Théorèmes de comparaison

Rappel de l'exposé de Mattia :

Th (suite exacte fondamentale)

X schéma $2 \in \mathcal{O}_X^*$, $X' = X[\sqrt{-1}]$, $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$

$A \in Ab(\tilde{X}_{ét}) \cong Ab(\tilde{X}'_{ét}(G))$, $j : X_{ét} \hookrightarrow X_b \hookleftarrow X_{rét} : i$

Alors, on a une suite exacte longue

$$\dashrightarrow H^n(X_b, j_! A) \to \boxed{H^n(X_{ét}, A)} \to H^n_G(X_{rét}, \nu(G)^* A) \to \cdots$$

où $\nu(G)^* = (\rho\pi)(G)_*$, $\pi : X'_{ét} \to \tilde{X}_{ét}$, $\rho = i^* j_*$

Aujourd'hui on va montrer qu'elle est isomorphe à

$$\cdots \to H^n(X(C)/G, j_! B \nwarrow ?) \to \boxed{H^n_G(X(C), B)} \to H^n_G(X(R), i^* B) \to \cdots$$

où C est alg. clos de car 0, $R \subseteq C$ réel clos d'indice 2

X/R de t.f séparé, $\Phi : \widetilde{X(C)} \to \tilde{X}'_{et}$, $B = \Phi^* A$

A de torsion et constructible

Plusieurs points :

1) Les groupes de cohomologie $H^n(X(C)/G, \cdot)$ etc sont des groupes de cohomologie semi-algébrique.

Delfs-Knebusch : topologie de Grothendieck sur $X(R)$ où les recouvrements sont engendrés par recouvrements finis par des ouverts semi-algébriques

Un ouvert semi-algébrique : réunion finie d'une intersection finie. $D(a) = \{a > 0\}$

mq $\widetilde{X(R)} \cong \tilde{X}_r$

Il y a une bijection entre les ouverts s-a de $X(R)$ et les ouverts de X_r

On a $H^n(X(R), A) \cong H^n(X_r, A)$ etc

Si $C = \mathbb{C}$ et $R = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, la cohomologie s-a coïncide avec la cohomologie habituelle sur $X(\mathbb{R})$.

2) l'iso entre $H^n(X_{ét}, A)$ et $H^n_G(X(\mathbb{C}), \underline{\Phi}^*A)$ est un th. de comparaison équivariant.
Corollaire du th. de comparaison classique entre coh. étale et coh. faisceautique sur $Y(\mathbb{C})$ où $Y/\mathbb{C}$ t.f. séparé.

$n = p+q$

$$\begin{tikzcd}
H^n_G(X(\mathbb{C}), \underline{\Phi}^*A) & H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \underline{\Phi}^*A)) \arrow[l, Leftarrow] \\
H^n_G(X'_{ét}, A) & H^p(G, H^q(X'_{ét}, A)) \arrow[l, Leftarrow] \arrow[u, "\wr"', "\text{Th de comp. classique}"] \\
H^n(X_{ét}, A). \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Comment généraliser à C ?
Huber : a généralisé le th. de comp. classique à Y/C. Démo analogue.
Théorème d'Existence de Riemann généralisé à C intervient
Ribenboim - van den Dries théorie des modèles utilisant $C = \mathbb{C}$.

3) Construction du topos quotient $\widetilde{X(C)}/G$

$\xrightarrow{\not\simeq} \widetilde{X(C)}/G$ en général

Construction de topos fixe

$\not\simeq \Updownarrow$ G agit librt.

$F \simeq \widetilde{X(R)}$.

G groupe fini, $X(C)$ peut être esp. top. Hausdorff, G agit de manière discontinue

Dans le cas de $\widetilde{X'_{ét}}/G \simeq X_b$
le topos fixe $(\widetilde{X'_{ét}})^G \simeq X_{ret}$

Même non équivalence le morphisme induit un iso en cohomologie !

En plus de détails :

Soit E un G-topos

Rappelons $\pi : E \to E(G)$

$$\pi_* : x \longmapsto \prod_{g \in G} gx$$

le fix topos

$$F = \left(E(G), \tau^{\cdot}\right)$$

où τ est la top. de Grothendieck la plus grossière qui rend π_* continue

On a aussi

$$F = \underset{\overleftarrow{G}}{\mathrm{hlimtop}}\, E.$$

i.e. $\forall$ topos W :

$$\mathrm{Homtop}(W, F) \simeq \mathrm{Homtop}_{BG}(\underline{W \times BG}, E)$$

le morphisme

$$\nu : F \longrightarrow E$$

est tel que faisceautisation

$$\nu^* : \quad E \xrightarrow{\pi_*} E(G) \xrightarrow{\varepsilon_\tau} F$$

On note $\rho = \varepsilon_\tau : E(G) \to F$.

exact à gauche

Déf. Le topos quotient

$$E/_G = \left(F, E(G), \rho\right)$$

On note $i : F \longrightarrow E/_G$

et $j : E(G) \to E/_G$.

Prop. Si F a suff^t de points, par exem E g.s., alors on a une suite exacte longue

$$\cdots \to H^n(E/_G, j_!A) \to H^n_G(E, A) \to H^n_G(F, \nu(G)^*A) \to \cdots$$

Démo Comme la semaine dernière.

Th. X schéma $2 \in \mathcal{O}_X^*$, $X'_{ét}$ G-topos

$$(X'_{ét})^G \cong X_{rét} \qquad X'_{ét}/G \cong X_b.$$

Le cas du G-topos $\tilde{T}$ si T espace top. muni d'une action de G, G groupe fini action discontinue sur T.

Prop. $Z = T^G$, $i : Z \hookrightarrow T$. Alors $\tilde{i} : \tilde{Z} \to \tilde{T}$ induit

$$\mathrm{Sh}(Z) = \tilde{Z} \xrightarrow{\cong} \underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{G}\, \tilde{T} = \widehat{(\tilde{T}(G), \tau)}$$

Prop. (G d'ordre premier) $\exists$ morphisme canonique $\varphi : \tilde{T}/G \to T/G$

φ^* est pleinement fidèle

φ_* exact

φ est une équivalence $\Leftrightarrow$ G agit librement sur T

En particulier φ_* induit un iso. en cohomologie.

Par naturalité du topos quotient, on obtient un morphisme de suite exacte longue

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(X(\mathbb{C})/G, j_!\Phi^*A) \arrow[r] & \boxed{H^n_G(X(\mathbb{C}), \Phi^*A)} \arrow[r] & H^n_G(X(\mathbb{R}), \Phi^*A) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^n(X_b, j_!A) \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{H^n(X_{ét}, A)} \arrow[r] \arrow[u, "\Phi^*"] & H^n_G(X_{rét}, \rho(\Phi^*A)) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

si A forme constructible $\uparrow \cong$ $\qquad$ $\cong$ en tout cas

lemme de 5 $\cong$

Cohomologie équivariante de variétés alg réelles

$X \rightsquigarrow X(\mathbb{C}) \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$:

Krasnov, van Hamel

$H^1(G, \mathrm{Aut}(X_{\mathbb{C}})) \simeq$ formes réelles $Y/\mathbb{R}$ tq $Y \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

Serre