Groupe de Travail

L'hypothèse de Riemann d'après Deligne
Le formalisme des cycles évanescents

David Hébert

Décembre 2010

1. Notations.

Lorsque k est un corps, on note $\overline{k}$ un extension séparablement close. On note $\mathsf{Gal}(\overline{k}/k)$ la limite des groupes $\mathsf{Gal}(k'/k)$ où k' parcourt les extensions finies galoisiennes de k. Toute extension de corps $k \subset k'$ donne lieu à un morphisme de schémas $\mathsf{Spec}(k') \to \mathsf{Spec}(k)$ que l'on note, pour alléger la rédaction, $k' \to k$.

Dans cet exposé on fixe S un trait hensélien (spectre d'un anneau local V de valuation discrète hensélien). On note s le point fermé de S et η son point générique. On note simplement $\overline{s}$ et $\overline{\eta}$ le spectre du corps séparablement clos représenté par ces points. On note $\mathsf{Gal}(\overline{s}/s)$ (resp. $\mathsf{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$) au lieu de $\mathsf{Gal}(\kappa(\overline{s})/\kappa(s))$ (resp. $\mathsf{Gal}(\kappa(\overline{\eta})/\kappa(\eta))$).

On fixe également un schéma X sur S.

$$\begin{tikzcd}
& X_{\overline{s}} \arrow[rr, hook] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \overline{X} \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{\overline{\eta}} \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_s \arrow[rr, hook] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] & & X_\eta \arrow[ll, hook'] \arrow[dd] & \\
& \overline{s} \arrow[rr, hook] \arrow[dl] & & \overline{S} \arrow[dl] & & \overline{\eta} \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] \\
s \arrow[rr, hook] & & S & & \eta \arrow[ll, hook'] &
\end{tikzcd}$$

où $\overline{S}$ est le spectre du normalisé de V dans $\kappa(\overline{\eta})$ de corps résiduel une extensions inséparable de $\kappa(\overline{s})$. On note :

$i : s \to S$	$\overline{i} : \overline{s} \to \overline{S}$	$\varphi : S \to \overline{S}$	$\varphi^X : X \to \overline{X}$
$j : \eta \to S$	$\overline{j} : \overline{\eta} \to \overline{S}$	$\varphi_\eta : \overline{\eta} \to \eta$	$\varphi^X_\eta : X_{\overline{\eta}} \to X_\eta$
$i_X : X_s \to X$	$\overline{i}_X : X_{\overline{s}} \to \overline{X}$		
$j_X : X_\eta \to X$	$\overline{j}_X : X_{\overline{\eta}} \to \overline{X}$	$\varphi_s : \overline{s} \to s$	$\varphi^X_s : X_{\overline{s}} \to X_s$

Par faisceaux on entend faisceaux de Λ-module pour un certain anneau Λ (dont la caractéristique est première à celle des corps résiduels du schéma de base) pour la topologie étale. On note $\widetilde{(X)}_{\text{ét}}$ le topos de ces faisceaux.

2. Retour sur les faisceaux.

§ 2.1. Soit Y un schéma défini au dessus d'un corps k. Notons $\overline{X} := X \otimes_k \overline{k}$ où $\overline{k}$ désigne une clôture séparablement close de k. On a le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} \overline{Y} \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ \overline{k} \arrow[r] & k \end{tikzcd}$$

Proposition 2.2. Le foncteur φ^* induit une équivalence de catégories entre $\widetilde{(Y)}_{\text{ét}}$ et les faisceaux de $\widetilde{(\overline{Y})}_{\text{ét}}$ muni d'une action continue de $\mathsf{Gal}(\overline{k}/k)$.

Démonstration. Soit $\widetilde{k}$ une extension galoisienne de k contenue dans $\overline{k}$. Avec les notations évidentes on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} \overline{U} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{U} \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ \overline{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Y} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ \overline{k} \arrow[r] & \widetilde{k} \arrow[r] & k \end{tikzcd}$$

Pour $F \in \widetilde{(\overline{Y})}_{\text{ét}}$ on a $(\varphi^*F)(\overline{U}) = \lim_{\widetilde{U}} \widetilde{\varphi}^*F(\widetilde{U})$. Sur chaque $\widetilde{\varphi}^*F(\widetilde{U})$ le groupe $\mathsf{Gal}(\overline{k}/k)$ agit de manière évidente via $\mathsf{Gal}(\widetilde{k}/k)$. De sorte que le foncteur $\varphi^* : \widetilde{(Y)}_{\text{ét}} \to \widetilde{(\overline{Y})}_{\text{ét}}$ induit un foncteur entre $\widetilde{(Y)}_{\text{ét}}$ et les faisceaux sur $\overline{Y}$ muni d'une action continue du groupe de Galois de $\overline{k}/k$. On vérifie que le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \varphi_* : \widetilde{(\overline{Y})}_{\text{ét}} + \textit{Act. Cont. de } \mathsf{Gal}(\overline{k}/k) & \longrightarrow & \widetilde{(Y)}_{\text{ét}} \\ F & \longmapsto & \varphi_* F^{\mathsf{Gal}(\overline{k}/k)} \end{array}$$

en est un quasi-inverse. □

Définition 2.3. *Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ des catégories et $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un foncteur (covariant). On note $(\mathscr{B}, \mathscr{A}, f)$ la catégorie décrite par les règles suivantes :*

- *Les objets de $(\mathscr{B}, \mathscr{A}, f)$ sont les triples (B, A, h) où A est un objet de $\mathscr{A}$, B un objet de $\mathscr{B}$ et $h : B \to f(A)$.*
- *Un morphisme entre (B, A, h) et (B', A', h') est la donnée de deux moprhismes (b, a) tels que $b : B \to B'$, $a : A \to A'$ et tel que le carré suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "b"] & f(A) \arrow[d, "f(a)"] \\ B' \arrow[r, "h'"'] & f(A') \end{tikzcd}$$

- *La composition est celle issue de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.*

Théorème 2.4. Soit X un schéma sur S. Le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \widetilde{(X)}_{\text{ét}} & \longrightarrow & (\widetilde{(X_s)}_{\text{ét}}, \widetilde{(X_\eta)}_{\text{ét}}, i_X^* j_{X*}) \\ F & \longmapsto & (i_X^* F, j_X^* F, i_X^* \star (1 \to j_{X*} j_X^*) F) \end{array}$$

défini de manière évidente sur les morphismes est une équivalence de catégories.

