Théorème de Jacobson et modèles homotopiques ρ-stables

Dans tout l'exposé, k désignera un corps de caractéristique 0.

Section 7 de l'article de Bachmann.

Le théorème principal :

Thm (Bachmann) Item 25

Tout modèle homotopique $\mathcal{M}_\rho^*$ ρ-stable, l'action de ρ est inversible sur [illegible] est constitué de faisceaux rét : $\forall n \in \mathbb{Z}$, M_n est un faisceau rét.

Thm 3.1

Le foncteur de localisation

$$SH(k)[p^{-1}] \longrightarrow SH^{\text{rét}}(k)[p^{-1}]$$

est une éq. de cat.

Par un thm de F. Morel, le mod. hom. c'est $SH(k)^{\heartsuit}$.

Reformulation du thm 2.5 :

$$SH(k)[p^{-1}]^{\heartsuit} \longrightarrow SH(k)^{\text{rét}}[p^{-1}]^{\heartsuit}$$

$$M_* \longmapsto M_0$$

est une éq. de cat.

Théorème de Jacobson

Cas global :

Pour rappel, on dispose (grâce au thm de décomposition de Witt), pour tout p de la signature

$$\sigma_p : \begin{array}{ccc} W(A) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \phi & \longmapsto & \sigma_p(\phi) \end{array}$$

$\Rightarrow$ fct continue

totale σ : $\begin{array}{ccc} W(A) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathrm{Sper}(A), \mathbb{Z}) \\ \phi & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \mathrm{Sper}(A) & \to & \mathbb{Z} \\ p & \longmapsto & \sigma_p \phi \end{array} \end{array}$.

Idéaux fondamentaux

Comme les formes hyperboliques ont un rang pair, on a $rg : W(k) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$I(k) := Ker(rg)$: idéal fondamental.
(déf.)

$I(k)$ est engendré additivement par les formes de Pfister $\langle\langle a\rangle\rangle := \langle 1, -a\rangle$.

$\forall n \geq 1$, $I^n(k)$ est engendré par les formes de Pfister de longueur n $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$.

$\langle a, b \rangle := a x^2 + b y^2$ $\qquad \langle 2, -a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 2, -a_n \rangle$

$\sigma_p(\langle\langle a \rangle\rangle) = 2\,\mathbb{1}_{\{a<0\}}$

$\sigma_p(\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle) = 2^n\,\mathbb{1}_{\{a_1<0, \ldots, a_n<0\}}$

Autrement dit, la signature totale σ induit

$$I^n(k) \xrightarrow{\sigma} C(\operatorname{Spec}(k), 2^n\mathbb{Z})$$

$$\begin{array}{ccc} I^n(k) & \xrightarrow{\sigma} & C(\operatorname{Spec}(k), 2^n\mathbb{Z}) \\ \downarrow {\scriptstyle \langle\langle\cdot, 1\rangle\rangle_{n/2}} & & \downarrow {\scriptstyle \times 2} \\ I^{n+1}(k) & \xrightarrow[\sigma]{} & C(\operatorname{Spec} k, 2^{n+1}\mathbb{Z}) \end{array}$$

Et on note $\operatorname{colim}_{n\geq 0} I^n(k) \xrightarrow{\bar{\sigma}} \operatorname{colim}_{n\geq 0} CCSpu(k, 2^n\mathbb{Z})$
$(I^0(k) = W(k))$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \cong CCSpu(k, \mathbb{Z})$

Théorème (Knebusch, Arason)

$\bar{\sigma}$ est bijective.

Preuve

Ceci découle des deux résultats qui suivent :

Théorème (principe local-global, Pfister)

Le noyau de la signature totale σ est le sous-groupe de torsion de $W(k)$: $\operatorname{Ker}(\sigma) = W_t(k)$.
De plus, tout élt de torsion est de torsion 2-primaire.

__Injectivité__ : Soit $\phi \in \operatorname{colim}_{n \geq 0} I^n(\mathcal{U})$, $\overline{\sigma}(\phi) = 0$.

Le diagramme suivant $\circlearrowleft$ pour un certain $n_0 \geq 0$,

$$\begin{tikzcd}
\phi_{n_0} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[d, mapsto, bend right] & & & \phi \arrow[d, mapsto, bend left] \\
I^{n_0}(\mathcal{U}) \arrow[rrr] \arrow[d, "\sigma"] & & & \operatorname{colim}_{n \geq 0} I^n(\mathcal{U}) \arrow[d, "\overline{\sigma}"] \\
C(\operatorname{Sper} \mathcal{U}, 2^{n_0}\mathbb{Z}) \arrow[rrr, "\simeq"] & & & \operatorname{colim}_{n \geq 0} C(\operatorname{Sper} \mathcal{U}, 2^n \mathbb{Z}) \\
0 & & & 0
\end{tikzcd}$$

$\phi_{n_0} \in \ker(\sigma)$ donc, d'après le PLG de Pfister,

$\exists\, m \geq 0$, $2^m \phi_{n_0} = 0$.

