SPECTRES SIMPLICIAUX ET SUITE SPECTRALE HOMOTOPIQUE

FRÉDÉRIC DÉGLISE

Table des matières

Date: mars 2006.

Introduction

1. Suite spectrale de Bousfield-Kan

1.1. **Préliminaires.** Commençons par illustrer la problématique et la méthode de construction de la suite spectrale de Bousfield-Kan dans le cadre beaucoup plus simple de l'algèbre homologique.

Les objets en jeux dans ce préliminaire sont des complexes de groupes abéliens qu'on peut supposer concentrés en degrés positifs.

Soit $\phi : B \to A$ un morphisme de complexes. On appelle fibre de ϕ la désuspension du cône de ϕ et on la note F.

L'algèbre homologique standard associe alors à ϕ une suite exacte longue de groupes abéliens

$$...H_i(F) \to H_i(B) \to H_i(A) \to ... \to H_0(F) \to H_0(B) \to H_0(A) \to 0$$

Supposons maintenant qu'on s'est donné une suite de morphismes de complexes

$$... \to A_n \xrightarrow{\phi_n} A_{n-1} \to ... \to A_0 \to A_{-1} = 0.$$

Soit F_n la fibre de ϕ_n. Alors les suites exactes d'homologie de chacun des morphismes se croisent suivant le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
H_i(A_{n+1}) \arrow[r] & H_i(A_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{i-1}(F_{n+1}) \arrow[r] & H_{i-1}(A_{n+1}) \\
H_i(F_n) \arrow[r, "a_{i,n}"'] \arrow[urr, "d_{i,n}"] & H_i(A_n) \arrow[r, "b_{i,n}"] & H_i(A_{n-1}) \arrow[r, "c_{i,n-1}"] & H_{i-1}(F_n).
\end{tikzcd}$$

On a ainsi obtenu un complexe

$$... \to A_i(F_n) \xrightarrow{d^{i,n}} A_{i-1}(F_{n+1})... \xrightarrow{d^{0,n+i}} A_0(F_{n+i}).$$

Cette information s'organise en fait dans ce qu'on appelle classiquement un couple exact (il faut ajouter de type cohomologique-homologique) :
Pour tout $(i, n) \in \mathbb{N}^2$, on pose $E_{i,n} = H_i(A_n)$, $D_{i,n} = H_i(F_n)$. On en déduit alors un triangle de morphismes bigradués

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dr, "a", "(0{,}0)"'] & \\
D \arrow[ur, "c"', "(-1{,}1)"] & & D \arrow[ll, "b", "(0{,}-1)"']
\end{tikzcd}$$

où l'on a indiqué les bidegrés sur les flèches. Le morphisme $d = ca$ est alors de bidegré $(-1, 0)$.

Une procédure standard permet maintenant de déduire de ce couple exact une suite spectrale. On commence par associer au couple exact ci-dessus un couple exact "dérivé" :

(1) On pose $E' = \mathrm{Ker}(d)/\mathrm{Im}(d)$. La bigraduation est choisie de sorte que $E'_{i,n}$ est un quotient d'un sous-objet de $E_{i,n}$.

(2) On pose $D' = \mathrm{Im}(b)$. La bigraduation est choisie de sorte que $D'_{i,n}$ est un sous-objet de $D_{i,n}$.

Les morphismes a, b, c du triangle ci-dessus induisent dès lors canoniquement des morphismes

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[dr, "a'", "(0{,}0)"'] & \\ D' \arrow[ur, "(-1{,}2)", "c'"'] & & D' \arrow[ll, "b'"', "(0{,}-1)"] \end{tikzcd}.$$

On peut vérifier alors par une chasse au diagramme que les morphismes a', b' et c' induisent une suite exacte longue d'homologie. On fera attention que la différentielle associée au couple exact dérivé est de bidegré $(-1, 2)$ - ce qui est un peu inhabituel.

Suivant ce procédé classique, on construit donc une suite de couples exacts

$$(E, D), (E', D'), ..., (E^{(r)}, D^{(r)}), ...$$

qui forment alors les pages d'une suite spectrale. La différentielle canonique du couple $(E^{(r)}, D^{(r)})$ est de bidegré $(-1, 1 + r)$.