Démonstration. On vérifie sans trop de difficulté que Φ est pleinement fidèle. Il suffit alors de montrer que Φ est surjectif sur les objets. Soit $(Z, U, h) \in (\widetilde{(X_s)}_{\text{ét}}, \widetilde{(X_\eta)}_{\text{ét}}, i_X^* j_{X*})$. On construit le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & j_{X*}U \arrow[d, "(1 \to i_{X*}i_X{}^*)j_{X*}U"] \\ i_{X*}Z \arrow[r, "i_{X*}h"'] & i_{X*}i_X^* j_{X*}U \end{tikzcd}$$

On vérifie sans peine que $\Phi(F) = (Z, U, h)$. □

En jumelant les deux précédents résultats on arrive au suivant.

Corollaire 2.5. Un faisceau F sur X est la donnée de

- un faisceau $F_{\overline{s}}$ sur $X_{\overline{s}}$ muni d'une action continue de $\mathsf{Gal}(\overline{s}/s)$,
- un faisceau $F_{\overline{\eta}}$ sur $X_{\overline{\eta}}$ muni d'une action continue de $\mathsf{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$
- un morphisme $F_{\overline{s}} \to i^* j_* F_{\overline{\eta}}$ équivariant.

§ 2.6. Le foncteur i^* de la catégorie des schémas fini et étales sur S dans la catégories des schémas finis étale sur s est une équivalence de catégories. Son quasi-inverse sp^* est issue du morphisme de spécialisation $\mathsf{sp} : S \to s$. Notons

$$\mathsf{sp}^* : \widetilde{(s)}_{\text{ét}} \to \widetilde{(S)}_{\text{ét}}, \qquad \overline{\mathsf{sp}}^* : \widetilde{(\overline{s})}_{\text{ét}} \to \widetilde{(\overline{S})}_{\text{ét}}$$

Par exemple

$$\begin{array}{lll} \overline{\mathsf{sp}}^* F_{\overline{s}} = (F_{\overline{s}}, F_{\overline{s}}, 1), & \overline{j}^*(F_{\overline{s}}, F_{\overline{\eta}}, h) = F_{\overline{\eta}}, & \overline{i}^*(F_{\overline{s}}, F_{\overline{\eta}}, h) = F_{\overline{s}} \\ \overline{\mathsf{sp}}_*(F_{\overline{s}}, F_{\overline{\eta}}, h) = F_{\overline{s}}, & \overline{j}_* F_{\overline{\eta}} = (F_{\overline{\eta}}^I, F_{\overline{\eta}}, \hookrightarrow), & .... \end{array}$$

où I représente le groupe d'inertie, c'est-à-dire le noyau de la surjection $\mathsf{Gal}(\overline{\eta}/\eta) \to \mathsf{Gal}(\overline{s}/s)$ (à noter que $i^* j_* F$ désigne les invariants sous I).

Définition 2.7. *Soient k un corps, Y un schéma sur k et F un faisceau sur Y. Notons $\overline{Y} = Y \otimes_k \overline{k}$ le schéma Y vu après extension des scalaires à $\overline{k}$. On sait que le groupe de Galois $\mathsf{Gal}(\overline{k}/k)$ agit continuement sur $\overline{F} := \varphi^* F$ où $\varphi : \overline{Y} \to Y$. On dira que cette action est* **compatible** *avec celle de $\mathsf{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $\overline{Y}$ s'il s'agit d'une action par automorphisme de $\mathsf{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $\overline{Y}$ et F induisant l'action donnée sur $\overline{Y}$.*

Pour simplifier les notations, on dira dans ce cas que F est MACC de $\mathsf{Gal}(\overline{k}/k)$.

Définition 2.8. *Soit Y un schéma au dessus de s.*

1. *Un faisceau F sur $Y \times_s \eta$ est la donnée d'un faisceau $\overline{F}$ sur $\overline{Y} = Y \otimes_s \overline{s}$, MACC de $\mathsf{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$.*
2. *Un morphisme $u : F \to G$ de faisceaux sur $Y \times_s \eta$ est la donnée d'un morphisme $\overline{u} : \overline{F} \to \overline{G}$ équivariant pour l'action de $\mathsf{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$.*
3. *Ces données permettent de considérer la catégorie des faisceaux sur $Y \times_s \eta$; on la note $\widetilde{(Y \times_s \eta)}_{ét}$.*
4. *Un faisceau F sur $Y \times_s S$ est la donnée d'un triple*

$$F = (F_s, F_\eta, \rho_F)$$

où

- *F_s est un faisceau sur Y, soit encore un faisceau $F_{\overline{s}}$ sur $\overline{Y} = Y \otimes_s \overline{s}$, MACC de $\mathsf{Gal}(\overline{s}/s)$.*
- *F_η est un faisceau sur $Y \times_s \eta$, c'est-à-dire un faisceau $F_{\overline{\eta}}$ sur $\overline{Y}$, MACC de $\mathsf{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$.*
- *$\rho_F : F_{\overline{s}} \to F_{\overline{\eta}}$ est un morphisme équivariant.*

5. *Un morphisme $u : F \to G$ de faisceaux sur $Y \times_s S$ est la donnée d'un couple*

$$u = (u_s, u_\eta)$$

où

- $u_s : F_s \to G_s$ *est un morphisme de faisceaux sur* Y*, soit encore* $u_{\overline{s}} : F_{\overline{s}} \to G_{\overline{s}}$ *un morphisme de faisceaux sur* $\overline{Y}$ *équivariant pour l'action de* $\mathsf{Gal}(\overline{s}/s)$.
- $u_\eta : F_\eta \to G_\eta$ *est un morphisme de faisceaux sur* $Y \times_s \eta$*, soit encore* $u_{\overline{\eta}} : F_{\overline{\eta}} \to G_{\overline{\eta}}$ *un morphisme de faisceaux sur* $\overline{Y}$ *équivariant pour l'action de* $\mathsf{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$.

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
F_{\overline{s}} \arrow[r, "u_{\overline{s}}"] \arrow[d, "\rho_F"'] & G_{\overline{s}} \arrow[d, "\rho_G"] \\
F_{\overline{\eta}} \arrow[r, "u_{\overline{\eta}}"'] & G_{\overline{\eta}}
\end{tikzcd}$$

6. *Ces données permettent de considérer la catégorie des faisceaux sur* $Y \times_s S$ *; on la note* $\widetilde{(Y \times_s S)}_{ét}$.

