathrm{A}$ tels que $b \in [\overline{x}, \overline{y}]$, $\overline{f}(\overline{x})\overline{f}(\overline{y}) < 0$ et $\overline{f}$ ne s'annule pas sur $[\overline{x}, \overline{y}] \setminus \{b\}$. Comme k est réel clos, il n'a qu'un seul ordre qui est donc l'ordre du lemme 2.3.15 : ainsi, $f(x)f(y) < 0$ donc il existe $a \in [x, y]$ tel que $f(a) = 0$. L'anneau A est convexe donc $a \in \mathrm{A}$; en outre, $\overline{a} \in [\overline{x}, \overline{y}]$ vérifie $\overline{f}(\overline{a}) = \overline{f(a)} = 0$ donc $\overline{a} = b$. $\square$

Cela achève de prouver que f_r est ouverte. En outre, f est étale donc non ramifié, de sorte que la diagonale $\mathrm{Y} \to \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ est une immersion ouverte. On déduit alors de la proposition précédente que la diagonale $\mathrm{Y}_r \to \mathrm{Y}_r \times_{\mathrm{X}_r} \mathrm{Y}_r$ est une immersion ouverte. Il suffit donc d'invoquer le lemme suivant :

Lemme 2.3.24. *Soient* S *et* T *des espaces topologiques et soit* $h : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *une application continue. Si* h *et la diagonale* $\Delta : \mathrm{T} \to \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ *sont ouvertes, alors* h *est un homéomorphisme local.*

Démonstration du lemme. Soit $x \in \mathrm{T}$. Comme Δ est ouverte, $\Delta(\mathrm{T})$ est un ouvert de $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ donc il existe des ouverts U et V de T tels que $(x, x) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V} \cap \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \subseteq \Delta(\mathrm{X})$. L'application $h : \mathrm{U} \cap \mathrm{V} \to \mathrm{S}$ est alors injective. En effet, soit (z, z') un couple d'éléments de $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ tel que $h(z) = h(z')$. Alors, $(z, z') \in \mathrm{U} \times \mathrm{V} \cap \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ donc $(z, z') \in \Delta(\mathrm{X})$ de sorte que $z = z'$. Par conséquent, $h : \mathrm{U} \cap \mathrm{V} \to h(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$ est bijective, continue et ouverte : c'est un homéomorphisme et x appartient à $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ d'où le résultat. $\square$

Cela termine de montrer que f_r est un homéomorphisme local. $\square$

La preuve du théorème de comparaison. Elle procède comme suit. Soit X un schéma. Notons A la catégorie définie comme suit.

- Les objets de A sont les couples (U, W) formé d'un X-schéma étale U et d'un ouvert W de U_r.
- Les morphismes de A de $(\mathrm{U}', \mathrm{W}')$ vers (U, W) sont les morphisme $f : \mathrm{U}' \to \mathrm{U}$ de X-schémas tels que $f_r(\mathrm{W}') \subseteq \mathrm{W}$.

On munit A d'une prétopologie comme suit. Soit $(f_i : (\mathrm{U}_i, \mathrm{W}_i) \to (\mathrm{U}, \mathrm{W}))_i$ une famille de flèches de A ; cette famille est un recouvrement de (U, W) lorsque W est la réunion des $(f_i)_r(\mathrm{W}_i)$. Les produits fibrés existent dans A. Soit en effet $(\mathrm{U}', \mathrm{W}') \to (\mathrm{U}, \mathrm{W})$ et $(\mathrm{U}'', \mathrm{W}'') \to (\mathrm{U}, \mathrm{W})$ des morphismes de A. Comme $\mathrm{U}' \to \mathrm{U}$ et $\mathrm{U}'' \to \mathrm{U}$ sont des morphismes entre X-schémas étales, ce sont des morphismes étales donc la condition de la proposition 2.3.20 est satisfaite. On en déduit qu'on dispose d'un homéomorphisme naturel $\mathrm{U}'_r \times_{\mathrm{U}_r} \mathrm{U}''_r \cong (\mathrm{U}' \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'')_r$ donc $\mathrm{W}' \times_{\mathrm{W}} \mathrm{W}''$ s'identifie à un ouvert de $(\mathrm{U}' \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'')_r$ qu'on note encore $\mathrm{W}' \times_{\mathrm{W}} \mathrm{W}''$. On pose

$$(\mathrm{U}', \mathrm{W}') \times_{(\mathrm{U},\mathrm{W})} (\mathrm{U}'', \mathrm{W}'') = (\mathrm{U}' \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'', \mathrm{W}' \times_{\mathrm{W}} \mathrm{W}'')$$

modulo cette identification, muni des flèches structurales du produit fibré de Ét/X. La collection de recouvrements donnée précédemment définit une prétopologie sur A. Le site associé est noté $\mathrm{X}_{\mathrm{aux}}$.