Suivant Bousfield-Kan, on opère une renumérotation de ces couples exacts et l'on pose

$$E_r^{s,t} = E_{t-s,s}^{(r-1)}.$$

On retiendra les différentielles de cette suite spectrale :

$$E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,t+r-1}$$

et par définition le terme de la première page :

$$E_1^{s,t} = H_{t-s}(F_s).$$

Sans entrer dans les détails, on peut définir la limite homotopique de la suite de complexes dont on est parti,

$$A_\infty = \mathrm{holim}_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Si par exemple la suite (A_n) est constante à partir d'un certain rang, on peut voir que la suite spectrale converge

$$E_r^{s,t} \Rightarrow H_{t-s}(A_\infty).$$

La suite spectrale de Bousfield-Kan réalise cette construction dans le cadre de la catégorie homotopique.

1.2. **Tour de fibrations.** On appelle simplement **espace** un espace topologique pointé. Un morphisme d'espaces est une application continue pointée. Il revient au même en pratique de considérer les ensembles simpliciaux. On comprend donc que ce cadre est analogue à celui des complexes en degrés positifs qu'on a explicité ci-dessus.

Soit $f : E \to X$ une fibration et F sa fibre.

Rappelons qu'on dipose d'une suite exacte d'homotopie

$$... \to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(X)$$
$$... \to \pi_1(F) \to \pi_1(E) \to \pi_1(X) \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(X).$$

La différence avec le cadre abélien est que le terme $\pi_0(F)$ est un ensemble pointé muni d'une action de $\pi_1(X)$. L'exactitude de la suite en $\pi_0(F)$ se traduit en termes de cette action.

Pour qualifier une suite exacte de cette forme, on parlera de suite exacte homotopique.

Considérons une suite de morphismes d'espaces

$$...X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1} \to ... \to X_0 \to p_0 X_{-1} = *$$

telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le morphisme p_n est une fibration. Suivant Bousfield et Kan, on appelle ces suites des tours de fibrations.

Soit F_n la fibre de p_n. On en déduit des suites exactes homotopiques :

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(X_{n+1}) \arrow[r] & \pi_i(X_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_{i-1}(F_{n+1}) \arrow[r] & \pi_{i-1}(X_{n+1}) \\
\pi_i(F_n) \arrow[r, "a"'] \arrow[urr, "d"] & \pi_i(X_n) \arrow[r, "b"] & \pi_i(X_{n-1}) \arrow[r, "c"] & \pi_{i-1}(F_n).
\end{tikzcd}$$

Comme dans le cadre abélien, on en déduit un complexe

$$... \to \pi_i(F_n) \to d\pi_{i-1}(F_{n+1})... \to \pi_1(F_{n+i-1}) \to d\pi_0(F_{n+i}),$$

la composée des deux dernières différentielles étant simplement une application constante.

Pour tout couple d'entiers $(i, n) \in \mathbb{N}^2$, on peut alors poser $E^{i,n} = \pi_i(F_n)$ et $D^{i,n} = \pi_i(X_n)$ ce qui définit des objets bigradués E et D. On obtient aussi un triangle de morphismes bigradués (morphismes de groupes ou d'ensembles pointés)

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dr, "a", "(0,0)"'] & \\
D \arrow[ur, "c"', "(-1{,}0)"] & & D \arrow[ll, "b"', "(0,-1)"]
\end{tikzcd}$$

où l'on a indiqué les bidegrés. Par définition, $d = ba : E \to E$ est de degré $(0, -1)$.

On a ainsi obtenu un couple exact homotopique (car les suites longues correspondantes sont des suites exactes homotopiques).

Comme dans le cadre abélien, on peut dériver ce couple exact homotopique et obtenir ainsi une suite de couples exacts homotopiques

$$E, E', ..., E^{(r)}, ...$$

(Il s'agit juste de traiter à part la partie des suites qui sont des ensembles ou des groupes non nécessairement abéliens.)