§ 2.9. Soient $f : Y \to Y'$ un morphisme de s-schémas et $F \in \widetilde{(Y' \times_s \eta)}_{\text{ét}}$. Notons $\overline{F}$ sa restriction à $\overline{Y} = Y \otimes_s \overline{s}$ et $\overline{f} : \overline{Y} \to \overline{Y'}$ le morphisme induit par f par extension des scalaires. On a les diagrammes commutatifs suivants (lorsqu'il y a un sens de parler de f^*, f_*, $f_!$ ...)

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{(Y')}_{\text{ét}} \arrow[r, shift left, "f^*"] \arrow[d, "(\varphi^{Y'})^*"'] & \widetilde{(Y)}_{\text{ét}} \arrow[l, shift left, "f_*"] \arrow[d, "(\varphi^{Y})^*"] \\
\widetilde{(\overline{Y'})}_{\text{ét}} \arrow[r, shift left, "\overline{f}^*"] & \widetilde{(\overline{Y})}_{\text{ét}} \arrow[l, shift left, "\overline{f}_*"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widetilde{(Y')}_{\text{ét}} \arrow[r, shift left, "f_!"] \arrow[d, "(\varphi^{Y'})^*"'] & \widetilde{(Y)}_{\text{ét}} \arrow[l, shift left, "f^*"] \arrow[d, "(\varphi^{Y})^*"] \\
\widetilde{(\overline{Y'})}_{\text{ét}} \arrow[r, shift left, "\overline{f}_!"] & \widetilde{(\overline{Y})}_{\text{ét}} \arrow[l, shift left, "\overline{f}^*"]
\end{tikzcd}$$

(où $\varphi^?$ est celui de 2.2). On pose

$$(f \times_s \eta)^* F := \overline{f}^* \overline{F}.$$

Si $\overline{F}$ est MACC de $\mathsf{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$ alors $(f \times_s \eta)^* F$ aussi de sorte que l'on a un foncteur

$$(f \times_s \eta)^* : \widetilde{(Y' \times_s \eta)}_{\text{ét}} \to \widetilde{(Y \times_s \eta)}_{\text{ét}}$$

défini de manière évidente sur le morphisme.

- Lorsque f est quasi-fini on dispose également d'un foncteur

$$(f \times_s \eta)_* : \widetilde{(Y \times_s \eta)}_{\text{ét}} \to \widetilde{(Y' \times_s \eta)}_{\text{ét}}.$$

- Si f est un morphisme séparé de type fini, on dispose d'un foncteur

$$(f \times_s \eta)_! : \widetilde{(Y \times_s \eta)}_{\text{ét}} \to \widetilde{(Y' \times_s \eta)}_{\text{ét}},$$

  qui correspond, lorsque f est une immersion localement fermée, au prolongement par 0.

- Lorsque f est une immersion localement fermée on a le foncteur

$$(f \times_s \eta)^! : \widetilde{(Y' \times_s \eta)}_{\text{ét}} \to \widetilde{(Y \times_s \eta)}_{\text{ét}}.$$

De plus par construction on a les adjonctions

$$(f \times_s \eta)^* : \widetilde{(Y' \times_s \eta)}_{\text{ét}} \leftrightarrows \widetilde{(Y \times_s \eta)}_{\text{ét}} : (f \times_s \eta)_*, \qquad (f \times_s \eta)_! : \widetilde{(Y \times_s \eta)}_{\text{ét}} \leftrightarrows \widetilde{(Y' \times_s \eta)}_{\text{ét}} : (f \times_s \eta)^!$$

§ 2.10. On vérifie de même que les transformations suivantes, définies de manière évidente sur les morphismes, sont des foncteurs bien définis (les secondes identifications viennent de 2.2, le $^{+\,\mathsf{Gal}}$ indiquant l'action du groupe de galois sous-jascent).

- On pose

$$\begin{array}{rcl}(f\times_s S)^*:(\widetilde{Y'\times_s S})_{\text{ét}} & \longrightarrow & (\widetilde{Y\times_s S})_{\text{ét}} \\ F & \longmapsto & (f^*F_s, f_\eta^*F_\eta, \overline{f}^*\rho_F) = (\overline{f}^*F_{\overline{s}} + {\small \mathsf{Gal}}, \overline{f}^*F_{\overline{\eta}} + {\small \mathsf{Gal}}, \overline{f}^*\rho_F).\end{array}$$

- Lorsque f est quasi-fini on pose

$$\begin{array}{rcl}(f\times_s S)_*:(\widetilde{Y\times_s S})_{\text{ét}} & \longrightarrow & (\widetilde{Y'\times_s S})_{\text{ét}} \\ F & \longmapsto & (f_*F_s, f_{\eta *}F_\eta, \overline{f}_*\rho_F) = (\overline{f}_*F_{\overline{s}} + {\small \mathsf{Gal}}, \overline{f}_*F_{\overline{\eta}} + {\small \mathsf{Gal}}, \overline{f}_*\rho_F).\end{array}$$

- Lorsque f est un morphisme séparé de type fini, on pose

$$\begin{array}{rcl}(f\times_s S)_!:(\widetilde{Y\times_s S})_{\text{ét}} & \longrightarrow & (\widetilde{Y'\times_s S})_{\text{ét}} \\ F & \longmapsto & (f_!F_s, f_{\eta !}F_\eta, \overline{f}_!\rho_F) = (\overline{f}_!F_{\overline{s}} + {\small \mathsf{Gal}}, \overline{f}_!F_{\overline{\eta}} + {\small \mathsf{Gal}}, \overline{f}_!\rho_F).\end{array}$$

  qui correspond, lorsque f est une immersion localement fermée, au prolongement par 0.
- Lorsque f est une immersion localement fermée on pose

$$\begin{array}{rcl}(f\times_s S)^!:(\widetilde{Y'\times_s S})_{\text{ét}} & \longrightarrow & (\widetilde{Y\times_s S})_{\text{ét}} \\ F & \longmapsto & (f^!F_s, f_\eta^!F_\eta, \overline{f}^!\rho_F) = (\overline{f}^!F_{\overline{s}} + {\small \mathsf{Gal}}, \overline{f}^!F_{\overline{\eta}} + {\small \mathsf{Gal}}, \overline{f}^!\rho_F).\end{array}$$

