Groupe de travail
«L'hypothèse de Riemann d'après Deligne»

INTRODUCTION

F. DÉGLISE

Table des matières

Rappels sur SGA4

Soit X un schéma noethérien excellent. On note $X_{\text{ét}}$ le site étale de X.

On fixe un anneau Λ et on note Λ_{Λ_X}–*mod* la catégorie des faisceaux de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$. Pour un objet F de $\Lambda_{\Lambda_X}-mod$, rappelons les définitions suivantes :

- Si M est un Λ-module, on note M_X le faisceau étale sur X associé au préfaisceau $V/X \mapsto M$. On dit que F est *constant* (resp. *fini*) sur X si F est isomorphe à un faisceau de la forme M_X pour un Λ-module M (resp. de type fini).
- On dit que F est *localement constant* (resp. *fini*) si il existe un recouvrement étale $\pi : W \to X$ tel que $\pi^*(F)$ est constant (resp. fini).
- On dit que F est constructible si F appartient à la sous-catégorie abélienne épaisse (stable par extension et facteurs directs) de $\Lambda_{\Lambda_X}-mod$ engendrée par les faisceaux localements constants finis.

0.1. Soit K un complexe de $\Lambda_{\Lambda_X}-mod$. On dit que K est constructible si il est cohomologiquement borné et que ses faisceaux de cohomologie sont constructibles. On utilisera dans le groupe de travail la catégorie triangulée suivante :

$$D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda),$$

sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée de $\Lambda_{\Lambda_X}-mod$ formée des complexes constructibles.

On utilisera sans démonstration le formalisme des 6 foncteurs de Grothendieck (récemment complété par Gabber). En particulier l'existence des foncteurs :

- Pour un morphisme de type fini $f : Y \to X$, les complexes constructibles sont stables par les foncteurs adjoints : $(f^*, \mathsf{R}f_*)$.
- Pour un morphisme de type fini $f : Y \to X$, il existe une paire de foncteurs adjoints $(f_!, f^!)$ tels que $f_! = f_*$ si f est propre et $f^! = f^*$ si f est une immersion ouverte.

Date: Octobre 2009.

– (si X est de type fini sur un corps fini ou séparablement clos) Les complexes constructibles sont stables par le produit tensoriel dérivé et le Hom interne. [1]

Je passe sur les propriétés fondamentales suivantes : pureté, formules de changement de base, formules de projection.

1. Cohomologie étale géométrique

1.1. Soit X un $\bar{\mathbb{F}}_p$-schéma de type fini, Λ un anneau de torsion première à p.

Alors, l'algèbre de cohomologie

$$H^*(X_{\text{ét}}, \Lambda_X)$$

est de type fini en tant que Λ-module. [2]

En effet, le théorème de constructibilité [3] affirme que, si $\pi : X \to \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ est le morphisme structural, le complexe suivant

$$\mathsf{R}\pi_*(\Lambda_X)$$

est constructible. Vu que le site étale de $\bar{\mathbb{F}}_p$ est trivial, cela signifie encore que c'est un complexe parfait de Λ-modules, et on conclut par la relation :

$$H^n(X_{\text{ét}}, \Lambda_X) = \mathsf{R}^n\pi_*(\Lambda_X).$$

Définition 1.2. Avec les notations qui précèdent, on définit la cohomologie étale l-adique (rationnelle) de X comme le $\mathbb{Q}_l$-espace vectoriel de dimension finie :

$$H^n(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l) := \Big(\varprojlim_{n>0} H^n(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/l^n.\mathbb{Z})\Big) \otimes \mathbb{Q}.$$

Du fait que le système projectif ci-dessus vérifie la condition de Mittag-Leffler, la cohomologie étale l-adique de X est représentée par le complexe

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \varprojlim_{n>0} \mathsf{R}\pi_*\big((\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})_X\big).$$

On peut le voir aussi comme la partie rationnelle du complexe l-complété au sens triangulé du complexe $\mathsf{R}\pi_*\big((\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})_X\big)$.