Comme le diagramme suivant $\Sigma\, m\ \phi_{n_0} = 0$

$$
\begin{tikzcd}
I^{n_0}(M) \arrow[rr, "\phi_{n_0}"] \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right, "\phi"'] & & I^{n_0+m}(M) \arrow[dl] \\
& \operatorname{colim} I^n(M) & \\
& &
\end{tikzcd}
$$

commute.

Donc $\phi = 0$.

Théorème (de normalité, Elman, Lam)

Soient A, B deux fermés disjoints de $\mathrm{Sper}(k)$. Il existe un entier $n \geq 0$ et $\varphi \in I^n(k)$ t.q.

$$\sigma_P\, \varphi = \begin{cases} 2^n & \text{si } P \in A \\ 0 & \text{si } P \in B \end{cases}$$

Surjectivité : Soit $f \in C(\mathrm{Sper}\, k, \mathbb{Z})$,

Comme $\mathrm{Sper}\, k$ est compact, $f = \sum_{i=1}^{\wedge} n_i \chi_{A_i}$

$n_i \in \mathbb{Z}$, $A_i := f^{-1}(\{n_i\})$ fouverts (ouvert-fermé).

Dps $f = \chi_A$ où A est un fouvert,

on peut appliquer le thm de normalité

avec $B := \mathrm{Sper}\, k \setminus A$.

Donc, $\exists\, n \geq 0$, $\varphi \in I^n(k)$, $\sigma(\varphi) = 2^n f$.

$$\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[d, mapsto] & I^n(k) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & C(\mathrm{Sper}\, k, 2^n \mathbb{Z}) \arrow[d] \\
\overline{\varphi} & \operatorname{colim}_{n \geq 0} I^n(k) \arrow[r, "\overline{\sigma}"'] & \operatorname{colim}_{n \geq 0} C(\mathrm{Sper}\, k, 2^n \mathbb{Z}) \\
& & C(\mathrm{Sper}\, k, \mathbb{Z}) \arrow[u, phantom, "\simeq" description]
\end{tikzcd}$$

donc $\overline{\sigma}(\overline{\varphi}) = f$.

X schéma avec $2 \in \mathcal{O}_X^\times$, on peut faire la même chose que dans le cas précédent :

$W(X)$ anneau de Witt, on peut aussi définir une signature totale

$$\sigma : W(X) \longrightarrow H^0(X_r, \mathbb{Z})$$
$$\phi \longmapsto \begin{array}{c} X_r \longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, P) \longmapsto \sigma_P(i_x^* \phi) \end{array}$$

où $i_x : x \hookrightarrow X$.

On peut aussi définir un rang mod. 2 :

$$\mathrm{rg} : W(X) \longrightarrow H^0_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$\begin{array}{ccc} \phi & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & \mathrm{rg}_x(E) \end{array} \right) \end{array}$$

$$\| \quad (E, \phi)$$

$I(X) := \mathrm{Ker}(\mathrm{rg})$ <u>idéal fondamental de X</u>.

De même, on récupère

$$I(X) \xrightarrow{\sigma} H^0(X_1, 2\mathbb{Z})$$

pour $n \geqslant 0$,

$$I^n(X) \xrightarrow{\sigma} H^0(X_1, 2^n\mathbb{Z}).$$

$$\begin{tikzcd}
I^n(X) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\langle\langle -1 \rangle\rangle"'] & H^0(X_r, 2^n \mathbb{Z}) \arrow[d, "\times 2"] \\
I^{n+1}(X) \arrow[r, "\sigma"'] & H^0(X_r, 2^{n+1}\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

le morphisme induit

$$\operatorname*{colim}_{n \geq 0} I^n(X) \xrightarrow{\bar{\sigma}} H^0_{cf}(X, \mathbb{Z}).$$

On passe aux faisceaux (Zariski) :

- supp : $X_r \longrightarrow X$ est continue,

$$Ab(X_r) \to Ab(X) \to \text{Zariski}.$$

supp_* :