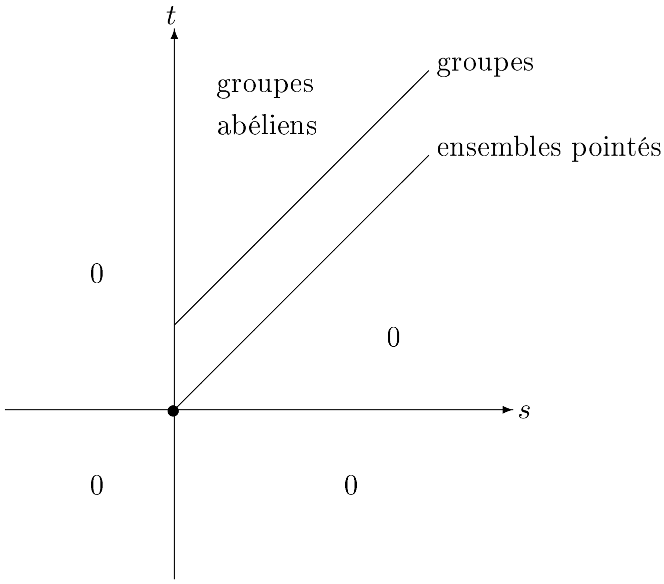
Opérant alors la même renumérotation que dans le cadre abélien, suivant Bousfield et Kan, on obtient une suite spectrale homotopique

$$E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,t+r-1}$$

dont on retiendra le premier terme

$$E_1^{s,t} = \pi_{t-s}(F_s).$$

Le terme $E_r^{s,t}$ a la forme générale suivante :



1.3. **Convergence.** Reprenons la tour de fibrations :

$$...X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1} \to ... \to X_0 \to p_0 X_{-1} = *.$$

On sait attacher à cette tour une limite homotopique

$$X_\infty = \mathrm{holim}_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Rappelons la propriété universelle de cette limite homotopique :
se donner un morphisme $X \to \mathrm{holim}_{n\in\mathbb{N}} X_n$ à équivalence d'homotopie faible près revient à se donner une famille compatible de morphismes $(X \to X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à équivalence d'homotopie faible près.

Considérons à nouveau la suite spectrale homotopique associée à la tour de fibration ci-dessus. On écrit souvent

$$E_r^{s,t} \Rightarrow \pi_{t-s}(X_\infty).$$

Il y a un abus dans cette notation car la suite spectrale ne converge pas toujours vers les groupes d'homotopie en question.

Toutefois, retenons à titre d'illustration le résultat suivant :

Proposition 1.1 ([2], ? ?). *Reprenons les notations qui précèdent. Soit k un entier positif.*

Supposons que pour un entier $r > 0$, $E_r^{i,j} = *$ si $j - i \leq k$.

Alors, l'espace limite X_∞ est k-connexe.

1.4. **Espaces cosimpliciaux et espaces totaux.** On explicite dans cette sous-section l'exemple auquel on appliquera la suite spectrale homotopique.

Soit $\mathscr{O}rd$ la catégorie des ensembles finis ordonnés de la forme $\underline{n} = [0, n]$, munis des applications croissantes. Un expace cosimplicial $X^\bullet$ est un foncteur covariant $X^\bullet : \mathscr{O}rd \to \mathscr{E}$. Les morphismes d'espaces cosimpliciaux sont les transformations naturelles de foncteurs. On note $\mathscr{E}^{\mathscr{O}rd}$ la catégorie des espaces cosimpliciaux.

On peut définir une structure d'espace sur ensembles de morphismes[1]. Si $X^\bullet$ et $Y^\bullet$ sont des espaces cosimpliciaux, on note

$$\mathrm{map}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

cet espace.

Exemple 1.2. (1) Soit Δ^i le simplexe standard d'ordre i vu comme un espace topologique (pointé par l'un de ses sommets).

Les applications cofaces $\delta^{i,j} : \Delta^{i-1} \to \Delta^i$ et codégénérescences $\sigma^{i,j} : \Delta^{i+1} \to \Delta^i$ définissent alors un espace cosimplicial que l'on notera simplement $\Delta^\bullet$.