On notera donc :

$$\mathsf{R}\Gamma(X, \mathbb{Z}_l) = \varprojlim_{n>0} \mathsf{R}\pi_*\big((\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})_X\big)$$

$$\mathsf{R}\Gamma(X, \mathbb{Q}_l) = \Big(\varprojlim_{n>0} \mathsf{R}\pi_*\big((\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})_X\big)\Big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

Remark 1.3. Pour un schéma X quelconque, il faut utiliser la limite projective dérivée.

Théorème 1.4. *Soient X et Y des $\bar{\mathbb{F}}_p$-schémas propres.*

Alors, le morphisme canonique :

$$\oplus_{p+q=n} H^p(X_{ét}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} H^q(Y_{ét}, \mathbb{Q}_l) \to H^n((X \times_{\bar{\mathbb{F}}_p} Y)_{ét}, \mathbb{Q}_l)$$

est un isomorphisme.

---

1. Le produit tensoriel et le Hom interne des faisceaux de Λ-module se dérivent sur la catégorie dérivée non bornée $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

2. Il n'est pas nécessaire que la torsion de Λ soit première à p.

3. Il est admis dans le paragraphe 0.1. Rappelons que dans le cas propre, il résulte de SGA4, XIV, 1.1 et que le cas général s'en déduit par dévissage en utilisant la résolution par altération à la De Jong.

Démonstration. Pour le démontrer, on commence par le cas des coefficients $\Lambda = \mathbb{Z}/l^n.\mathbb{Z}$. On considère le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "q'"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "p"'] & \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p) \end{tikzcd}$$

posant $h = p \circ q'$.

On peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \mathsf{R}h_*(\Lambda_Z) = \mathsf{R}q_*\mathsf{R}p'_*(q'^*(\Lambda_X) \otimes^{\mathsf{L}}_{\Lambda} p'^*(\Lambda_Y)) &\overset{(1)}{=} \mathsf{R}q_*\big(\mathsf{R}p'_*q'^*(\Lambda_X) \otimes^{\mathsf{L}}_{\Lambda} \Lambda_Y\big) \\ \overset{(2)}{=} \mathsf{R}q_*\big(q^*\mathsf{R}p_*(\Lambda_X) \otimes^{\mathsf{L}}_{\Lambda} \Lambda_Y\big) &\overset{(1)}{=} \mathsf{R}p_*(\Lambda_X) \otimes^{\mathsf{L}}_{\Lambda} \mathsf{R}q_*(\Lambda_Y) \end{aligned}$$

où les identifications (1) résultent de la formule de projection et l'identification (2) de la formule de changement de base propre.

Après complétion l-adique on obtient un isomorphisme de la forme :

$$\mathsf{R}\Gamma(Z, \mathbb{Z}_l) \simeq \mathsf{R}\Gamma(X, \mathbb{Z}_l)\hat{\otimes}^{\mathsf{L}}_{\Lambda}\mathsf{R}\Gamma(Y, \mathbb{Z}_l)$$

qui fait intervenir a priori un produit tensoriel complété. Or, le morphisme canonique :

$$\mathsf{R}\Gamma(X, \mathbb{Z}_l) \otimes^{\mathsf{L}}_{\Lambda} \mathsf{R}\Gamma(Y, \mathbb{Z}_l) \to \mathsf{R}\Gamma(X, \mathbb{Z}_l)\hat{\otimes}^{\mathsf{L}}_{\Lambda}\mathsf{R}\Gamma(Y, \mathbb{Z}_l)$$

est un isomorphisme vu que les complexes en jeu sont parfaits. Prenant ensuite la partie rationnelle, on en déduit un isomorphisme de complexes :

$$\mathsf{R}\Gamma(Z, \mathbb{Q}_l) \simeq \mathsf{R}\Gamma(X, \mathbb{Q}_l)\hat{\otimes}^{\mathsf{L}}_{\Lambda}\mathsf{R}\Gamma(Y, \mathbb{Q}_l)$$

comme attendu. □

1.5. On ne le démontrera pas ici, mais la cohomologie étale l-adique définit une cohomologie de Weil au sens classique (et même au sens mixte). Rappelons que cela signifie l'existence d'une classe de cycles (vérifiant une condition de normalisation) et d'une dualité de Poincaré pour les schémas projectifs lisses - dans le cas mixte, on demande l'existence d'une cohomologie à support compact et d'un accouplement de dualité entre cohomologie et cohomologie à support compact.