Par un thm de Scheiderer,

$\forall \mathcal{F} \in Ab(X_r)$, $\boxed{H^p(X_r, \mathcal{F}) \simeq H^p_{Zar}(X, supp_* \mathcal{F})}$

En part., pour $\mathcal{F} = \mathbb{Z}$, on a

$$H^p(X_r, \mathbb{Z}) \simeq H^p_{Zar}(X, supp_* \mathbb{Z}).$$

Autrement dit, $supp_* \mathbb{Z}$ est le faisceau de Zariski $U \longmapsto H^0(U_r, \mathbb{Z})$, i.e. associé $H^0_{ret}(X, \mathbb{Z})$.

$\underline{I}^n$ c'est le faisceau (sur X_{Zar}) associé au préfaisceau

$$U \longmapsto I^n(U).$$

Théorème (Jacobson) $X \in Sm_k$,

Dans $Shv_{Zar}(X)$, le morphisme

$\sigma : \operatorname{colim}_{n \geq 0} \underline{I}^n \longrightarrow \mathrm{supp}_* \mathbb{Z}$ est un

iso. de faisceaux.

Théorème (Jacobson "v. Bachmann")

Dans $Shv_{Nis}(Sm_k)$, on a un

isomorphisme entre

$\operatorname{colim}_{n \geq 0} I^n \longrightarrow \mathbb{Z}$

$\hookrightarrow$ faisceaux de Nisnevich sur Sm_k.

"Preuve" de Jacobson ("v. Bachmann"):

Il suffit de montrer l'iso. au niveau des fibres

Prop. (7.2. dans l'article de Jacobson)

Si A est un anneau local régulier, $z \in A^\times$

$\operatorname{colim}_{n \geq 0} I^n(A) \longrightarrow C(CS_{\text{pre}} A, z)$ est

un iso

Comme on travaille avec des faisceaux de Nisnevich, on fait le cas où

A est <u>essentiellement lisse sur $\mathbb{Q}$.</u>

On va se servir du cas "global" (Knebusch, Arason).

A anneau de val. discrète, où $K = \mathrm{Fr}(A)$,

<u>Lemme</u> (Witt, Husemoller)

$k = A/\mathfrak{m}$, π une uniformisante de A.

- Toute forme quad. de rang 1 sur K est isom. à $\langle c \rangle$ où $c = b\pi^n$, b unité de A, $n = 0$ ou 1.
- Le second résidu $\partial_\pi : W(K) \longrightarrow W(k)$ est t.q.

$$\partial_\pi(\langle c \rangle) = \begin{cases} \langle b \rangle & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

- $\forall n \geq 1$, $\partial_\pi : I^n(K) \longrightarrow I^{n-1}(k)$.

P ordre sur K, A convexe sur K,
l'ordre induit sur k est

$\overline{P} := s(P \cap A) \subseteq k$ où $s : A \to k$.

Mtnt, $\forall \xi \in \mathrm{Sper}(k)$, $Y_\xi \subseteq \mathrm{Sper}(K)$
c'est l'ensemble des ordres sur K t.q.
A convexe dans K et $\xi = \overline{P}$ ordre induit.
Par un thm de Baer-Krull,

on obtient : $Y_8 \longrightarrow \{\pm 1\}$

$$P \longmapsto \sigma_P(\overline{\pi})$$

qui est une <u>injection</u>.

Autrement dit, on a deux arches sur Y_8, 2_+ et 2_-,

t.q. : $\left|\begin{array}{l} \sigma_{2_+}(\overline{\pi}) = 1 \\ \\ \sigma_{2_-}(\overline{\pi}) = -1 \end{array}\right.$.

On définit alors β_π : $C(\mathrm{Spa}\, K, \mathbb{Z}) \to C(\mathrm{Spa}\, k, \mathbb{Z})$

pour $f \in C(\mathrm{Spa}\, K, \mathbb{Z})$

t.q. $\beta_\pi(f)$: $\mathrm{Spa}\, k \to \mathbb{Z}$

$\xi \longmapsto f(\xi_+) - f(\xi_-)$.

Par un "calcul" on peut mq :

Lemme

Si $c = b\pi^n$, b une unité dans A, $n = 0$ ou 1,

$$\beta_\pi(\sigma(\langle c \rangle)) = \begin{cases} 2\sigma(\langle b \rangle) & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

On peut alors s'intéresser au diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{colim}_{n\geq 0} I^n(K) \arrow[r, "\partial_\pi"] \arrow[d, "\sigma"'] & \operatorname{colim}_{n\geq -1} I^n(k) \arrow[d, "2\sigma"] \\
C(\operatorname{Spec} K, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\beta_\pi"'] & C(\operatorname{Spec} k, \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

<u>Lemme</u> (Jacobson)

Ce dernier diagramme commute.