(2) Considérons un entier $n \leq 0$. On peut tronquer l'espace cosimplicial ci-dessus en ne gardant que les termes de degré plus petit que n

$$\Delta^0 \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longleftarrow}\; \Delta^1 \;...\; \Delta^n \;\substack{\xrightarrow{...}\\\longleftarrow}\; * \;...$$

On note $\Delta^{\bullet,(n)}$ cet espace cosimplicial.

On dispose donc de morphismes d'inclusion canoniques

$$\Delta^{\bullet,(n-1)} \to \Delta^{\bullet,(n)} ... \to \Delta.$$

Définition 1.3. Soit $Y^\bullet$ un espace cosimplicial.

On définit l'espace total de $Y^\bullet$ comme l'espace :

$$\mathrm{Tot}(Y^\bullet) = \mathrm{map}(\Delta^\bullet, Y^\bullet).$$

Pour un entier $n \leq 0$, on définit l'espace total tronqué d'ordre n comme l'espace :

$$\mathrm{Tot}_n(Y^\bullet) = \mathrm{map}(\Delta^{\bullet,(n)}, Y^\bullet).$$

Comme pour les espaces, on peut définir la notion d'espace cosimplicial fibrant par une propriété de relèvement. On donne [2], chap. X, §5 comme référence pour cette définition[2].

On retiendra simplement que si $Y^\bullet$ est fibrant, la suite de morphismes d'espaces pointés

$$... \to \mathrm{Tot}_n(Y^\bullet) \xrightarrow{p_n} \mathrm{Tot}_{n-1}(Y^\bullet) ... \to \mathrm{Tot}_0(Y^\bullet) \to *$$

est une tour de fibrations.

Par ailleurs, l'espace total $\mathrm{Tot}(Y^\bullet)$ est exactement la limite homotopique de cette tour.

On peut associer à cette tour de fibration une suite spectrale homotopique. Dans ce cas, le terme E_2 de cette suite s'exprime directement :

Proposition 1.4 ([2], ch. X, §6-7)**.** *Soit $Y^\bullet$ un espace cosimplicial fibrant.*

Alors la suite spectral homotopique associée à la tour de fibration

$$... \to \mathrm{Tot}_n(Y^\bullet) \xrightarrow{p_n} \mathrm{Tot}_{n-1}(Y^\bullet) ... \to \mathrm{Tot}_0(Y^\bullet) \to *$$

---

[1]Un des intérêts des ensembles simpliciaux est que les problèmes annexes de définir une topologie comme celui précédant la note sont évacués.

[2]Précisons que plus généralement, il existe une structure de catégorie de modèles sur les espaces cosimpliciaux, appelés la structure de Reedy. La construction de cette structure de catégorie de modèle peut se faire dans un cadre abstrait : si $\mathscr{M}$ est une catégorie de modèles, il existe une structure canonique de catégorie de modèles, appelée struture ed Reedy, sur la catégorie des objets cosimpliciaux de $\mathscr{M}$.

est de la forme :

$$E_2^{s,t} = \pi^s \pi_t(Y^\bullet), t \geq s \Rightarrow \pi_{t-s}(\mathrm{Tot}(Y^\bullet)).$$

Dans cette formule, $\pi_t(Y^\bullet)$ est un ensemble simplicial pour $t = 0$, un groupe simplicial pour $t = 1$ et un groupe abélien cosimplicial pour $t \geq 2$. Le groupe $\pi^s\pi_t(Y^\bullet)$ désigne la cohomotopie de cet objet simplicial. On définie celle-ci dans les cas particuliers suivants :

Commençons par le cas où $t \geq 2$. Alors, $\pi_t(Y^\bullet)$ forme un groupe abélien cosimplicial. On lui associe un complexe cohomologique de groupes abéliens

$$\mathcal{N}\pi_t(Y^\bullet) = \mathrm{Ker}(\pi_t\sigma^{s,0}) \cap ... \cap \mathrm{Ker}(\pi_t\sigma^{s,s}) \subset \pi_t(Y^s) \tag{1.1}$$

où les différentielles sont induites par

$$d^s : \sum_j (-1)^j \pi_t(\delta^{s,j}) : \pi_t(Y^{s-1}) \to \pi_t(Y^s).$$

On définit le groupe $\pi^s\pi_t(Y^\bullet)$ comme le s-ème groupe de cohomologie de ce complexe.