On a les adjonctions

$$(f\times_s S)^*:(\widetilde{Y'\times_s S})_{\text{ét}} \leftrightarrows (\widetilde{Y\times_s S})_{\text{ét}}:(f\times_s S)_*, \qquad (f\times_s S)_!:(\widetilde{Y\times_s S})_{\text{ét}} \leftrightarrows (\widetilde{Y'\times_s S})_{\text{ét}}:(f\times_s S)^!$$

3. Le foncteur ψ.

Définition 3.1. *Pour tout faisceau $F\in(\widetilde{X_\eta})_{ét}$ on pose*

$$\psi_\eta^X(F) := \overline{i}_X^*\overline{j}_{X*}\varphi_\eta^{X*}F.$$

§ 3.2. Pour tout $F\in(\widetilde{X_\eta})_{\text{ét}}$, $\psi_\eta^X(F)$ est MACC de $\mathsf{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$, ce qui définit un foncteur

$$\psi_\eta^X:(\widetilde{X_\eta})_{\text{ét}} \to (\widetilde{X_s\times_s \eta})_{\text{ét}}$$

Lorsque F est un faisceau sur X on note

$$\begin{array}{rcl} F_s &:=& i_x^*F, \\ F_\eta &:=& j_X^*F, \\ \overline{F} &:=& \varphi^{X*}F, \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} F_{\overline{s}} &:=& \varphi_s^{X*}F_s = \overline{i}_X^*\overline{F}, \\ F_{\overline{\eta}} &:=& \varphi_\eta^{X*}F_\eta = \overline{j}_X^*\overline{F}, \end{array}$$

Définition 3.3. *Soit F un faisceau sur X ; on pose $\psi^X(F)_s := F_s$ et $\psi^X(F)_\eta := \psi_\eta(F_\eta)$. De même $\psi^X(F)_{\overline{s}} := F_{\overline{s}}$ et $\psi^X(F)_{\overline{\eta}} := \psi^X(F)_\eta$.*

§ 3.4. Soit $F\in(\widetilde{X})_{\text{ét}}$. L'adjonction $\overline{i}_X^*(\overline{F}\to\overline{j}_{X*}\overline{j}_X^*\overline{F})$ est un morphisme équivariant $\rho_F:\psi^X(F)_{\overline{s}}\to\psi^X(F)_{\overline{\eta}}$ de sorte que l'on a ainsi défini un foncteur

$$\psi^X:(\widetilde{X})_{\text{ét}} \to (\widetilde{X_s\times_s S})_{\text{ét}}.$$

Utilisant l'équivalence 2.2, on a pour tout $F\in(\widetilde{X})_{\text{ét}}$, $\psi^X(F) = (F_{\overline{s}} + {\small \mathsf{Gal}}, \overline{i}_X^*\overline{j}_{X*}F_{\overline{\eta}} + {\small \mathsf{Gal}}, \rho_F)$ où le $+ {\small \mathsf{Gal}}$ est mis (pour mémoire) pour signaler l'action du groupe de Galois sous-jascent (action MACC).

§ 3.5. Soit $f : X \to X'$ un morphisme de S-schémas. On note $f_s : X_s \to X'_s$ et $f_\eta : X_\eta \to X'_\eta$ les morphismes induis sur les fibres en s et en η. Considérons également le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
X_{\overline{s}} \arrow[r, "\overline{i}_X"] \arrow[d, "f_{\overline{s}}"] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"] & X_{\overline{\eta}} \arrow[l, "\overline{j}_X"'] \arrow[d, "f_{\overline{\eta}}"] \\
X'_{\overline{s}} \arrow[r, "\overline{i}_{X'}"] & \overline{X'} & X'_{\overline{\eta}} \arrow[l, "\overline{j}_{X'}"']
\end{tikzcd}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl}
(f_s \times_s S)^*\psi^{X'}(F) & = & (f_s \times_s S)^*(F_{\overline{s}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, \overline{i}^*_{X'}\overline{j}_{X'*}F_{\overline{\eta}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, \rho_F) \\
& = & (f_{\overline{s}}{}^*F_{\overline{s}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, f_{\overline{s}}{}^*\overline{i}^*_{X'}\overline{j}_{X'*}F_{\overline{\eta}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, f_{\overline{s}}{}^*\rho_F) \\
& = & (f_{\overline{s}}{}^*F_{\overline{s}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, (\overline{i}_{X'}f_{\overline{s}})^*\overline{j}_{X'*}F_{\overline{\eta}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, f_{\overline{s}}{}^*\rho_F) \\
& = & (f_{\overline{s}}{}^*F_{\overline{s}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, (\overline{f}\overline{i}_X)^*\overline{j}_{X'*}F_{\overline{\eta}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, f_{\overline{s}}{}^*\rho_F) \\
& = & (f_{\overline{s}}{}^*F_{\overline{s}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, \overline{i}^*_X\overline{f}^*\overline{j}_{X'*}F_{\overline{\eta}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, f_{\overline{s}}{}^*\rho_F) \\
& \to & (f_{\overline{s}}{}^*F_{\overline{s}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, \overline{i}^*_X\overline{j}_{X*}f_{\overline{\eta}}{}^*F_{\overline{\eta}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, f_{\overline{s}}{}^*\rho_F) \\
& = & \psi^X(f_{\overline{s}}{}^*F_{\overline{s}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, f_{\overline{\eta}}{}^*F_{\overline{\eta}}{}^{+\,\mathsf{Gal}}, \rho_{f^*F}) \\
& = & \psi^X(f^*F).
\end{array}$$

On a ainsi un morphisme de changement de base $(f_s \times_s S)^*\psi^{X'} \to \psi^X f^*$ issu du morphisme $\overline{f}^*\overline{j}_{X'*} \to \overline{j}_{X*}f_{\overline{\eta}}{}^*$ (lui même issu des adjonctions canoniques : $\overline{f}^*\overline{j}_{X'*} \to \overline{j}_{X*}\overline{j}^*_X\overline{f}^*\overline{j}_{X'*} = \overline{j}_{X*}f^*_{\overline{\eta}}\overline{j}^*_{X'}\overline{j}_{X'*} \to \overline{j}_{X*}f^*_{\overline{\eta}}$). Par la même méthode on trouve les morphismes de changement de base suivants.