On note $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X}_r)$ la catégorie des ouverts de X_r. Celle est munie d'une topologie naturelle qui en fait un site. Les catégories Ét/X et $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X}_r)$ sont naturellement des sous-catégories pleines de A : à un X-schéma étale U (respectivement à un ouvert W de X_r), on associe l'objet $(\mathrm{U}, \mathrm{U}_r)$ (respectivement (X, W)) de A ; le foncteur $\text{Ét/X} \to \mathsf{A}$ (respectivement $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X}_r) \to \mathsf{A}$) est l'identité sur les morphismes (respectivement est constant à Id_{X} sur les morphismes). Comme ces foncteurs commutent aux objets finaux, aux produits fibrés et aux recouvrements, ils sont continus et exacts à gauche donc, d'après le lemme 2.3.4, sous-jacents à des morphismes de sites :

$$\mathrm{X}_{\text{rét}} \xleftarrow{\varphi} \mathrm{X}_{\mathrm{aux}} \xrightarrow{\psi} \mathrm{X}_r.$$

Lemme 2.3.25 ([Sch94, (1.9)]). *Le morphisme de topos $\varphi : \widetilde{\mathrm{X}_{\mathrm{aux}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$ induit par φ est une équivalence.*

Démonstration. D'après le *lemme de comparaison* ([AGV71, Exposé III, Théorème 4.1]), il suffit de montrer que tout objet (U, W) de A par des objets de la forme $(\mathrm{V}, \mathrm{V}_r)$ où V est un U-schéma étale, c'est-à-dire que pour tout $\xi \in \mathrm{U}_r$ et tout voisinage W de ξ dans U, il existe un U-schéma étale $f : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ tel que $\xi \in f_r(\mathrm{V}_r) \subseteq \mathrm{W}$. On peut supposer que U est affine. Supposons dans un premier temps que $\xi \in \mathrm{D}(a) \subseteq \mathrm{W}$. Posons $\mathrm{B} = \mathrm{A}_{2a}[t]/\langle t^2 - a\rangle$ et $\mathrm{V} = \operatorname{Spec} \mathrm{B}$. Alors, le morphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est étale et $\xi \in f_r(\mathrm{V}_r) \subseteq \mathrm{W}$. En faisant des revêtements étales successifs de cette forme, on construit V comme désiré. $\square$

Soit désormais S un faisceau sur $\mathrm{X}_{\mathrm{aux}}$. Pour tout X-schéma étale U, S induit un faisceau $\mathrm{W} \mapsto \mathrm{S}(\mathrm{U}, \mathrm{W})$ sur U_r que nous notons S_{U}. Si $f : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ est un morphisme entre X-schémas étales, les morphismes de restriction de S induisent un morphisme $f_r^*\mathrm{S}_{\mathrm{U}} \to \mathrm{S}_{\mathrm{V}}$ de faisceaux sur V_r.

Lemme 2.3.26 ([Sch94, (1.10) Lemma]). *Le morphisme $f_r^*\mathrm{S}_{\mathrm{U}} \to \mathrm{S}_{\mathrm{V}}$ de faisceaux sur V_r est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme un morphisme entre X-schémas étales est étale, on peut supposer que f est un morphisme de schémas de U vers X. Soit W un ouvert de U_r tel que $f_{r|\mathrm{W}}$ est injective, c'est-à-dire, puisque f_r est un homéomorphisme local, une immersion ouverte. Le morphisme f induit alors un recouvrement $(\mathrm{U}, \mathrm{W}) \to (\mathrm{X}, f_r(\mathrm{W}))$, d'où une suite

$$(f_r^*\mathrm{S}_{\mathrm{X}})(\mathrm{W}) = \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(f_r(\mathrm{W})) \longrightarrow \mathrm{S}_{\mathrm{U}}(\mathrm{W}) \overset{p^*}{\underset{q^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{S}_{\mathrm{U}\times_{\mathrm{X}}\mathrm{U}}(\mathrm{W} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{W})$$