Dans le cas où $s = 0$, $t = 0, 1$. Alors, $\pi_t(Y^\bullet)$ est un ensemble simplicial ou un groupe simplicial, et l'on dispose des applications

$$\pi_t(Y^0) \underset{\pi_t\delta^{1,0}}{\overset{\pi_t\delta^{1,1}}{\rightrightarrows}} \pi_t(Y^1).$$

On définit $\pi^0\pi_t(Y^\bullet)$ comme le co-égalisateur de cette double flèche, qui a donc toujours un sens.

Plus généralement, on définit une opération de conormalisation $\mathcal{N}$ pour les objets cosimpliciaux grâce à la même formule que (1.1). Alors le terme $E_1^{s,t} = \pi_{t-s}(F_s)$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{N}^s\pi_t(Y^\bullet)$, et les différentielles de la suite spectrale sont induites par les opérateurs de codégénérescences de $\mathcal{N}\pi_t(Y^\bullet)$. On en déduit la formule

$$\pi^s\pi_t(Y^\bullet) = [\mathcal{N}\pi_t(Y^\bullet), S^{\bullet,(s)}].$$

2. Théorie de l'obstruction de Bousfield

Il nous faut introduire une généralisation de la suite spectrale homotopique : dans cette section, les espaces ne sont plus canoniquement pointés.

Donnons-nous $Y^\bullet$ un espace cosimplicial fibrant.

Alors, l'espace total $\mathrm{Tot}(Y^\bullet)$ n'est pas nécessairement pointé, et dans la tour de fibrations

$$... \to \mathrm{Tot}_n(Y^\bullet) \xrightarrow{p_n} \mathrm{Tot}_{n-1}(Y^\bullet) ... \to \mathrm{Tot}_0(Y^\bullet) \to *,$$

les espaces en jeu ne sont pas non plus pointés.

Un point base de l'espace total $\mathrm{Tot}(Y^\bullet)$ est par définition un morphisme

$$f : \Delta^\bullet \to Y^\bullet$$

ou encore une suite de morphismes

$$f^n : \Delta^n \to Y^n$$

compatibles en un sens évident. D'après l'inclusion $\Delta^{\bullet,(n)} \to \Delta^{\bullet}$, ce point base induit de même une suite compatible

$$f^{(n)} : \Delta^{\bullet,(n)} \to Y^{\bullet}$$

de points bases de $\mathrm{Tot}_n(Y^{\bullet})$ de sorte que dans la tour de fibration ci-dessus, les morphismes respectent ces différents points base. Au point base f est donc associé la suite de fibres $F_n(f) = p_n^{-1}\big(f^{(n-1)}\big)$.

On peut finalement associer une suite spectrale homotopique à l'espace cosimplicial non pointé $Y^{\bullet}$ dès qu'on s'est donné un point base $f : \Delta^{\bullet} \to Y^{\bullet}$. Cette suite spectrale est de la forme

$$E_1^{s,t} = \pi_{t-s}\big(F_n(f)\big) \Rightarrow \pi_{t-s}(\mathrm{Tot}(Y^{\bullet}), f).$$

On peut faire le même calcul que dans la fin de la seciton précédente et obtenir le terme E_2 de cette suite spectrale sous la forme :

$$E_2^{s,t} = \pi^s \pi_t(Y^{\bullet}, f).$$

D'abord f induit un point base sur chacun des Y^n (induit par les points bases de Δ^n qu'on a choisi). Remarquons aussi que $\pi_0(Y^{\bullet}, f)$ devient un ensemble cosimplicial pointé.

Un des problèmes majeurs que l'on rencontre dans la théorie de Hopkins-Miller est la question de construire un point base $f : \Delta^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ pour un certain espace cosimplicial - problème que l'on précisera dans la section suivante.