$Y = \mathrm{Spec}(A)$,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{colim}_{n\geq 0} I^n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & \operatorname{colim} I^n(K) \arrow[r, "(\bigoplus \partial_\pi)"] \arrow[d, "\sigma"] & \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} \operatorname{colim} I^{n-1}(K(x)) \arrow[d, "\wr\, 2\sigma"] \\
0 \arrow[r] & C(\mathrm{Spec}\, A, \mathbb{Z}) \arrow[r] & C(\mathrm{Spec}\, K, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\bigoplus \beta_\pi"'] & \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} C(\mathrm{Spec}\, K(x), \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

La flèche du milieu est une injection (Knebusch, Arason),
la flèche de droite est injective (idem).
Exactitude de la ligne du haut :
résulte de résultats dans le papier de

Jacobson.

→ de la ligne du bas : lié aux travaux de Schneider : construction d'un certain complexe + lemme identification de Jacobson. → de Cousin.

Lien entre la K-théorie de Milnor-Witt et l'isomorphisme de Jacobson :

<u>Prop.</u> (cor. 1.9)

Les faisceaux colim $\underline{K}^{MW}_n$ et $2\text{-}\mathrm{tors}\ \mathbb{Z}$ (colim sur $n \geq 0$)
sont canoniquement isomorphes. (le colim. est donnée par mult. par $\rho = -[-1] \in K_1^{MW}$)

<u>Preuve</u>

Par définition, la K-théorie de Witt $K^W_*(k)$

$$K^W_*(k) := K^{MW}_*(k)/h \quad \text{où } h := 2 \cdot [-1] + 2 \in K_0^{MW}(k).$$

Théorème (F. Morel, "Sur les puissances de l'idéal fondamental de l'anneau de Witt")

$$K^W_*(k) \simeq I^*(k).$$

L'anneau $K^{MW}_*(k)$ est ε-gradué commutatif

($\varepsilon \in [S^0, S^0] \simeq [\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m]$ la classe correspondante à $k[t, t^{-1}] \to k[t, t^{-1}]$
$t \longmapsto t^{-1}$)

$\varepsilon = -\langle -1 \rangle$ où

$\langle a \rangle := 1 + \eta[a] \in K^{MW}_0(k)$.

$\forall a \in K^{MW}_n(k), \ \forall b \in K^{MW}_m(k)$,

$$a \cdot b = \varepsilon^{nm} b \cdot a.$$

Lemme

Tout recouvrement réel-étale dont le but est essentiellement lisse local hensélien peut être raffiné par un recouvrement fini.

Ainsi, on a, $\forall a \in \underline{K}_1^{MW}(k)$, $a^2 h = 0$.

En part, comme $\rho \in \underline{K}_1^{MW}(k)$, $\rho^2 h = 0$

donc le morphisme

$$\operatorname{colim} \underline{K}_n^{MW} \longrightarrow \operatorname{colim} \underline{I}^n$$

est un iso.

Théorème (Bachmann) cor. 24.

Un faisceau de Nisnevich sur Sm$_{\mathbb{R}}$ est un faisceau rét ssi il satisfait à la cond. de faisceau pour tout recouvrement rét de la forme $U \xrightarrow{\Phi} X$ où X est essentiellement lisse, local henselien, Φ étale et fini.

Lemme

Tout recouvrement réel-étale dont le but est lisse local-hens. peut être raffiné par un recouvrement de la forme du thm précédent.

Théorème (Bachmann)

Tout mod. nom. ρ-stable est constitué de faisceaux

réf

Rappels

Changement de base

k parfait, $\mathcal{M}_*$ modèle homotopique,

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

f étale et fini

$g^* \mathrm{tr}_f = \mathrm{tr}_p\, q^* : \mathcal{M}_*(Y) \to \mathcal{M}_*(X)$

V, X k-schémas essentiellement lisses.

Formules de projection

k parfait, M_* module homotopique,

$f : Y \to X$ un k-morphisme étale et fini

où Y, X k-schémas essentiellement lisses.