où $p, q : \mathrm{U} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ sont les projections et où $\mathrm{W} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{W} \subseteq \mathrm{U}_r \times_{\mathrm{X}_r} \mathrm{U}_r = (\mathrm{U} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{U})_r$ et la suite ci-dessus identifie $\mathrm{S}_{\mathrm{X}}(f_r(\mathrm{W})) \to \mathrm{S}_{\mathrm{U}}(\mathrm{W})$ à l'égalisateur de p^* et q^*. Comme $f_{r|\mathrm{W}}$ est injective, la diagonale $\mathrm{W} \to \mathrm{W} \times_{\mathrm{X}_r} \mathrm{W}$ est bijective donc la diagonale $\mathrm{U} \to \mathrm{U} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{U}$ induit un recouvrement

$$(\mathrm{U}, \mathrm{W}) \to (\mathrm{U} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{U}, \mathrm{W} \times_{\mathrm{X}_r} \mathrm{W}).$$

On en déduit que $p^* = q^*$ dans la suite ci-dessus donc $\mathrm{S}_{\mathrm{X}}(f_r(\mathrm{W})) \to \mathrm{S}_{\mathrm{U}}(\mathrm{W})$ est une bijection. Comme U_r peut être recouvert par des ouverts W_i tels que $f_{r|\mathrm{W}_i}$ est injective, le résultat suit. □

Terminons la preuve du théorème de comparaison.

Démonstration du théorème 2.3.11. On suit [Sch94, (1.11)]. Par définition, l'adjoint à droite sous-jacent au morphisme de topos ψ associe à un faisceau S sur A le faisceau $\psi_*\mathrm{S} = \mathrm{S}_{\mathrm{X}} : \mathrm{W} \mapsto \mathrm{S}(\mathrm{X}, \mathrm{W})$ sur X_r.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur X_r. D'après le lemme 2.3.4, $\psi^*\mathscr{F}$ est obtenu en faisceautisant le préfaisceau $\mathscr{G}$ obtenu en appliquant l'adjoint à gauche du foncteur qui à un préfaisceau T sur A associe le préfaisceau $\mathrm{T} \circ \psi$. D'après le lemme 2.3.2, $\mathscr{G}$ est obtenu de la façon suivante. Soit $(f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}, \mathrm{W})$ un objet de A ; on note I la catégorie dont les objets sont les couples (Ω, m) où Ω est un objet de $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X}_r)$, c'est-à-dire un ouvert de X_r, et où $m : f_r(\mathrm{W}) \to \Omega$ est un morphisme : par définition de la catégorie $\mathsf{Ouv}(\mathrm{X}_r)$, la catégorie I s'identifie à la catégorie (induite par l'ensemble partiellement ordonné par l'inclusion) des ouverts qui contiennent l'ouvert Ω. On a alors

$$\mathscr{G}(\mathrm{U}, \mathrm{W}) = \operatorname{colim}_{f_r(\mathrm{W}) \subseteq \Omega} \mathscr{F}(\Omega) = \mathscr{F}(f_r(\mathrm{W})),$$

les restrictions étant induites par la fonctorialité des limites donc par le faisceau $\mathscr{F}$. Ainsi, $\psi^*\mathscr{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau $(f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}, \mathrm{W}) \mapsto \mathscr{F}(f_r(\mathrm{W}))$.

L'unité $\mathscr{F} \to \psi_*\psi^*\mathscr{F}$ de l'adjonction (ψ^*, ψ_*) est un isomorphisme. Rappelons d'abord que si $\theta : \mathscr{G} \to \psi^*\mathscr{F}$ est la flèche de faisceautisation, l'unité est induite par les flèches $\mathscr{F}(\mathrm{W}) = \mathscr{G}(\mathrm{X}, \mathrm{W}) \xrightarrow{\theta(\mathrm{X},\mathrm{W})} \psi^*\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathrm{W}) = \psi_*\psi^*\mathscr{F}(\mathrm{W})$. Pour montrer que l'unité est un injective, il suffit donc de prouver que le préfaisceau $\mathscr{G}$ est séparé ([Sta22, Tag 00WB], point (2)). Soit $(f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}, \mathrm{W})$ un objet de A et soit $(g_i : (\mathrm{U}_i, \mathrm{W}_i) \to (\mathrm{U}, \mathrm{W}))_{i \in \mathrm{I}}$ un recouvrement de A : ainsi, W est la réunion des $(g_i)_r(\mathrm{W}_i)$ donc $f_r(\mathrm{W})$ est la réunion des $(f \circ g_i)_r(\mathrm{W}_i) = f_r((g_i)_r(\mathrm{W}))$: par conséquent, puisque $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X_r — en particulier, un préfaisceau séparé —, la flèche