- Issu du changement de base $\overline{i}^*_{X'}\overline{f}_* \to f_{\overline{s}*}\overline{i}^*_X$ on a $\psi^{X'}f_* \to (f_s \times_s S)_*\psi^X$.
- Lorsque f est quasi-fini on a $(f_s \times_s S)_!\psi^X \to \psi^{X'}f_!$ qui, lorsque f est fini, est l'inverse de $\psi^{X'}f_* \to (f_s \times_s S)_*\psi^X$.
- Lorsque f est quasi-fini on a $\psi^X f^! \to (f_s \times_s S)^!\psi^{X'}$ qui, lorsque f est étale, est l'inverse de $(f_s \times_s S)^*\psi^{X'} \to \psi^X f^*$.

§ 3.6. Les précédents changements de base donnent les suivants :

$$(f_s \times_s \eta)^*\psi^{X'}_\eta \to \psi^X_\eta f_\eta{}^*, \quad \psi^{X'}_\eta f_{\eta*} \to (f_s \times_s \eta)_*\psi^X_\eta, \quad (f_s \times_s \eta)_!\psi^X_\eta \to \psi^{X'}_\eta f_{\eta!}, \quad \psi^X_\eta f_\eta{}^! \to (f_s \times_s \eta)^!\psi^{X'}_\eta.$$

§ 3.7. On montre que ψ^S_η est une équivalence de catégories (2.6) donc que ψ^S est aussi une équivalence de catégories de sorte que lorsque f est le morphisme structural $X \to S$, on a des foncteurs

$$f_* \to (f_s \times_s S)_*\psi^X, \qquad (f_s \times_s S)_!\psi^X \to f_!,$$

$$f_{\eta*} \to (f_s \times_s \eta)_*\psi^X_\eta, \qquad (f_s \times_s \eta)_!\psi^X_\eta \to f_{\eta!},$$

où $f_s : X_s \to s$ et $f_\eta : X_\eta \to \eta$.

4. Le foncteur Φ. Cycles évanescents.

Soit Y un s-schéma.

§ 4.1. Notons $\mathsf{D}^*(Y \times_s \eta)$ (le symbole $*$ désignant l'un des éléments $\{+, -, b\}$) la localisation de Verdier de $\mathsf{K}^*\left((\widetilde{Y \times_s \eta})_{\text{ét}}\right)$ par les complexes quasi-isomorphes à 0. Un complexe $K \in \mathsf{D}^*(Y \times_s \eta)$ est un complexe de faisceaux $K_{\overline{\eta}}$ sur $\overline{Y} = Y \otimes_s \overline{s}$, MACC de $\mathsf{Gal}(\overline{s}/s)$ en chaque degré définit à quasi-isomorphisme prés. Soit $f : Y \to Y'$ un morphisme de s-schémas. On peut dériver les foncteurs 2.9 et obtenir les suivants.

- Le foncteur
$$\mathsf{L}(f \times_s \eta)^* = \mathsf{R}(f \times_s \eta)^* = (f \times_s \eta)^* : \mathsf{D}(Y \times_s \eta) \to \mathsf{D}(Y' \times_s \eta).$$

- Lorsque f est quasi-fini on dispose du foncteur

$$\mathsf{R}(f \times_s \eta)_* : \mathsf{D}^+(Y \times_s \eta) \to \mathsf{D}^+(Y' \times_s \eta).$$

- Si f est un morphisme séparé de type fini, on dispose du foncteur

$$\mathsf{R}(f \times_s \eta)_! : \mathsf{D}^+(Y \times_s \eta) \to \mathsf{D}^+(Y' \times_s \eta),$$

  qui correspond, lorsque f est une immersion localement fermée, au prolongement par 0.
- Lorsque f est une immersion localement fermée on a le foncteur

$$\mathsf{R}(f \times_s \eta)^! = \mathsf{L}(f \times_s \eta)^! = (f \times_s \eta)^! : \mathsf{D}^+(Y' \times_s \eta) \to \mathsf{D}^+(Y \times_s \eta).$$

De plus par construction on a les adjonctions

$$(f \times_s \eta)^* : \mathsf{D}^+(Y' \times_s \eta) \leftrightarrows \mathsf{D}^+(Y \times_s \eta) : \mathsf{R}(f \times_s \eta)_*, \qquad \mathsf{R}(f \times_s \eta)_! : \mathsf{D}^+(Y \times_s \eta) \leftrightarrows \mathsf{D}^+(Y' \times_s \eta) : (f \times_s \eta)^!$$

§ 4.2. De même, on définit $\mathsf{D}^*(Y \times_s S)$ comme la localisation de Verdier de $\mathsf{K}^*\left(\widetilde{(Y \times_s S)_{\text{ét}}}\right)$ par les complexes quasi-isomorphes à 0. Un complexe $K = (K_s, K_\eta, \rho_K) \in \mathsf{D}^*(Y \times_s S)$ est la donnée de

- un complexe de faisceaux K_s sur Y, soit encore un complexe de faisceaux $K_{\overline{s}}$ sur $\overline{Y} = Y \otimes_s \overline{s}$, MACC de $\mathsf{Gal}(\overline{s}/s)$ en chaque degré,
- un complexe de faisceaux K_η sur $Y \times_s \eta$, soit encore un complexe de faisceaux $K_{\overline{\eta}}$ sur $\overline{Y}$, MACC de $\mathsf{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$ en chaque degré,
- un morphisme équivariant $\rho_K : K_{\overline{s}} \to K_{\overline{\eta}}$ (dans la catégorie dérivée de la catégorie d'homotopie de $\widetilde{(\overline{Y})_{\text{ét}}}$).

(ces complexes étant définis à quasi-isomorphisme prés.)

Soit $f : Y \to Y'$ un morphisme de s-schémas. Comme précédemment, on peut dériver les foncteurs 2.10.