D'ailleurs, ces propriétés sont conséquences du théorème précédent et des calculs élémentaires suivants pour $X = \mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{G}_m$:

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}_l & \text{si } i = 0 \text{ ou } (i = 1, X = \mathbb{G}_m), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On déduit des axiomes d'une cohomologie de Weil la formule des traces de Lefschetz (ou plutôt une première forme de cette formule) :

Proposition 1.6. *Soit X un $\bar{\mathbb{F}}_p$-schéma projectif lisse de dimension n et $\phi : X \to X$ une correspondance. Alors, la formule suivante est vraie :*

$$\deg([\phi].[\Delta_X]) = \sum_{i=0}^{2n} tr(\phi^*, H^i(X_{ét}, \mathbb{Q}_l))$$

où le membre de gauche désigne le degré du cycle de $CH_0(X \times X)$ obtenu par intersection dans l'anneau de Chow de $X \times X$.

2. Correspondance de Frobenius

2.1. Rappelons que pour une $\mathbb{F}_p$-algèbre A, l'endomorphisme de Frobenius :

$$F_A : A \to A, f \mapsto f^p$$

est un morphisme entier, injectif si A est intègre. Le morphisme induit sur $X = \mathrm{Spec}(A)$, noté F_X, est l'identité sur les espaces sous-jacents.

Ce morphisme est évidemment naturel en A, ce qui se traduit par un diagramme commutatif

(2.1.1)
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F_Y"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "F_X"'] & X \end{tikzcd}$$

pour tout morphisme f de schémas affine. Par ailleurs, l'endomorphisme de Frobenius est compatible à la localisation dans le sens où, dans le cas où f est une immersion ouverte, le diagramme ci-dessus est cartésien.

Ainsi, pour un $\mathbb{F}_p$-schéma X quelconque, les endomorphismes de Frobenius des ouverts affines de X se recollent et induisent un morphisme

$$F_X : X \to X.$$

Définition 2.2. Avec les notations qui précèdent, on appelle F_X l'endomorphisme de Frobenius de X.

Notons que F_X est encore entier et il satisfait la propriété de fonctorialité donnée par le diagramme (2.1.1). Si de plus $X/\mathbb{F}_p$ est séparé de type fini, de diagramme joint au fait que $F_{\mathbb{F}_p}$ est l'identité montre que F_X est de plus fini (en appliquant EGA I, 6.3.4 (v)).

On peut aussi décrire F_X comme le morphisme d'espace annelés $(1_X, F_X^\sharp)$ où $F_X^\sharp$ est le morphisme de faisceaux d'anneaux

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U), f \mapsto f^p.$$

2.3. Soit X un $\mathbb{F}_p$-schéma et K un corps de caractéristique p.

Le morphisme induit par F_X sur l'ensemble des K-points de X

$$F_{X*} : X(K) \to X(K)$$

est égal au morphisme F_K^* induit par le Frobenius de K – d'après le diagramme commutatif (2.1.1). Comme F_K est injectif, on en déduit que F_{X*} est injectif : F_X est donc radiciel. Comme on a déjà vu qu'il est entier et surjectif, on a donc obtenu :

Proposition 2.4. *Pour tout $\mathbb{F}_p$-schéma X, l'endomorphisme de Frobenius F_X est un homéomorphisme universel.*