$$\mathscr{G}(\mathrm{U}, \mathrm{W}) = \mathscr{F}(f_r(\mathrm{W})) \to \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathscr{F}((f \circ g_i)_r(W_i)) = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathscr{G}(\mathrm{U}_i, \mathrm{W}_i)$$

est injective. Montrons désormais que la flèche $\mathscr{F}(\mathrm{W}) \to \psi^*\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathrm{W})$ est surjective pour tout ouvert W de X_r. Soit W un tel ouvert et soit $s \in \psi^*\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathrm{W})$. D'après [Sta22, Tag 00W9], il existe un recouvrement $(f_i : (\mathrm{U}_i, \mathrm{W}_i) \to (\mathrm{X}, \mathrm{W}))_i$ de (X, W) et, pour tout i, une section s_i de $\mathscr{G}$ au-dessus de $(\mathrm{U}_i, \mathrm{W}_i)$, c'est-à-dire un élément s_i de $\mathscr{F}((f_i)_r(\mathrm{W}_i))$, tel que $s_{|(\mathrm{U}_i, \mathrm{W}_i)} = \theta(\mathrm{U}_i, \mathrm{W}_i)(s_i)$. Comme $\mathscr{G}$ est séparé, les s_i coïncident sur les intersections donc on en déduit une section t de $\mathscr{F}$ au-dessus de $\bigcup (f_i)_r(\mathrm{W}_i) = \mathrm{W}$ telle que $\theta(\mathrm{X}, \mathrm{W})(t)_{|(\mathrm{U}_i, \mathrm{W}_i)} = s_{|(\mathrm{U}_i, \mathrm{W}_i)}$ pour tout i : comme $\psi^*\mathscr{F}$ est un faisceau, il s'ensuit que $\theta(\mathrm{X}, \mathrm{W})(t) = s$ comme attendu.

Pour montrer que ψ est une équivalence, il suffit désormais de prouver que la counité $\psi^*\psi_*\mathrm{S} \to \mathrm{S}$ est un isomorphisme de faisceaux sur A pour tout faisceau S sur A. Or, comme dans la preuve du lemme précédent, en utilisant la proposition 2.3.22, on prouve en le testant sur un recouvrement de U_r par des ouverts sur lesquels f_r est injective que pour tout morphisme X-schéma étale $f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ et tout ouvert W de U_r, le morphisme évident

$$f_r^*\mathscr{F}(\mathrm{W}) = \mathscr{F}(f_r(\mathrm{W})) \xrightarrow{\cong} \psi_*\psi^*\mathscr{F}(f_r(\mathrm{W})) = \psi^*\mathscr{F}(\mathrm{X}, f_r(\mathrm{W})) \to \psi^*\mathscr{F}(\mathrm{U}, \mathrm{W})$$

est un isomorphisme. Autrement dit, $(\psi^*\mathscr{F})_{\mathrm{U}} = f_r^*\mathscr{F}$. Maintenant, si S est faisceau sur U, alors la counité $\psi^*\psi_*\mathrm{S} \to \mathrm{S}$ est un isomorphisme si, et seulement si, en notant $\mathscr{F}$ le faisceau $\mathrm{S}_{\mathrm{X}} = \psi_*\mathrm{S}$ sur X_r, la flèche $(\psi^*\mathscr{F})_{\mathrm{U}} \to \mathrm{S}_{\mathrm{U}}$ induite par la counité est un isomorphisme pour tout $f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ étale ; or, grâce au lemme précédent, la flèche $f_r^*\mathscr{F} \to \mathrm{S}_{\mathrm{U}}$ est un isomorphisme : il suffit alors d'utiliser l'égalité $(\psi^*\mathscr{F})_{\mathrm{U}} = f_r^*\mathscr{F}$ déjà remarquée pour conclure.

Cela achève la preuve du théorème 2.3.11. □

2.4 Description explicite des équivalences

Le but de cette sous-section est de rendre explicite les équivalences de topos obtenues dans la sous-section précédente. Soit X un schéma.