- Le foncteur

$$\mathsf{L}(f \times_s S)^* = \mathsf{R}(f \times_s S)^* = (f \times_s S)^* : \mathsf{D}(Y \times_s S) \to \mathsf{D}(Y' \times_s S).$$

- Lorsque f est quasi-fini on dispose du foncteur

$$\mathsf{R}(f \times_s S)_* : \mathsf{D}^+(Y \times_s S) \to \mathsf{D}^+(Y' \times_s S).$$

- Si f est un morphisme séparé de type fini, on dispose du foncteur

$$\mathsf{R}(f \times_s S)_! : \mathsf{D}^+(Y \times_s S) \to \mathsf{D}^+(Y' \times_s S),$$

  qui correspond, lorsque f est une immersion localement fermée, au prolongement par 0.
- Lorsque f est une immersion localement fermée on a le foncteur

$$\mathsf{R}(f \times_s S)^! = \mathsf{L}(f \times_s S)^! = (f \times_s S)^! : \mathsf{D}^+(Y' \times_s S) \to \mathsf{D}^+(Y \times_s S).$$

De plus par construction on a les adjonctions

$$(f \times_s S)^* : \mathsf{D}^+(Y' \times_s S) \leftrightarrows \mathsf{D}^+(Y \times_s S) : \mathsf{R}(f \times_s S)_*, \quad \mathsf{R}(f \times_s S)_! : \mathsf{D}^+(Y \times_s S) \leftrightarrows \mathsf{D}^+(Y' \times_s S) : (f \times_s S)^!$$

§ 4.3. Soit $K \in \mathsf{D}^*(Y \times_s S)$. Notons $\Phi(K)_{\overline{\eta}}$ un cône de ρ_K. Alors $\Phi(K)_{\overline{\eta}}$ ne dépend que de K (à quasi-isomorphisme prés) : quitte à remplacer K par un complexe quasi-isomorphe (et même homotope) à K, on peut supposer (on peut se ramener) au cas ou $K = (K_s, K_\eta, \rho_K)$ est tel que ρ_K est injectif. Dans ce cas $\Phi(K)_{\overline{\eta}} := \mathsf{Coker}(\rho_K)$ (Exercice). Par définition $\Phi(K)_{\overline{\eta}}$ est MACC de $\mathsf{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$ de sorte que l'on définit un foncteur

$$\Phi : \mathsf{D}^*(Y \times_s S) \to \mathsf{D}^*(Y \times_s \eta)$$

§ 4.4. Soit $K \in \mathsf{D}(Y \times_s S)$. Par construction on a le triangle distingué

$$K_{\overline{s}} \to K_{\overline{\eta}} \to \Phi(K)_{\overline{\eta}} \xrightarrow{+1}$$

ce qui donne, en appliquant le foncteur homologique $\mathbb{H}^i(\overline{Y}, \bullet)$, la longue suite exacte d'hypercohomologie

$$\cdots \to \mathbb{H}^{i-1}(\overline{Y}, \Phi(K)_{\overline{\eta}}) \to \mathbb{H}^i(\overline{Y}, K_{\overline{s}}) \to \mathbb{H}^i(\overline{Y}, K_{\overline{\eta}}) \to \mathbb{H}^i(\overline{Y}, \Phi(K)_{\overline{\eta}}) \to \mathbb{H}^{i+1}(\overline{Y}, K_{\overline{s}}) \to \cdots$$

L'objectif à présent est de remplacer K par $\psi(K)$. Pour cela il faut définir convenablement le foncteur ψ dans le monde des catégories dérivées. On note $\mathsf{D}^*(X)$ la catégorie dérivé de la catégorie d'homotopie des faisceaux sur X (elle est parfois notée $\mathsf{D}^*_{\text{ét}}(X, \Lambda)$). Il est facile de vérifier que les foncteurs ψ^X et ψ^X_η sont exacts à gauche. On dérive donc ces foncteurs à droite.

Définition 4.5. *On pose*

$$\mathsf{R}\psi^X_\eta : \mathsf{D}^+(X_\eta) \to \mathsf{D}^+(X_s \times_s \eta), \qquad \mathsf{R}\psi^X : \mathsf{D}^+(X) \to \mathsf{D}^+(X_s \times_s S).$$

On note $\mathsf{R}\Phi^X := \Phi\mathsf{R}\psi^X : \mathsf{D}^*(X) \to \mathsf{D}^+(X_s \times_s \eta)$.

Définition 4.6. *Le faisceau* $\mathsf{R}^i\Phi^X(\Lambda) \in \mathsf{D}^+(X_s \times_s \eta)$ *(ou plus généralement les faisceaux* $\mathsf{R}^i\Phi(K)$*) sont appelés les* **faisceaux cycles évanescents**.

§ 4.7. Si $K \in \mathsf{D}^+(X)$, alors par définition on a le triangle distingué

$$\mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{s}} \to \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}} \to \mathsf{R}\Phi^X(K)_{\overline{\eta}} \xrightarrow{+1}$$

§ 4.8. Soient $f : X \to X'$ un morphisme de S-schémas et $f_s : X_s \to X'_s$ et $f_\eta : X_\eta \to X'_\eta$ les morphismes de s-schémas induit sur les fibres en s et η. On peut dériver les relations 3.5 pour obtenir les changements de base suivants.

$$(f_s \times_s S)^*\mathsf{R}\psi^{X'} \to \mathsf{R}\psi^X f^*, \quad \mathsf{R}\psi^{X'}\mathsf{R}f_* \to \mathsf{R}(f_s \times_s S)_*\mathsf{R}\psi^X,$$

où le premier est un isomorphisme lorsque f est lisse d'après le théorème de changement de base lisse, et le second est également un isomorphisme lorsque f est propre d'après le théorème de changement de base propre ; les inverses s'exprimant à l'aide des foncteurs exceptionnels

$$\mathsf{R}(f_s \times_s S)_!\mathsf{R}\psi^X \to \mathsf{R}\psi^{X'}\mathsf{R}f_!, \quad \mathsf{R}\psi^X f^! \to (f_s \times_s S)^!\mathsf{R}\psi^{X'}.$$

De même 3.6 donne

$$(f_s \times_s \eta)^*\mathsf{R}\psi^{X'}_\eta \to \mathsf{R}\psi^X_\eta f_\eta{}^*, \quad \mathsf{R}\psi^{X'}_\eta\mathsf{R}f_{\eta*} \to \mathsf{R}(f_s \times_s \eta)_*\mathsf{R}\psi^X_\eta,$$

$$\mathsf{R}(f_s \times_s \eta)_!\mathsf{R}\psi^X_\eta \to \mathsf{R}\psi^{X'}_\eta\mathsf{R}f_{\eta!}, \quad \mathsf{R}\psi^X_\eta f_\eta{}^! \to (f_s \times_s \eta)^!\mathsf{R}\psi^{X'}_\eta.$$