2.5. Considérons un morphisme $f : Y \to X$ de $\mathbb{F}_p$-schémas. On lui associe un schéma par la formule :

$$Y^{(p/X)} := F_X^{-1}(Y).$$

On note ce schéma simplement $Y^{(p)}$ lorsque X est clair. Considérant le diagramme commutatif (2.1.1), on obtient un unique morphisme $F_{Y/X}$ s'insérant dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "F_{Y/X}"] \arrow[drr, bend left, "F_Y"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& Y^{(p)} \arrow[r, "Y\times_X F_X"] \arrow[d, "Y\times_X f"] & Y \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "F_X"'] & X.
\end{tikzcd} \tag{2.5.1}$$

Définition 2.6. Avex les notations qui précèdent, $F_{Y/X}$ est appelé le morphisme de Frobenius relatif associé à Y/X.

Le diagramme précédent montre que si Y/X est séparé de type fini, alors FY/X est de type fini (*cf.* EGA I, 6.3.4 (v)).

Exemple 2.7. Dans le cas de la projection $f : \mathbb{A}^n_X \to X$ de la droite affine sur un $\mathbb{F}_p$-schéma, le schéma $(\mathbb{A}^n_X)^{(p)}$ s'identifie à $\mathbb{A}^n_X$ et le Frobenius relatif $\mathbb{A}^n_X \to (\mathbb{A}^n_X)^{(p)}$ s'identifie au morphisme qui envoie l'indéterminée t_i sur t_i^p.

Notons que ce morphisme est plat fini et même libre de rang p^n.

Notons pour finir la proposition suivante :

Proposition 2.8. *Soit X un $\mathbb{F}_p$-schéma et Y un X-schéma localement de présentation finie.*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (i) *Y/X est étale.*
   (ii) *$F_{Y/X}$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si Y/X est lisse de dimension relative n, alors $F_{Y/X}$ est fini et plat, localement libre de rang p^n.*

Notons que le point (2) résulte du point (1) compte tenu de l'exemple précédent. On renvoie à SGA5, XV, prop. 2 pour le point (1).[4]

2.9. Considérons un schéma projectif lisse X de dimension n. Alors l'endomorphisme de Frobenius F de X induit une action sur la cohomologie :

$$F^* : H^*(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l) \to H^*(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l).$$

La proposition 1.6 appliquée à la correspondance F^r donne la formule des traces suivantes

$$N_r = \sum_{i=0}^{2n} tr((F^r)^*, H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l)) \tag{2.9.1}$$

où N_r est le nombre des points fixes de F^r agissant sur X, soit le cardinal de $X(\mathbb{F}_{p^r})$.[5]

Au passage, on déduit de ce qui précède le résultat suivant :

4. Toutefois, le fait que (ii) implique (i) est une conséquence immédiate de EGA4, 17.3.4. C'est la seule implication utilisée pour prouver (2).

5. En effet, du fait que $dF = 0$, Γ_F est transverse à la diagonale Δ_X (autrement dit, $\Gamma_F \times_{X\times X} \Delta_X$ est un schéma lisse – ici une somme de corps). Il en est de même de F^r.

Lemme 2.10. *Sous les hypothèses qui précèdent, le morphisme*

$$F^* : H^0(X_{ét}, \mathbb{Q}_l) \to H^0(X_{ét}, \mathbb{Q}_l)$$

est l'identité. Si X est de dimension n,

$$F^* : H^{2n}(X_{ét}, \mathbb{Q}_l) \to H^{2n}(X_{ét}, \mathbb{Q}_l)$$

est la multiplication par p^n.

Démonstration. On se ramène au cas où X est connexe. Soit $p : X \to \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ le morphisme structural. Le premier point résulte de la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^0(\bar{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_l) \arrow[r, "F^*"] \arrow[d, "p^*"'] & H^0(\bar{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_l) \arrow[d, "p^*"] \\ H^0(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l) \arrow[r, "F^*_{\bar{\mathbb{F}}_p}"] & H^0(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l) \end{tikzcd}$$

et du fait trivial que p^* est un isomorphisme.