Notation 2.4.1. Si $\mathscr{G}$ est un faisceau sur $\mathrm{X}_{\text{rét}}$, nous posons

$$\mathscr{G}^{\sharp} = \psi_* \varphi^* \mathscr{G} \ :$$

c'est un faisceau sur X_r. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X_r, nous posons

$$\mathscr{F}^{\flat} = \varphi_* \psi^* \mathscr{F} \ :$$

c'est un faisceau sur $\mathrm{X}_{\text{rét}}$. Les associations $\mathscr{G} \mapsto \mathscr{G}^{\sharp}$ et $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\flat}$ s'étendent de façon évidente en des foncteurs de $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$ vers $\widetilde{\mathrm{X}_r}$ et de $\widetilde{\mathrm{X}_r}$ vers $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$ respectivement. Les foncteurs $-^{\sharp} \circ -^{\flat}$ et $-^{\flat} \circ -^{\sharp}$ sont isomorphes aux foncteurs identité convenables.

Pour rendre le foncteur $-^{\sharp}$ explicite, nous faisons appel à la construction suivante. Soit W un ouvert de X_r. On note I_{W} la catégorie dont les objets sont les paires $(f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}, s)$ où $f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ est un X-schéma étale et où $s : \mathrm{W} \to \mathrm{U}_r$ est une section continue de $f_r : \mathrm{U}_r \to \mathrm{X}_r$ sur W et telle que les morphismes de $(f' : \mathrm{U}' \to \mathrm{X}, s')$ vers $(f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}, s)$ sont les X-morphismes $g : \mathrm{U}' \to \mathrm{U}$ tels que $g_r \circ s' = s$.

Lemme 2.4.2. *La catégorie* I_{W} *possède les produits fibrés et est cofiltrante.*

Démonstration. Soient $g : (\mathrm{U}', s') \to (\mathrm{U}, s)$ et $h : (\mathrm{U}'', s'') \to (\mathrm{U}, s)$ des morphismes de I_{W}. On considère le produit fibré $(\mathrm{U}' \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'' = \mathrm{P}, p : \mathrm{U}' \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'' \to \mathrm{U}'', q : \mathrm{U}' \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'' \to \mathrm{U})$ de U′ et U″ le long de g et h dans la catégorie Ét/X. Par définition des morphismes de I_{W}, les sections s et s' induisent une section $\sigma : \mathrm{W} \to \mathrm{U}' \times_{\mathrm{U}_r} \mathrm{U}''_r = (\mathrm{U}' \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'')_r$ (modulo l'homéomorphisme de la proposition 2.3.20). Les X-morphismes p et q induisent des morphismes

$$p : (\mathrm{P}, \sigma) \to (\mathrm{U}'', s''), \quad q : (\mathrm{P}, \sigma) \to (\mathrm{U}', s')$$

qui font de (P, σ) le produit fibré de (U', s') et (U'', s'') le long de g et h dans la catégorie I_{W}.

Montrons que la catégorie I_{W} est cofiltrante. Par définition, il s'agit de prouver que I_{W} possède les propriétés suivantes.

1. La catégorie I_{W} est non vide.
2. Si (U', s') et (U'', s'') sont des objets de I_{W}, alors il existe un objet (P, σ) de I_{W} et des morphismes $(\mathrm{P}, \sigma) \to (\mathrm{U}', s')$ et $(\mathrm{P}, \sigma) \to (\mathrm{U}'', s'')$.
3. Si (U', s') et (U, s') sont des objets de I_{W} et si $g, h : (\mathrm{U}', s') \to (\mathrm{U}, s)$ sont des morphismes de I_{W}, alors il existe un objet (E, t) de I_{W} et un morphisme $e : (\mathrm{E}, t) \to (\mathrm{U}', s')$ de I_{W} tel que $g \circ e = h \circ e$.