(i) $\forall a \in \underline{K}_*^{MW}(Y)$, $\forall b \in M_*(X)$,

$$\boxed{tr_f(M)(a \cdot f^*b) = tr_f(\underline{K}^{MW})(a) \cdot b}$$

(ii) $\forall a \in \underline{K}_*^{MW}(X)$, $\forall b \in M_*(Y)$,

$$tr_f(M)(f^*a \cdot b) = a \cdot tr_f(M)(b)$$

Démonstration

D'après le théorème précédent, il suffit, étant donné $U \xrightarrow{\phi} X$ un recouvrement réel-étale, de mq que $\mathcal{U}_*$, un mod. norm. ρ-stable, satisfait la condition de faisceau pour ϕ.

$U \xrightarrow{\phi} X$ est de la forme du thm précédent (recouvrement fini).

On a besoin de plusieurs résultats sur le spectre réel :

Prop. (BCR, "Constructible sets in real geometry" Andradas, Bröcker, Ruiz)

Soit (A, m, k) local hensélien.

On a $H^0_{ét}(A, \mathbb{Z}) = C(\mathrm{Sper}(A), \mathbb{Z})$

$= C(\mathrm{Sper}(k), \mathbb{Z})$

$= H^0_{rét}(k, \mathbb{Z})$.

- $\mathrm{Sper}(\cdot)$ est compact, tot. discontinu.
- Si $l_1, \ldots, l_n / k$ ext. finies, le morphisme induit
$$\coprod_{i=1}^{n} \mathrm{Spec}(l_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k),$$

s'il est un recouvrement rét, alors est un homéo. local surjectif (Schneider).

__Lemme__

Si $f : X \to Y$ est un homéo. local d'esp. compacts, tot. discontinus alors les fibres de f sont finies et le transfert

$$C(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{Z})$$

tr :

$$\begin{aligned} \phi \longmapsto \; & Y \longrightarrow \mathbb{Z} \\ & y \longmapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x) \end{aligned}$$

est surjectif.

On obtient le fait suivant :

$$\mathrm{Im} : \bigoplus_{i=1}^{n} H^0_{et}(l_i, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0_{et}(U, \mathbb{Z})$$

est surjectif.

Si $U \xrightarrow{\phi} X$ est un recouvrement fini,
par une prop. des anneaux loc. henséliens,
ϕ est de la forme $\underbrace{\coprod}_{\text{finie}} \underbrace{\mathrm{Spec}(A_i)}_{\substack{\text{ens. lisses} \\ \text{loc. hensélien}}} \longrightarrow X$.

Donc, en regardant les corps résiduels des $\hat{l_i}$

A_i, le transfert

$$tr : \bigoplus_i H^0_{ét}(l_i, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0_{ét}(k, \mathbb{Z})$$

est surjectif et, en part., on peut trouver $a \in H^0_{ét}(k, \mathbb{Z})$, $\boxed{tr_\phi(a) = 1}$.

• Soit $b \in H_*(X)$, $b_{|k} = \phi^* b = 0$.

On a $b = 1 \cdot b = tr_\phi(a) \cdot b$

formule de proj. (i). $= tr(a\, \phi^* b)$

$= 0$.

- Soient $U \times_X U \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} U$, soit $b \in M_*(U)$, t.q. $\pi_1^* b = \pi_2^* b$.

On a $c := \mathrm{tr}_\phi(ab) \in M_*(X)$ t.q. $c_{|U} = b$.

En effet, $\mathrm{tr}_\phi(ab)_{|U} = \phi^*(\mathrm{tr}_\phi(ab))$

chgt de base $\quad = \mathrm{tr}_{\pi_2}(\pi_1^*(ab))$

$$\begin{tikzcd} U \times_X U \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & U \arrow[d, "\phi"] \\ U \arrow[r, "\phi"] & X \end{tikzcd}$$

am

Mais comme $\overline{\pi_2}^* b = \pi_2^* b$,

$$\mathrm{tr}_{\overline{\pi_2}}\left(\overline{\pi_2}^*(ab)\right) = \mathrm{tr}_{\overline{\pi_2}}\left(\overline{\pi_2}^*(a)\,\pi_2^*(b)\right)$$

(i) formule de projection

$$= \mathrm{tr}_{\overline{\pi_2}}\left(\overline{\pi_2}^*(a)\right) \cdot b$$

De plus, $\mathrm{tr}_{\overline{\pi_2}}\left(\overline{\pi_2}^*(a)\right) \underset{\text{chgt de base}}{=} \phi^* \mathrm{tr}_\phi(a) = \phi^* 1$

$= 2$.

$\square$