§ 4.9. Si f est le morphisme structural $X \to S$, on a des foncteurs

$$\mathsf{R}f_* \to \mathsf{R}(f_s \times_s S)_*\mathsf{R}\psi^X, \qquad \mathsf{R}(f_s \times_s S)_!\mathsf{R}\psi^X \to \mathsf{R}f_!,$$

$$\mathsf{R}f_{\eta*} \to \mathsf{R}(f_s \times_s \eta)_*\mathsf{R}\psi^X_\eta, \qquad \mathsf{R}(f_s \times_s \eta)_!\mathsf{R}\psi^X_\eta \to \mathsf{R}f_{\eta!},$$

où $f_s : X_s \to s$ et $f_\eta : X_\eta \to \eta$, qui sont en particuliers des isomorphismes lorsque X est propre sur S. On a mieux :

Proposition 4.10 (SGA 7, prop. XIII.2.1.9). Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Considérons une compactification de X qui existe d'après Nagata :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\circ"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{X} \arrow[d] & \partial\overline{X} \arrow[l, hook', "+"'] \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Si, dans un voisinage U de $\partial\overline{X}$ les $H^i(K)$ sont localement constants sur $U - (\partial\overline{X} \cup X)$ et modérément ramifié le long du diviseur à croisements normaux $\partial\overline{X} \cup X$ alors $\mathsf{R}f_* \to \mathsf{R}(f_s \times_s S)_*\mathsf{R}\psi^X$ et $\mathsf{R}(f_s \times_s S)_!\mathsf{R}\psi^X \to \mathsf{R}f_!$ sont des isomorphismes.

§ 4.11. Les morphismes 4.9 induisent des morphismes de cohomologies (et cohomologies à support compact) pour tout $K \in \mathsf{D}^+(X_\eta)$:

$$\mathbb{H}^i(X_{\overline{\eta}}, \overline{K}) \to \mathbb{H}^i(X_{\overline{s}}, \mathsf{R}\psi_\eta^X(K)_{\overline{\eta}}), \qquad \mathbb{H}^i_c(X_{\overline{s}}, \mathsf{R}\psi_\eta^X(K)_{\overline{\eta}}) \to \mathbb{H}^i_c(X_{\overline{\eta}}, \overline{K})$$

(qui sont donc des isomorphismes inverses l'un de l'autre lorsque f est propre).

Proposition 4.12. Si X est propre sur S, pour tout $K \in \mathsf{D}^+(X)$, on a la suite exacte longue d'hyper-cohomologies

$$\cdots \to \mathbb{H}^{i-1}(X_{\overline{s}}, \mathsf{R}\Phi^X(K)_{\overline{\eta}}) \to \mathbb{H}^i(X_{\overline{s}}, K_{\overline{s}}) \to \mathbb{H}^i(X_{\overline{\eta}}, K_{\overline{\eta}}) \to \mathbb{H}^i(X_{\overline{s}}, \mathsf{R}\Phi^X(K)_{\overline{\eta}}) \to \mathbb{H}^{i+1}(X_{\overline{s}}, K_{\overline{s}}) \to \cdots$$

Démonstration. En remplaçant K par $\mathsf{R}\psi^X(K)$ dans 4.4 (ici $Y = X_s$ et $\overline{Y} = X_{\overline{s}}$), on arrive à la suite exacte

$$\cdots \to \mathbb{H}^i(X_{\overline{s}}, \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{s}}) \to \mathbb{H}^i(X_{\overline{s}}, \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}) \to \mathbb{H}^i(X_{\overline{s}}, \mathsf{R}\Phi^X(K)_{\overline{\eta}}) \to \cdots$$

Enfin, puisque X est propre sur S, 4.11 donne l'isomorphisme $\mathbb{H}^i(X_{\overline{s}}, \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}) \simeq \mathbb{H}^i(X_{\overline{\eta}}, K_{\overline{\eta}})$ □

Ainsi le complexe évanescent $\mathsf{R}\Phi^X(K)$ exprime la différence entre les cohomologies des fibres géométriques $X_{\overline{s}}$ et $X_{\overline{\eta}}$.

On peut regarder la 'différence' entre $\mathsf{R}\Phi^X(K)$ et $\mathsf{R}\psi^X(K)$.

Proposition 4.13. Soit $K \in \mathsf{D}^*(X)$. Notons $q : \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}} \to \mathsf{R}\Phi^X(K)_{\overline{\eta}}$ (*c.f.* 4.7). Pour tout $\sigma \in I$, il existe un morphisme

$$\mathsf{var}(\sigma) : \mathsf{R}\Phi^X(K)_{\overline{\eta}} \to \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}$$

tel que $\sigma = \mathsf{var}(\sigma)q + \mathsf{Id}_{\mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}}$ sur $\mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}$. On appelle $\mathsf{var}(\sigma)$ le **morphisme de variation** de σ.

Démonstration. On part du triangle 4.7. On applique le foncteur cohomologique $\mathsf{Hom}(\bullet, \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}})$ pour obtenir la longue suite exacte

$$\mathsf{Hom}(\mathsf{R}\Phi^X(K)_{\overline{\eta}}, \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}) \to \mathsf{Hom}(\mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}, \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}) \to \mathsf{Hom}(\mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{s}}, \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}})$$

L'action de $\sigma \in I$ est triviale sur $\mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{s}}$ de sorte que l'action de $\sigma - \mathsf{Id}$ sur $\mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}$ s'envoie sur 0 par q^*. □

Le morphisme de variation détermine l'action du groupe d'inertie I sur $\mathbb{H}^i(X_{\overline{\eta}}, K_{\overline{\eta}})$.

5. Singularités isolées.

On s'intéresse à étudier les fibres des cycles évanescents. Supposons pour simplifier que S est un trait strictement hensélien. Soient $f : X \to S$ un schéma de type fini sur S et F un faisceau constructible sur X.

Définition 5.1. *On dira qu'un point $x \in X$ est un point de lissité de F si f est lisse et si F est localement constant dans un voisinage de x.*

Théorème 5.2. Soit x un point de lissité de F, alors $\mathsf{R}\Phi^X(F)_x = 0$.

Black Box... avec quelques explications : Notons $(\overline{x}, \overline{\eta})$ le point géométrique de $X_s \times_s \eta$ issu d'un point géométrique $\overline{x}$ de $X_{\overline{s}}$. Pour tout faisceau F de $X_s \times_s \eta$, $F_{(\overline{x},\overline{\eta})} := (F_{\overline{\eta}})_{\overline{x}}$.