La catégorie I_{W} est non vide car $(\mathrm{X} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}} \mathrm{X}, \mathrm{W} \hookrightarrow \mathrm{X}_r)$ — où $\mathrm{W} \hookrightarrow \mathrm{X}_r$ est l'inclusion de W dans X_r — est un objet de I_{W}. C'est d'ailleurs un objet final de I_{W} donc d'après ce qui a déjà été vu sur les produits fibrés, le produit de deux objets existe dans I_{W} : cela montre que l'assertion de l'item 2. est vérifiée. Plaçons-nous dans la situation décrite dans l'item 3. [19] La catégorie Ét/X possède les produits fibrés et un objet final donc les limites finies, en particulier les égalisateurs. Soit $e : \mathrm{E} \to \mathrm{U}'$ un égalisateur de (g, h) dans la catégorie Ét/X ; notons $a : \mathrm{E} \to \mathrm{X}$ le morphisme structural. Comme le foncteur « espace réel » commute aux limites finies (corollaire 2.3.21), l'application $e_r : \mathrm{E}_r \to \mathrm{U}'_r$ est un égalisateur de (g_r, h_r) dans la catégorie des X_r-espaces topologiques. Or, g et h sont des morphismes de (U', s') vers (U, s) donc $s = g_r \circ s' = h_r \circ s'$: par conséquent, s' se factorise par e_r en une application continue $\sigma : \mathrm{W} \to \mathrm{E}_r$ qui est une section de a_r sur W car s est une section de f'_r sur W. $\square$

19. On suit [Sch94, (1.13)].

Si W' est un ouvert de X_r contenu dans W, on dispose d'un foncteur de I_{W} vers $\mathsf{I}_{\mathrm{W}'}$ associant à (U, s) le couple $(\mathrm{U}, s_{|\mathrm{W}'})$ et étant identique sur les morphismes. Ainsi, un préfaisceau $\mathscr{P}$ sur Ét/X induit un préfaisceau $\mathscr{P}^\dagger$ sur X_r qui associe à un ouvert U la colimite filtrante

$$\varinjlim_{\mathsf{I}_{\mathrm{W}}^{op}} \mathscr{P}(\mathrm{U})$$

par fonctorialité des colimites. Toujours par fonctorialité des colimites, l'association $\mathscr{P} \mapsto \mathscr{P}^\dagger$ est fonctorielle.

Théorème 2.4.3 ([Sch94, (1.14) Theorem])**.** *Les foncteurs $\_^\flat$ et $\_^\sharp$ admettent les descriptions suivantes.*

a) Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur X_r. Le faisceau $\mathscr{F}^\flat$ associe alors à un objet $f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ de $\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$ l'ensemble $\mathrm{H}^0(\mathrm{U}_r, f_r^*\mathscr{F}) = f_r^*\mathscr{F}(\mathrm{U}_r)$.

b) Notons $\widehat{\text{Ét}/\mathrm{X}}$ la catégorie des préfaisceaux (d'ensembles) sur Ét/X, $\widehat{\mathrm{X}_r}$ la catégorie des préfaisceaux (d'ensembles) sur X_r et $a_{\text{rét}} : \widehat{\text{Ét}/\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$ et $a_r : \widehat{\mathrm{X}_r} \to \widetilde{\mathrm{X}_r}$ les foncteurs de faisceautisation. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\text{Ét}/\mathrm{X}} \arrow[r, "_^\dagger"] \arrow[d, "a_{\text{rét}}"] & \widehat{\mathrm{X}_r} \arrow[d, "a_r"] \\
\widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}} \arrow[r, "_^\sharp"] & \widetilde{\mathrm{X}_r}
\end{tikzcd}$$

est alors commutatif à isomorphisme naturel près.

Démonstration. Par définition, si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X_r et si $f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ est un morphisme étale, alors

$$\mathscr{F}^\flat(\mathrm{U}) = \psi^*\mathscr{F}(\mathrm{U}, \mathrm{U}_r) = (\psi^*\mathscr{F})_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}_r) = f_r^*\mathscr{F}(\mathrm{U}_r).$$

Cela établit l'assertion de l'item a).

Prouvons celle de l'item b). Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur Ét/X. Si $\xi \in \mathrm{X}_r$ provient d'un morphisme $\alpha : x \to \mathrm{X}$ où x est le spectre d'un corps réel clos, alors

$$\mathscr{P}^\dagger_\xi = \varinjlim_{\xi \in \mathrm{W}} \mathscr{P}^\dagger(\mathrm{W}) = \operatorname*{colim}_{x \to \mathrm{U}} \mathscr{P}(\mathrm{U})$$