Pour cela, on utilise une théorie connexe à la suite spectrale homotopique due à Bousfield. Comme on l'a déjà vu, un point base f est équivalent à la donnée d'un système compatible de morphismes

$$f^n : \Delta^n \to Y^n.$$

Par ailleurs, la suite $(f^0, ..., f^n)$ définit un morphisme $f^{(n)} : \Delta^{\bullet,(n)} \to Y^{\bullet}$.

Ainsi la construction de f se prête naturellement à un raisonnement par induction : étant donné $(f^0, ..., f^{n-1})$ qui définissent le morphisme $f^{(n-1)}$ il s'agti de trouver un morphisme $f^n : \Delta^n \to Y^n$ qui relève le morphisme

$$\partial f^{n-1} : \partial\Delta^n \to Y^n$$

dont la restriction à la i-ème face de Δ^n est la composée

$$\Delta^{n-1} \xrightarrow{f^{(n-1)}} Y^{n-1} \xrightarrow{\delta_Y^{n,i}} Y^n.$$

Dans le cas $n = 0$, f^0 n'est autre qu'un point de Y^0. Le morphisme $f^1 : \Delta^1 \to Y^1$ est un chemin qui relie $\delta^{0,0}(f^0)$ et $\delta^{(1,1)}(f^0)$. Ceci est possible si et seulement si ces deux points appartiennent à la même composante connexe par arcs. Il faut donc que

$$f^0 \in \pi^0\pi_0(Y^0) = \mathrm{Ker}\left(\pi_0(Y^0) \overset{\delta_*^{1,1}}{\underset{\delta_*^{1,0}}{\rightrightarrows}} \pi_0(Y^1) \right).$$

On peut interpréter ce résultat grâce au premier terme de la suite spectrale homotopique de $\mathrm{Tot}(Y^{\bullet})$:

Le morphisme f^0 définit un élément de $E_1^{0,0} = \pi_0(F_0)$ car $F_0 = Y^0$.

Alors, le morphisme $\partial f^0 : \partial\Delta^1 \to Y^1$ se relève en f^1 si f^0 se relève dans le terme $E_2^{0,0} = \pi^0\pi_0(Y^\bullet)$ de la suite spectrale.

Suivant Bousfield, on peut définir en général l'obstruction à relever $f^{(n-1)}$ en un point $f^{(n)}$ de l'espace total $\mathrm{Tot}_n(Y^\bullet)$ comme un élément de

$$\pi^n\pi_{n-1}(Y^\bullet, f^{(n-1)})^3.$$

On en déduit le lemme de Bousfield :

Proposition 2.1 ([1], 6.1). *Soit $Y^\bullet$ un espace cosimplicial.*

Considérons un point $f^{(n-1)}$ de $\mathrm{Tot}_{n-1}(Y^\bullet)$ pour un entier $n \geq 2$.

Alors, $f^{(n-1)}$ se relève en un point de $\mathrm{Tot}_n(Y^\bullet)$ dès que

$$\pi^n\pi_{n-1}(Y^\bullet, f^{(n-1)}) = 0.$$

Aisni, partant d'un point y de Y^0, on peut le relever en un point f de l'espace total $\mathrm{Tot}(Y^\bullet)$ si :

(1) La composante connexe par arcs de y appartient à $\pi^0\pi_0(Y^\bullet)$.

(2) on peut vérifier inductivement pour tout $n \geq 2$,

$$\pi^n\pi_{n-1}(Y^\bullet, f^{(n-1)}) = 0.$$

3. Application aux $\mathcal{A}_\infty$-spectres en anneaux de Lubin-Tate

3.1. **Spectres simpliciaux.** Considérons maintenant un univers $\mathcal{U}$ ainsi que $\mathcal{SU}$ la catégorie des spectres sur $\mathcal{U}$.

Un spectre simplicial est un foncteur contravariant

$$\mathscr{O}rd^{op} \to \mathcal{SU}.$$

Cette catégorie est notée $s\mathcal{SU}$ par Rezk.

Définition 3.1. Soit $X_\bullet$ un spectre simplicial.