Dans un premier temps on s'intéresse à étudier $\mathsf{R}\psi_\eta^X(F)_{(\overline{x},\overline{\eta})} := (\overline{i}_X^* \mathsf{R}\overline{j}_{X*} F_{\overline{\eta}})_{\overline{x}}$.

Notons $X_{(\overline{x})}$ et $S_{(\overline{s})}$ les hensélisés stricts de $\overline{X}$ et $\overline{S}$ en $\overline{x}$ et $\overline{s}$ respectivement. Pour un corps k, notons k_{nr} l'extension maximale non ramifiée de k. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \eta_{nr} \arrow[r] \arrow[d] & S_{(\overline{s})} \arrow[d] \\
\overline{\eta} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \eta \arrow[r] & \overline{S}
\end{tikzcd}$$

où la flèche en pointillée est un résultat classique d'arithmétique. Ceci nous permet de construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(X_{(\overline{x})})_{\overline{\eta}} \arrow[rrr] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "\pi"] & & & X_{(\overline{x})} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& X_{\overline{\eta}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{X} \arrow[d] & \\
& \overline{\eta} \arrow[r] & \overline{S} & \\
\overline{\eta} \arrow[ur, equal] \arrow[rrr] & & & S_{(\overline{s})} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

où α est obtenu par la propriété universelle des diagrammes cartésiens. On vérifie que $\mathsf{R}\psi_\eta^X(F)_{(\overline{x},\overline{\eta})} := (\overline{i}_X^* \mathsf{R}\overline{j}_{X*} F_{\overline{\eta}})_{\overline{x}} = \mathsf{R}\pi_* \alpha^* F_{\overline{\eta}} =: \mathsf{R}\Gamma((X_{(\overline{x})})_{\overline{\eta}}, F) = \mathsf{R}\Gamma(X_{(\overline{x})} \times_{\eta_{nr}} \overline{\eta}, F)$.

On conclut en appliquant le théorème d'acyclicité locale pour les morphismes lisses (SGA 4 thm. XV.2.1) □

§ 5.3. Il suffit alors d'étudier $\mathsf{R}\Phi^X$ sur les points de non lissité. Notons cet ensemble de points Σ et Σ_s la fibre spéciale en s. On a donc précédemment prouvé que $\mathsf{R}\Phi^X(F) = 0$ en dehors de Σ_s.

Théorème 5.4. En tout point isolé x de Σ_s, les $\mathsf{R}^i\Phi^X(F)_x$ sont des Λ-modules de type fini invariant par changement de trait.

Démonstration. Puisque le problème est de nature locale, on peut se ramener à supposer que f est propre. Dans ce cas on dispose de la longue suite exacte d'hypercohomologies :

$$H^i(X_{\overline{s}}, F) \to H^i(X_{\overline{\eta}}, F) \to \mathbb{H}^i(X_{\overline{s}}, \mathsf{R}\Phi^X(F)_{\overline{\eta}})$$

Puisque les deux premiers sont des modules de type fini invariant par changement de trait (propriété de la cohomologie étale) il en va de même pour $\mathbb{H}^i(X_{\overline{s}}, \mathsf{R}\Phi^X(F)_{\overline{\eta}})$. Notons ι l'inclusion de x dans X, alors l'adjonction $1 \to \iota_*\iota^*$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie dérivée des faisceaux sur x et la catégorie dérivée des faisceaux sur X à support dans $\{x\}$. En appliquant le foncteur $\iota_*\iota^*$ on prouve que $\mathsf{R}^i\Phi(F)_x = \mathbb{H}^i(\{x\}, \mathsf{R}\Phi^X(F)_{\overline{\eta}})$ est un module de type fini invariant par changement de trait. □

Le même énoncé vaut en remplaçant F par un complexe K de faisceaux en Λ-module.

Si le support de $\mathsf{R}\Phi^X(K)$ (qui est Σ) est formé d'un nombre fini de points dénombrable alors

$$\mathsf{R}\Phi^X(K)_{\overline{\eta}} = \bigoplus_{x\in\Sigma} \iota_{x!}(\mathsf{R}\Phi^X(K)_{\overline{\eta}})_x$$

où ι_x désigne l'inclusion de x dans X.

Par construction du morphisme de variation, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\sigma-\mathsf{Id}"'] & \bigoplus_{x\in\Sigma} \iota_{x!}(\mathsf{R}\Phi^X(K)_{\overline{\eta}})_x \arrow[d, "\oplus\iota_{x!}\mathsf{var}(\sigma)"] \\
\mathsf{R}\psi(K)_{\overline{\eta}} & \bigoplus_{x\in\Sigma} \iota_{x!}\mathsf{R}\Gamma_{\{x\}}\mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

soit encore en prenant l'hypercohomologie

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^i(X_s, \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\sigma-\mathsf{Id}"'] & \bigoplus_{x\in\Sigma} (\mathsf{R}^i\Phi^X(K)_{\overline{\eta}})_x \arrow[d, "\oplus\iota_{x!}\mathsf{var}(\sigma)"] \\
\mathbb{H}^i(X_{\overline{\eta}}, \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}) & \bigoplus_{x\in\Sigma} \mathbb{H}^i_{\{x\}}(X_s, \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Lorsque f est propre, on a la longue suite d'hypercohomologie

$$\mathbb{H}^i(X_{\overline{s}}, K_{\overline{s}}) \to \mathbb{H}^i(X_{\overline{\eta}}, K_{\overline{\eta}}) \to \bigoplus_{x \in \Sigma} (\mathsf{R}^i \Phi(K)_{\overline{\eta}})_x,$$

et dans ce cas le diagramme précédent devient

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^i(X_{\overline{\eta}}, K_{\overline{\eta}}) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\sigma - \mathsf{Id}"'] & \bigoplus_{x \in \Sigma} (\mathsf{R}^i \Phi^X(K)_{\overline{\eta}})_x \arrow[d, "\oplus \iota_{x!} \mathsf{var}(\sigma)"] \\
\mathbb{H}^i(X_{\overline{\eta}}, K_{\overline{\eta}}) & \bigoplus_{x \in \Sigma} \mathbb{H}^i_{\{x\}}(X_s, \mathsf{R}\psi^X(K)_{\overline{\eta}}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Deligne raconte qu'il est possible d'avoir les deux assertions précédentes sans demander que f soit propre (SGA 7, §XIII.2.4.6.4).