où la dernière colimite est prise sur les X-morphismes de x vers U où U est un X-schéma étale. Si $\mathscr{G} = a_{\text{rét}}(\mathscr{P})$, alors la flèche naturelle de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{G}$ induit une flèche $\mathscr{P}^\dagger_\xi \to \mathscr{G}^\dagger_\xi$: vu l'expression obtenue ci-dessus pour la fibre et le fait que $\mathrm{X}_{\text{rét}}$ et X_r ont les mêmes points puisqu'ils sont équivalents, la flèche $\mathscr{P}^\dagger_\xi \to \mathscr{G}^\dagger_\xi$ est un isomorphisme. Par conséquent, la flèche $a_r(\mathscr{P}^\dagger) \to a_r(\mathscr{G}^\dagger)$ est un isomorphisme. On peut donc remplacer $\mathscr{P}$ par $\mathscr{G}$ dans la preuve de l'assertion b) : autrement dit, on peut supposer que $\mathscr{P}$ est un faisceau sur $\mathrm{X}_{\text{rét}}$. Comme $\_^\sharp$ et $\_^\flat$ sont des quasi-inverses, il suffit de prouver que si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X_r, alors $\mathscr{F}$ est isomorphe à $a_r((\mathscr{F}^\flat)^\dagger)$. Posons $\mathscr{G} = \mathscr{F}^\flat$. Ainsi,

$$\mathscr{G}(\mathrm{U}) = (f_r^*\mathscr{F})(\mathrm{U}_r)$$

pour tout morphisme étale $f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$. En particulier, si W est un ouvert de X_r et si (U, s) est un objet de I_{W}, alors le tiré en arrière par $s : \mathrm{W} \to \mathrm{U}_r$ induit une application

$$s^* : (f_r^*\mathscr{F})(\mathrm{U}_r) \to ((s^* \circ f_r^*)\mathscr{F})(\mathrm{W}) = \mathscr{F}(\mathrm{W})\ ;$$

ces applications s'assemblent en un morphisme $\mathscr{G}^\dagger(\mathrm{W}) \to \mathscr{F}(\mathrm{W})$ puis par fonctorialité des colimites en un morphisme $\mathscr{G}^\dagger \to \mathscr{F}$ de préfaisceaux sur X_r, lequel induit encore un isomorphisme au niveau des fibres vu la formule obtenue ci-dessus. C'est donc un isomorphisme après application de a_r : or, on dispose d'un isomorphisme naturel de $a_\tau(\mathscr{F})$ sur $\mathscr{F}$, d'où le résultat. □

Mentionnons enfin que les équivalences construites dans la sous-section précédente sont naturelles ([Sch94, (1.16)]). Plus précisément, soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de schémas. Le foncteur de changement de base induit un foncteur $f^{-1} : \text{Ét}/\mathrm{X} \to \text{Ét}/\mathrm{Y}$ qui préserve objets finaux, produits fibrés et recouvrements : il s'ensuit qu'on en déduit un morphisme de topos $f_{\text{rét}} : \widetilde{\mathrm{Y}_{\text{rét}}} \to \widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$. En outre, comme f_r est continue, elle induit un morphisme de topos $f_r : \widetilde{\mathrm{Y}_r} \to \widetilde{\mathrm{X}_r}$. L'équivalence $\widetilde{\mathrm{X}_r} \simeq \widetilde{\mathrm{X}_{\text{rét}}}$ est compatible à f_r et $f_{\text{rét}}$.

Bibliographie

[AGV71] Michael Artin, Alexander Grothendieck et Jean-Louis Verdier. *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas I, II, III.* T. 269, 270, 305. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1971 (cf. p. 21–23, 29).

[BCR87] Jacek Bochnak, Michel Coste et Marie-Françoise Roy. *Géométrie algébrique réelle.* Première édition. T. 12. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3 Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3 Series. A series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987 (cf. p. 3, 5–8, 11–16, 18, 24).

[CR82] Michel Coste et Marie-Françoise Roy. « La topologie du spectre réel ». In : *Ordered Fields and Real Algebraic Geometry.* Sous la dir. de Donald W. Dubois et Tomas Recio. T. 8. Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, 1982, p. 27–59 (cf. p. 27).

[Gro67] Alexander Grothendieck. « Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie ». In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 32 (1967), p. 5–361 (cf. p. 28).

[Kah08] Bruno Kahn. *Formes quadratiques sur un corps.* T. 15. Cours Spécialisés. Société mathématique de France, 2008 (cf. p. 8).

[Sch94] Claus Scheiderer. *Real and Étale Cohomology.* T. 1588. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1994 (cf. p. 17, 20, 23, 25–27, 29–33).

[Sta22] The Stacks project authors. *The Stacks project.* `https://stacks.math.columbia.edu`. 2022 (cf. p. 18, 19, 27, 28, 30).