Considérons le deuxième point. Soit φ le Frobenius de $\bar{\mathbb{F}}_p$. C'est un automorphisme. Le diagramme commutatif (2.5.1) montre que F est le composé suivant :

$$X \xrightarrow{F_{X/\bar{\mathbb{F}}_p}} X^{(p)} \xrightarrow{\varphi'} X$$

où $X^{(p)} = \varphi^{-1}(X)$ et φ' est le morphisme induit par φ. Ainsi, la proposition précédente montre que F est plat fini localement libre de rang p^n. La formule du degré s'applique donc à F et on en déduit la relation suivante :

$$F_* F^* = p^n.Id. \tag{2.10.1}$$

Or par dualité de Poincaré, $H^{2n}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l)(n)$ est un $\mathbb{Q}_l$-espace vectoriel de rang 1 engendré par la classe fondamentale η de X, qui est caractérisée par la propriété : $\pi_*(\eta) = 1$. On en déduit :

$$F_*(\eta) = \eta. \tag{2.10.2}$$

A priori, $F^*(\eta) = \mu.\eta$ et les deux relations précédentes impliquent donc $\mu = p^n$. □

3. Hypothèse de Riemann

3.1. Soit X_0 un $\mathbb{F}_p$-schéma de type fini. Rappelons qu'on associe à X une fonction :

$$Z(X,t) = \prod_{x \in |X_0|} \frac{1}{1 - t^{\delta_x}}$$

où la somme parcourt les points fermés x de X et $\delta_x = [\kappa_x : \mathbb{F}_p]$ désigne le degré résiduel de x. [6]

Une propriété remarquable de cette fonction est la formule suivante :

$$t.\frac{d}{dt} \log Z(X,t) = \sum_{r>0} N_r.t^r$$

où N_r est le nombre de points fermés de X à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^r}$. [7] Comme on l'a déjà vu, on déduit de cette relation et de la formule des traces de Lefschetz pour les puissance du Frobenius (cf (2.9.1)) l'interprétation cohomologique des fonctions zêta :

6. Cette fonction est liée à la focntion Zêta de Weil par la relation $\zeta_X(s) = Z(X, p^{-s})$.

7. On la déduit de la formule suivante :

$$N_r = \sum_{x \in |X_0|, \delta_x | r} \delta_x.$$

Théorème 3.2 (Grothendieck)**.** *Supposons avec les notations qui précèdent que X est projectif lisse. Soit l un premier différent de p.*

Pour un entier $i \in [0, 2n]$, on note φ_i l'endomorphisme induit par le Frobenius F de X sur $H^i(X_{ét}, \mathbb{Q}_l)$ et on définit le polynôme en t suivant :

$$P_i(t) = \det(1 - t.\varphi_i).$$ [8]

Alors, l'égalité suivante est vraie :

$$Z(X,t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\cdots}{P_0(t)P_2(t)\cdots}$$

On déduit de là toutes les conjectures de Weil exceptée l'hypothèse de Riemann. C'est le premier objectif de ce groupe de travail ; autrement dit, on démontrera le théorème suivant d'après [Del74] :

Théorème 3.3 ([Del74, 1.6])**.** *Avec les notations du théorème précédent, pour tout entier i, $P_i(t)$ est un polynôme à coefficients entiers indépendants de l et ses racines ont pour valeur absolue $p^{-i/2}$.*

Il s'agira en fait de démontrer le résultat suivant :

Lemme 3.4 ([Del74, 1.7])**.** *Avec les notations du théorème précédent, pour tout $i \in [0, 2n]$, les valeurs propres de F^* agissant sur $H^i(X_{ét}, \mathbb{Q}_l)$ sont des entiers algébriques de valeur absolue $p^{i/2}$.*

Références

[Del74] Pierre Deligne. La conjecture de Weil. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (43) :273–307, 1974.

8. Autrement dit, $P_i(t) = \pm t^n \chi_{\varphi_i}(t^{-1})$.