On définit la réalisation géométrique de $X_\bullet$ comme le spectre sur $\mathcal{U}$

$$|X_\bullet| = \mathrm{coKer}\left(\coprod_{\underline{m}\to\underline{n}} \Delta^m \otimes X_n \rightrightarrows \coprod_{\underline{d}} \Delta^d \otimes X_d\right).$$

Le foncteur réalisation géométrique ci-dessus est adjoint à gauche du foncteur $X \mapsto \mathrm{map}_{\mathcal{SU}}(\Delta^\bullet, X)$ "spectre des chaînes singulières".

Si Y est un spectre, on peut le voir comme un spectre constant de manière évidente. Une augmentation d'un spectre simplicial $X_\bullet$ par Y est un morphisme de spectres simpliciaux $X_\bullet \to Y$ où Y est vu comme un spectre simplicial constant.

On peut définir un produit externe sur les spectres simpliciaux. Pour $X_\bullet \in s\mathcal{SU}$ et $Y_\bullet \in s\mathcal{SU}'$, on définit un spectre simplicial sur $U \times U'$ par la formule

$$(X_\bullet \wedge Y_\bullet)_n = X_n \wedge Y_n.$$

[3] On remarquera que ce terme n'est pas a priori un terme dans la deuxième page de la suite spectrale homotopique car $n-1 < n$. Il fait partie de la suite spectrale homotopique "étendue" (cf [1]).

De même si $\mathcal{L}(U,\mathcal{U}')$ désigne l'espace des isométries entre $\mathcal{U}$ et U', et $T \to \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ une application continue, on définit pour $X_\bullet \in s\mathcal{SU}$ un spectre simplicial sur $\mathcal{U}'$ par la formule

$$(T \rtimes X_\bullet)_n = T \rtimes X_n.$$

Enfin, soit $\mathcal{L}$ l'opérade des isométries linéaires, définie par $(\mathcal{L}[n] = \mathcal{L}(\mathcal{U}^n,\mathcal{U}))_{n\in\mathbb{N}}$. Rappelons qu'on voit $\mathcal{L}$ comme un Σ-objet (*i.e.* suite symétrique) par l'action naturelle de permutation des facteurs à la source. Soit C une opérade sur $\mathcal{L}$. On voit C comme un monoïde dans les Σ-objets. Alors, pour tout spectre X sur $\mathcal{U}$, on définit la C-algèbre libre engendrée par X comme le spectre

$$F_C(X) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} C[n] \rtimes_{\Sigma_n} X^{(n)}.$$

En effet, ce spectre est un un Σ-objet muni d'une action tautologique de C.

Etant donné un spectre simplicial $X_\bullet$, on peut appliquer le foncteur précédent termes à termes sur $X_\bullet$, ce qui définie un spectre simplicial sur $\mathcal{U}$ encore noté $F_C(X_\bullet)$.

Résumons les propriétés élémentaires de la réalisation géométrique :

(1) $|X_\bullet \wedge Y_\bullet| = |X_\bullet| \wedge |Y_\bullet|$.
(2) $|T \rtimes X_\bullet| = T \rtimes |X_\bullet|$.
(3) $|F_C(X_\bullet)| = F_C(|X_\bullet|)$.

Il découle de ces propriétés que la réalisation géométrique d'une C-algèbre simpliciale est encore une C-algèbre.

3.2. **Résolution standard des algèbres sur une opérade.** Soit C une opérade sur $\mathcal{L}$. On considère le couple d'adjoints $F_C : \mathcal{SU} \to C - alg : U$. Grâce à ce couple d'adjoints, on peut associer une résolution simplicial par des C-algèbres libres à toute C-algèbre F. Elle est de la forme :

$$F_C U(F) \leftleftarrows\!\!\to F_C U F_C U(F) \qquad \cdots \qquad (F_C U)^n(F) \qquad \cdots$$

dans laquelle les différents morphismes structuraux sont donnés par toutes les combinaisons possibles de composition des morphismes d'adjonction $F_C U \to 1$ et $1 \to U F_C$.

Suivant Rezk, on pose $C = F_C U$, et on note $C^{\bullet+1}F$ l'algèbre simpliciale obtenue ci-dessus. Remarquons que cette algèbre simpliciale est canoniquement augmentée

$$C^{\bullet+1}F \to F$$

suivant le morphisme d'adjonction $C(F) \to F$. Lorsque F et C sont bien choisis, le morphisme induit

$$|C^{\bullet+1}F| \to F$$

est une équivalence faible. Autrement dit, $C^{\bullet+1}(F)$ est une résolution libre de la C-algèbre F. Le procédé employé ici n'est rien d'autre que la généralisation de la résolution standard d'une C-algèbre losque C est un anneau commutatif.

Ainsi, pour tout couple de C-algèbres (F, E), on considère l'espace cosimplicial

$$Y^\bullet = C - alg(C^{\bullet+1}F, E).$$

A nouveau pour de bons choix de C et F, $Y^\bullet$ est Reedy cofibrant, donc on en déduit une tour de fibrations

$$\ldots \to \mathrm{Tot}_n(Y^\bullet) \xrightarrow{p_n} \mathrm{Tot}_{n-1}(Y^\bullet) \ldots \to \mathrm{Tot}_0(Y^\bullet) \to *$$

Compte tenu de ce qu'on vient de dire, l'espace total de $Y^\bullet$ est

$$\mathrm{Tot}(Y^\bullet) = C - alg(|C^{\bullet+1}F|, E) = C - alg(F, E).$$

Dès lors, le choix d'un morphisme de C-algèbres $f : F \to E$ définit un point base de $\mathrm{Tot}(Y^\bullet)$. On en déduit pour ce choix la suite spectrale homotopique

$$E_2^{s,t} = \pi^s \pi_t(Y^\bullet; f) \Rightarrow \pi_{t-s}(C - alg(X, E); f).$$

On utilisera cette suite spectrale à la fin du travail avec $E = E_{k,\Gamma}$ et $F = E_{k',\Gamma'}$ munie de leur structure de $\mathcal{A}_\infty$-spectre en anneaux. On verra alors que la suite spectrale ci-dessus est concentrée en degré 0 avec

$$E_2^{0,0} = \mathcal{FG}\big((k, \Gamma), (k', \Gamma')\big).$$

Ceci implique que l'espace $C - alg(F, E)$ est homotopiquement concentré en degré 0 avec

$$\mathcal{A}_\infty(F, E) = \pi_0(C - alg(F, E)) = \mathcal{FG}\big((k, \Gamma), (k', \Gamma')\big).$$

On en déduit donc que le foncteur

$$\mathcal{A}_\infty^{LT} \to \mathcal{FG}^{op}$$

est pleinement fidèle.

3.3. **Obstruction et structure d'algèbre.** On exploitera la théorie de l'obstruction pour obtenir une structure de $\mathcal{A}_\infty$-spectre an anneaux sur le spectre $E = E_{k,\Gamma}$ associé à une loi de groupe formelle Γ sur k.

Considérons toujours $\mathcal{L}$ l'opérade des isométries linéaires d'un univers $\mathcal{U}$ (on peut fixer ici $\mathcal{U} = \mathbb{R}^\infty$). On associe au spectre E sur $\mathcal{U}$ l'opérade $\mathcal{E}_E$ des endomorphismes de E, qui est naturellement une opérade au-dessus de $\mathcal{L}$.

Un structure de $_A$-spectre en anneau est équivalent à la donnée d'une $\mathcal{L}$-opérade C munie d'un morphisme de $\mathcal{L}$-opérades

$$C \to \mathcal{E}_E.$$

Pour cela, on produira un spectre simplicial cofibrant $\mathcal{F}K_\bullet$ et on posera $C = |\mathcal{F}K_\bullet| = C$. On utilisera la théorie de l'obstruction de Bousfield avec l'espace cosimplicial

$$Y^\bullet = map_{\mathcal{L}-oper}(\mathcal{F}K_\bullet, \mathcal{E}_E).$$

En effet, son espace total est alors

$$\mathrm{Tot}(Y^\bullet) = map_{\mathcal{L}-oper}(C, \mathcal{E}_E).$$

Références

[1] A. K. Bousfield. Homotopy spectral sequences and obstructions. *Israel J. Math.*, 66(1-3) :54–104, 1989.

[2] A. K. Bousfield and D. M. Kan. *Homotopy limits, completions and localizations.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304.